UNIWERSYTET WARSZAWSKI
WYDZIAŁ FIZYKI
INSTYTUT FIZYKI TEORETYCZNEJ

Fale grawitacyjne w otwartym wszechświecie

Jacek Daniel Litwin

praca magisterska
napisana pod kierunkiem

prof. dra hab. Marka Demiańskiego

Warszawa 1998

Streszczenie

W pracy rozważamy inflacyjny model kosmologiczny prowadzący do powstania wszechświata z parametrem gęstości $\Omega_0 < 1$. Mechanizm powodujący inflację generuje zaburzenia skalarne (zaburzenia gęstości) oraz zaburzenia tensorowe (fale grawitacyjne). Obliczamy wynikające z tego modelu widmo pierwotnych fal grawitacyjnych oraz znajdujemy analityczne rozwiązanie równania na amplitudę fali grawitacyjnej w epoce inflacyjnej, epoce promieniowania oraz epoce materii. Koncentrujemy się na tych modach zaburzeń tensorowych, które dają wkład do szerokokątowej anizotropii temperatury promieniowania reliktowego. Znajdujemy także wyrażenie na momenty multipolowe kątowej funkcji korelacyjnej określającej wkład fal grawitacyjnych do anizotropii temperatury promieniowania reliktowego. Podajemy także sposób na ich renormalizację pozwalający na usunięcie pojawiającej się rozbieżności ultrafioletowej.

Spis Treści

1 Wstęp

W rozdziale tym omówimy najważniejsze wydarzenia związane z rozwojem współczesnej kosmologii, przedstawimy także główne założenia i równania standardowego modelu kosmologicznego oraz jego rozszerzenie do modelu inflacyjnego.

1.1 Początki współczesnej kosmologii

Za moment narodzin współczesnej kosmologii można przyjąć rok 1929, w którym to Edwin Hubble opublikował odkrytą przez siebie zależność pomiędzy *prędkością ucieczki* galaktyki a jej *odległością* od Drogi Mlecznej. Zależność ta zwana prawem Hubble'a - w myśl słabej zasady kosmologicznej [1] - nie ogranicza się tylko do układu Droga Mleczna - inna galaktyka, lecz dotyczy dowolnej pary galaktyk we wszechświecie.

Hubble wywnioskował, że prędkości ucieczek galaktyk rosną liniowo wraz z ich wzajemną odległością:

$$v_r = Hr, \tag{1}$$

gdzie v_r jest prędkością radialną, czyli prędkością wzdłuż promienia łączącego obie galaktyki, r - odległością między galaktykami, natomiast $H = H(t)$ zwana jest stałą Hubble'a, ale jej wartość zmienia się z czasem. Odkrycie to ostatecznie obaliło panujące wówczas przeświadczenie o stacjonarności wszechświata.

Odkrycie Hubble'a bardzo szybko zyskało uznanie, gdyż po pierwsze doskonale zgadzało się z obrazem rozszerzającego się wszechświata oraz jak się wkrótce okazało, przewidywania, iż słabiej świecące (bardziej odległe - patrz tekst poniżej) galaktyki mają większe przesunięcie ku czerwieni, doskonale zgadzały się z wynikami udoskonalanych wciąż pomiarów. Do weryfikacji tej zależności potrzebne są pomiary odległości galaktyk oraz ich przesunięć ku czerwieni.

Do pomiarów odległości galaktyk nie można zastosować metody triangulacji (pomiar paralaksy) stosowanej w pomiarach odległości do gwiazd znajdujących się w naszej galaktyce, gdyż w przypadku nawet najbliższych galaktyk paralaksa jest zbyt mała, by metoda ta była użyteczna. Można natomiast skorzystać z relacji okres - jasność dla cefeid, która w 1912 r. została odkryta przez Henriettę Leavitt i Harlowa Shapley'a na podstawie obserwacji gwiazd znajdujących się w Małym Obłoku Magellana.

