Rozwiązania zadań kolokwialnych

Zadanie 2 sprawdzałem ja — Grzegorz Pełka, i poniżej mogą Państwo znaleźć to, czego mniej więcej się spodziewałem. Oczywiście można było rozwiązywać inaczej. Wiele osób niestety, rozwiązywało problem zbyt „ubogo” czyniąc nieuzasadnione założenia ograniczające ogólność. Jeśli ich dowód dawał rozszerzyć się na pełen problem otrzymywali oni część punktów.

Zadanie 2.

Układ pracujący cyklicznie w przemianie odwracalnej można przedstawić na wykresie (T,S), gdyż odwracalność cyklu jest możliwa jedynie wówczas gdy wszystkie procesy w układzie przebiegają kwazistatycznie, a to oznacza, że w toku procesu układ stale znajduje się w stanie równowagi — to wystarcza by istniały entropia i temperatura. Po każdym cyklu pracy silnika powraca on do tego samego stanu. W szczególności $\Delta U_{\text{cykl}} = 0$. Zapisujemy wzór na sprawność silnika:

$$\eta = \frac{\overline{W}}{Q_{\text{pobr}}},$$

gdzie $\overline{W}$ jest całkowitą pracą wykonaną przez układ, a Q_{pobr} sumą ciepeł pobranych przez układ, sumując jedynie po etapach, na których układ ciepło **pobierał**. Poniższe wielkości odnoszą się do efektów pokonania jednego pełnego cyklu. Korzystając z pierwszej zasady termodynamiki

$$\eta = \frac{\overline{W}}{Q_{\text{pobr}}} = \frac{-\Delta U + Q_{\text{pobr}} - \overline{Q_{\text{odd}}}}{Q_{\text{pobr}}} = 1 - \frac{\overline{Q_{\text{odd}}}}{Q_{\text{pobr}}}.$$

Cykl C w jakim pracuje silnik, należy podzielić na dwie części (niekoniecznie spójne!): C_+ na której ciepło jest pobierane przez silnik (konsekwentnie: entropia ciała roboczego rośnie) oraz C_- składającą się z etapów (lub etapu), na którym ciepło jest wydzielane przez silnik na zewnątrz (entropia ciała roboczego maleje). Przepisujemy szacując całki (entropia jest funkcją stanu ciała roboczego silnika)

$$Q_{\text{pobr}} = \int\limits_{C_+} T dS \leqslant \int\limits_{C_+} T_{\max} dS = T_{\max} \int\limits_{C_+} dS = T_{\max}\Delta S_+,$$

gdzie wprowadzamy oznaczenia $\Delta S_\pm := \int_{C_\pm} dS$. Analogicznie

$$\overline{Q_{\text{odd}}} = \int\limits_{C_-} T(-dS) \geqslant \int\limits_{C_-} T_{\min}(-dS) = -T_{\min} \int\limits_{C_-} dS = -T_{\min}\Delta S_-.$$

Po pokonaniu pełnego cyklu silnik wraca do stanu o tej samej entropii:

$$0 = \oint dS = \int\limits_{C_+} dS + \int\limits_{C_-} dS = \Delta S_+ + \Delta S_-.$$

Podstawiwszy powyższe równości i oszacowania do wyrażenia na sprawność, a następnie uprościwszy przez $\Delta S_\pm$ otrzymujemy żądaną nierówność.

Maksymalną, równą $1-T_{\min}/T_{\max}$ sprawność uzyskuje się gdy oszacowania ciepło–zmiana entropii stają się równościami, czyli wówczas gdy silnik pobiera ciepło będąc stale w temperaturze $T = T_{\max}$, a oddaje w $T = T_{\min}$ (czyli też izotermicznie), na pozostałych etapach wymiana ciepła zachodzić nie może, czyli muszą to być procesy adiabatyczne. Kwazistatyczny cykl złożony z dwóch adiabat i dwóch izoterm nazywa się cyklem **Carnota**.

Zadanie 1.

Ciepło do układu dostarczano pseudostatycznie, czyli układ w każdej chwili znajdował się w równowadze. Istniała więc dobrze określona funkcja stanu: temperatura. Musiało być więc spełnione

$$p_i(V_i - N_i b_i) = N_i R T_i,$$

w każdej chwili czasu. Ponieważ izolowany adiabatycznie od świata zewnętrznego układ był przedzielony mogącą poruszać się i przewodzić ciepło przegrodą, więc warunkiem równowagi, była równość temperatur i ciśnień po obu stronach przegrody:

$$p_1 = p_2 = p, \quad T_1 = T_2 = T.$$

Z faktu, że

$$V_1 - N_1 b_1 = \frac{RT}{p} = V_2 - N_2 b_2, \quad N_i, b_i = \text{const}$$

oraz (stałości całkowitej objętości układu) const$= V = V_1 + V_2$ dostajemy

$$2V_1 = V - N_2 b_2 + N_1 b_1,$$

czyli położenie przegrody nie mogło zmieniać się w trakcie przemiany. Nie była więc wykonywana praca ($pdV = 0$). To znaczy, że energia U_2 „dalszej" części komory (jeżeli tę, do której ciepło Q dostarczono bezpośrednio nazwiemy „bliższą") zmieniała się jedynie wskutek przepływu ciepła Q_P przez diatermiczną przegrodę:

$$dU_2 = (\text{d kreślone}) Q_p.$$

Jest $U_i = N_i c_{V,i} T$. Niech indeks k opisuje stan końcowy, a p początkowy. Nad układem jak całością również nie wykonano pracy, atoli dostarczono ciepło, suma energii wewnętrznych musiała więc wzrosnąć według wzoru

$$Q = \Delta(U_1 + U_2) = (T_k - T_p)(N_1 c_{V,1} + N_2 c_{V,2}),$$

jednocześnie

$$Q_p = \Delta U_2 = (T_k - T_p) N_2 c_{V,2},$$

więc

$$Q_p = Q \frac{N_2 c_{V,2}}{N_1 c_{V,1} + N_2 c_{V,2}}.$$

W zadaniu było $N_1 = N_2$, $c_{V,1} = c_{V,2}$, czyli $Q_p = \frac{1}{2} Q$.