

# Seria VI zadań z Mechaniki Kwantowej II B do wykładu dr. hab. Krzysztofa Byczuka

r.p. 2008/2009

## Zadanie 1 — Hamiltonian w II kwantyzacji

Udowodnić, że Hamiltonian układu wielocząstkowego w II kwantyzacji ma postać podaną na wykładzie

$$H = \sum_{ij} h_{ij} c_i^\dagger c_j + \frac{1}{2} \sum_{ijkl} V_{ijkl} c_i^\dagger c_j^\dagger c_l c_k.$$

## Zadanie 2 — Operatory prądu i spinu

Wyprowadzić jawną postać w II kwantyzacji operatorów gęstości prądu prawdopodobieństwa dla elektronów w obszarze o objętości  $\Omega$ :

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{m\Omega} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{q}\sigma} \left(\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}\right) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} c_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger c_{(\mathbf{k}+\mathbf{q})\sigma}$$

w układzie translacyjnie niezmienniczym i spinu

$$\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2} \sum_i \begin{pmatrix} c_{i\downarrow}^\dagger c_{i\uparrow} + c_{i\uparrow}^\dagger c_{i\downarrow} \\ i(c_{i\downarrow}^\dagger c_{i\uparrow} - c_{i\uparrow}^\dagger c_{i\downarrow}) \\ c_{i\uparrow}^\dagger c_{i\uparrow} - c_{i\downarrow}^\dagger c_{i\downarrow} \end{pmatrix}$$

w dowolnej bazie jednocząstkowej.

## Zadanie 3 — Oddziałujące fermiony

Niech hamiltonian oddziałujących fermionów ma postać

$$H = \sum_i \epsilon_i n_i + \frac{V}{2} \sum_{ij}^{(i \neq j)} n_i n_j.$$

Jakie są stany własne i energie własne tego modelu? Omówić.

## Zadanie 4 — Model Hubbarda dla molekuly wodoru

Znaleźć wszystkie stany własne i energie własne dla modelu molekuly  $H_2$ , który opisywany jest fermionowym Hamiltonianem

$$H = \epsilon \sum_{\sigma} (n_{1\sigma} + n_{2\sigma}) + t \sum_{\sigma} (c_{1\sigma}^\dagger c_{2\sigma} + c_{2\sigma}^\dagger c_{1\sigma}) + U(n_{1\uparrow} n_{1\downarrow} + n_{2\uparrow} n_{2\downarrow}),$$

gdzie występują operatory spełniające antykomutacyjne reguły, a występujące parametry  $\epsilon$ ,  $t$ , i  $U$  mają określony sens fizyczny. Odczytać ten sens. Wsk. rozpatrywać osobno stany o określonej liczbie cząstek  $N = 1, 2, 3$ , i  $4$ .

*Rozwiązania proszę przynieść na ćwiczenia 25 listopada.*