Jeżeli potrafimy wyodrębnić co najmniej jedną cefeidę w danej galaktyce oraz zmierzyć jej okres, to na podstawie zależności odkrytej przez H. Levitt możemy określić jasność rzeczywistą J_r tej cefeidy, a mając z kolei jej jasność obserwowaną J_o i traktując ją jako źródło izotropowe możemy określić odległość do tej cefeidy ($1/r^2 \sim J_o/J_r$) a zatem i do samej galaktyki. Metodę tą mógł Hubble stosować dla galaktyk odległych nie więcej

[1] Słaba z. k. mówi, że: - prawa fizyki są jednakowe w każdym miejscu we wszechświecie, - żaden punkt we wszechświecie nie jest wyróżniony, - w odpowiednio dużej skali wszechświat jest jednorodny i izotropowy. Mocna z. k., obalona odkryciem Hubble'a zakładała dodatkowo stacjonarność wszechświata.

niż milion lat świetlnych, gdyż w dalszych galaktykach nie można już było wyodrębnić poszczególnych cefeid.

Oprócz cefeid do pomiarów odległości E.Hubble wykorzystywał także nadolbrzymy, ponieważ można je było obserwować w galaktykach, w których cefeidy były niewidoczne. Hubble założył, że najjaśniejsze nadolbrzymy we wszystkich galaktykach mają tą samą jasność rzeczywistą i wtedy mierząc jasność obserwowaną mógł określić odległość do galaktyki. Założenie to sprawdzono w przypadku galaktyk z *grupy lokalnej*, których odległości można było zmierzyć metodą cefeid. Okazało się ono w przybliżeniu słuszne. W ten sposób Hubble zwiększył zakres mierzonych odległości do około 10 milionów lat świetlnych [35].

Odległości do dalszych galaktyk, w których nie można już wyodrębnić poszczególnych gwiazd, można szacować zakładając, że jasności rzeczywiste galaktyk tego samego typu są w przybliżeniu jednakowe. Przy tak wielkich skalach należy raczej mówić o odległości do gromady galaktyk niż do pojedynczej galaktyki. Przy ustalaniu odległości do gromady stosuje się dosyć specyficzną metodę - zakłada się, że jasności rzeczywiste *piątych, najjaśniejszych galaktyk eliptycznych w gromadach* są w przybliżeniu identyczne [8] i w ten sposób szacuje odległość. Przy takiej procedurze wyboru założenie o jasności rzeczywistej jest dokładniejsze, niż, gdybyśmy je stosowali do dowolnych galaktyk - nawet tego samego typu. Założenie to też było sprawdzone dla pobliskich galaktyk, dla których można było stosować metodę cefeid lub nadolbrzymów i także okazało się słuszne [35]. Założenie to pozwoliło Hubble'owi uwzględnić galaktyki odległe od nas o 500 milionów lat świetlnych.

Pomiar prędkości radialnej[2] możliwy jest dzięki występowaniu przesunięcia linii widmowych - światła emitowanego przez galaktyki - w kierunku dłuższych fal, czyli tak zwanego *poczerwienienia* galaktyk. Odpowiedzialne za to są dwa zjawiska - efekt Dopplera, związany bezpośrednio z ruchem źródła względem obserwatora, oraz oddziaływanie grawitacyjne. Efektów tych nie da się niestety odseparować. Wśród najbliższych galaktyk obserwujemy także wyjątkowe przypadki przesunięcia ku fioletowi, co związane jest ze wspomnianym wcześniej faktem dążenia galaktyk do grupowania się w większe struktury (gromady, supergromady). W obrębie takich struktur oddziaływanie grawitacyjne może być na tyle silne, że efekty związane z ekspansją wszechświata są lokalnie przezwyciężane przez przyciąganie grawitacyjne, i w rezultacie dane obiekty zamiast oddalać, zbliżają się do siebie.

Do roku 1925 V.M Slipher zmierzył przesunięcie ku czerwieni dla pewnej liczby galaktyk, dla których Hubble znalazł następnie odległości i stwierdził, że rozkład prędkości ucieczek nie jest przypadkowy [35], lecz wiąże się z odległością związkiem (1).

Początkowo Hubble sprawdził tę zależność do odległości około 6 milonów lat świetnych, lecz w momencie publikowania swojej książki (1936r.) *"The Realm of the Nebulae"*, [3] między innymi dzięki pomiarom przesunięcia ku czerwieni galaktyk dokonanym przez L.M. Humasona, mógł rozszerzyć stosowalność swojego prawa do 240 milionów lat świetlnych.

[2]W pierwszym przybliżeniu prędkość radialna jest proporcjonalna do przesunięcia ku czerwieni.

[3]Królestwo mgławic.

Dalszy postęp w sprawdzaniu słuszności prawa Hubble'a został osiągnięty dzięki pomiarom przesunięcia ku czerwieni dla radiogalaktyk. Tutaj rozbieżności od liniowego prawa Hubble'a okazały się nawet mniejsze niż w przypadku źródeł optycznych. Związane jest to z dokładnością oceny odległości do danych galaktyk. Założenie, że jasności wszystkich galaktyk tego samego typu są jednakowe przestaje pracować, gdy sięgamy do coraz większych odległości, ponieważ na skutek skończonej prędkości światła obraz, który do nas dociera, mówi nam jakie owe galaktyki były miliony lat wcześniej. Dlaczego zatem jasność radiowa jest bardziej stabilna niż optyczna? Promieniowanie, które u nas rejestrujemy w zakresie optycznym, emitowane jest w galaktyce w dużym stopniu przez masywne, szybko ewoluujące gwiazdy, zatem zmienność w czasie jest istotna, natomiast promieniowanie o długościach radiowych emitowane jest przez lżejsze, dłużej żyjące gwiazy, dlatego też dla jasności radiowej założenie to lepiej pracuje [28]. Do pomiarów przesunięcia ku czerwieni wykorzystuje się także charakterystyczną linię z zakresu radiowego. Jest to promieniowanie o długości fali 21 cm, emitowane przez neutralny wodór znajdujący się w dużych ilościach w materii międzygwiazdowej. Charakterystyczna linia powstaje podczas przejścia atomu wodoru ze stanu o równolegle zorientowanych spinach protonu i elektronu do stanu z antyrównoległym zorientowaniem spinów.

Obecna wartość parametru Hubble'a okazała się kilka razy mniejsza niż to początkowo otrzymał sam Edwin Hubble. Wpływ na to miał między innymi fakt, iż w czasach Hubble'a sądzono, że istnieje tylko jeden typ cefeid, natomiast dzisiaj wiemy, że jest ich conajmniej dwa.[4] Tym samym skala odległości we wszechświecie zwiększyła się (1). Jak się później okazało odkrycie Hubble'a było wielkim krokiem w kierunku idei Wielkiego Wybuchu.

1.2 Wielki Wybuch

W roku 1946 George Gamow wysunął ideę gorącego Wielkiego Wybuchu mówiącą, iż w pierwszych fazach swojego istnienia wszechświat był wystarczająco gęsty i gorący, by mogły zachodzić w nim reakcje termojądrowe.[5]

Narodziny wszechświata w gigantycznym wybuchu, a przede wszystkim warunki w jakich znajdował się wówczas wszechświat wydają się być bardzo odważną ideą, która nawet w dzisiejszych czasach zmusza do zadumy oraz rodzi pytania, na które nadal nie potrafimy odpowiedzieć w zadowalający sposób.

Oczywiście próby wyjaśniania owych pytań, równie egzotyczne jak same pytania pojawiają się nieustannie, lecz wiele z nich, np. *"Co się działo przed wybuchem, i czy w ogóle wtedy coś istniało?"* mimo podjętych prób, nadal wydają się być raczej czysto filozoficznymi spekulacjami.

Nie znaczy to jednak, że model Wielkiego Wybuchu stwarza jedynie nowe nie dające się rozwiązać problemy - przeciwnie, poza oczywistym wyjaśnieniem faktu ucieczki galak-

[4] Mają one oczywiście różne zależności jasności od okresu - co było źródłem błędu Hubble'a.

[5] Gamow chciał w ten sposób wyjaśnić obfitość występujących pierwiastków - w szczególności helu.

tyk, w tym modelu można wyjaśnić wiele innych zagadek, które nurtowały kosmologów jeszcze przed powstaniem modelu Wielkiego Wybuchu. Za przykład może tu posłużyć tzw. *paradoks Olbersa ciemnego nocnego nieba.* W modelu Wielkiego Wybuchu paradoks nie występuje, gdyż wszechświat istnieje skończony okres czasu i światło dochodzące do obserwatora na Ziemi od gwiazd pochodzi ze skończonego obszaru, o promieniu równym iloczynowi prędkości światła i wieku wszechświata, lub patrząc się na to bardziej formalnie widzimy, że w rozszerzającym się wszechświecie jasność galaktyk maleje szybciej niż $1/r^2$ (poczerwienienie), a zatem wkład do jasności nieba od coraz dalej położonych galaktyk maleje, gdyż liczba galaktyk w odległości r od Ziemi rośnie nadal tylko jak r^2.

Dużym sukcesem modelu jest także zgodność modelowych wyników pierwotnej nukleosyntezy z obfitością występujących we wszechświecie lekkich pierwiastków. Szerzej na ten temat napiszemy w rozdziale 2.

1.3 Mikrofalowe promieniowanie tła

Model Wielkiego Wybuchu przewiduje występowanie w przestrzeni kosmicznej izotropowego promieniowania elektromagnetycznego o natężeniu odpowiadającym promieniowaniu ciała doskonale czarnego o temperaturze ~ 2.7 K. Promieniowanie to we wczesnych fazach ewolucji wszechświata, gdy materia była jeszcze całkowicie zjonizowana, bardzo efektywnie rozpraszało się na swobodnych elektronach. Dzięki temu między materią i promieniowaniem istniała równowaga termodynamiczna. Co doprowadziło do termalizacji promieniowania reliktowego. Zatem natężenie promieniowania $I(\nu)$ ma rozkład plankowski [7]:

$$I(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2\left(\exp\frac{h\nu}{kT} - 1\right)},$$

gdzie k to stała Boltzmana, h - stała Plancka, T -temperatura.

Gdy wszechświat ochłodził się do temperatury około 3000 K, to na skutek rekombinacji wodoru efektywność rozpraszania thomsonowskiego spadła niemal do zera i wszechświat stał się przezroczysty dla promieniowania. Gdy promieniowanie nie oddziałuje z materią liczba fotonów jest zachowana:

$$\frac{d}{dt}\left(a^3(t)I(\nu(t))\right) = 0,$$

gdzie $a(t)$ to tzw. *czynnik skali.* Biorąc z kolei pod uwagę, że podczas rozszerzania się wszechświata:

$$\nu(t)a(t) = \text{const.}$$

widzimy, że plankowski rozkład widma promieniowania reliktowego zostaje zachowany. Na skutek ekspansji wszechświata temperatura promieniowania zmienia się wówczas zgodnie z zależnością:

$$T(t) = T_0\frac{a(t_0)}{a(t)} = T_0(1+z), \tag{2}$$

gdzie indeks zero odnosi się do chwili obecnej (zatem $T_0 \approx 2.7K$), oraz z to redshift w czasie t, w którym określamy temperaturę $T(t)$. W roku 1964 Doroszkiewicz i Novikov doszli do wniosku, że promieniowanie reliktowe można zaobserwować, gdyż natężenie tego promieniowania w obszarze mikrofalowym jest silniejsze niż wkład od innych źródeł.

Można sobie zatem wyobrazić wielką radość zwolenników[6] teorii Wielkiego Wybuchu, gdy w roku 1965 Arno Penzias i Robert Wilson donieśli o odkryciu promieniowania resztkowego. Odkrycia tego dokonano przypadkowo, podczas obserwacji astronomicznych w obszarze mikrofalowym, anteną służącą do łączności z satelitami komunikacyjnymi.

Obserwowane z ziemi promieniowanie reliktowe nie jest całkowicie izotropowe. W roku 1977 P. Henry zaobserwował tzw. anizotropię dipolową związaną z ruchem Ziemi względem układu wyróżnionego przez promieniowanie. Efekt Dopplera tłumaczy jak powstaje taka anizotropia i pozwala na określenie prędkości z jaką Ziemia porusza się względem tego swoistego eteru. Z przeprowadzonych pomiarów wynika, że Słońce porusza się z prędkością 360 km/s w kierunku gwiazdozbioru Lwa, natomiast cała Droga Mleczna z prędkością 600 km/s w kierunku gwiazdozbioru Hydry [7].

Niejednorodności w rozkładzie materii w okresie, gdy promieniowanie po raz ostatni oddziaływało z materią powinny zostawić po sobie ślad w postaci kwadrupolowej anizotropii promieniowania reliktowego.

Had astronomers seen "the face of God"? Had they found "the Holy Grail"? - takie i inne komentarze pojawiały się w prasie codziennej wiosną roku 1992, gdy ogłoszono wykrycie przez satelitę *COBE* niewielkiej anizotropii w temperaturze promieniowania reliktowego [32]. Temperatura mierzona przez *COBE* z obszarów o rozmiarach kątowych $\theta_{COBE} \sim 7^o$ wykazała anizotropię rzędu [28, 8]:

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{COBE} = (1.1 \pm 0.2) \times 10^{-5}.$$

W rozdziale 5. omówimy wpływ *fal grawitacyjnych* na anizotropię temperatury promieniowania reliktowego.

1.4 Problemy modelu Wielkiego Wybuchu

Przy tylu spektakularnych sukcesach standardowy model kosmologiczny napotyka jednak na pewne trudności, z którymi nie może sobie poradzić. Najważniejsze z nich to problem horyzontu i problem płaskości. W pracy [19, strony 22–34] można znaleźć omówienie pozostałych problemów modelu standardowego.

1.4.1 Problem horyzontu

Z obserwacji promieniowania reliktowego wynika, że jest ono niemal całkowicie jednorodne i izotropowe, a jego temperatura różni się mniej niż o $10^{-4}T$ w różnych obsza-

[6] W tamtym okresie przeciwnicy teorii WW nie byli wyjątkami.

rach obecnego horyzontu. I tu pojawia się problem, gdyż obecnie obserwowalna część wszechświata w momencie rekombinacji, czyli w momencie powstania, a raczej wyodrębnienia się promieniowania tła, składała się z około 10^6 obszarów przyczynowo ze sobą nie powiązanych[19]. Było to możliwe dlatego, iż początkowo wszechświat rozszerzał się na tyle szybko, że światło nie zdążyło dotrzeć z jednego obszaru (przyczynowo powiązanego) do drugiego.

Z punktu widzenia epoki Plancka, problem ten wydaje się być jeszcze bardziej wyraźny. W czasie Plancka promień horyzontu cząstek, czyli promień obszaru przyczynowo powiązanego miał wielkość równą długości Plancka $l_{PL} \approx 10^{-33} cm$. Natomiast obszar z którego powstała obecnie obserwowalna część wszechświata musiał by mieć wówczas rozmiar rzędu $L \approx 10^{-4} cm$, zatem składał by się on z $l_{PL}^3/L^3 = (10^{-33}/10^{-4})^3 = 10^{87}$ przyczynowo nie powiązanych obszarów, fakt ten nazywamy właśnie *problemem horyzontu* [13, 19].

1.4.2 Problem płaskości

Zazwyczaj *problemem płaskości* nazywa się konieczność bardzo dokładnego ustalenia wartości początkowej stałej Hubble'a (czy równoważnie gęstości energii, [19]) w epoce Plancka, co jest konieczne by obecna wartość parametru Ω otrzymana w ramach standardowego modelu Wielkiego Wybuchu zgadzała się z obserwacjami.

Bardzo bezpiecznie możemy założyć, że obecna wartość parametru Ω_0 mieści się w granicach [27]:

$$0.1 \leq \Omega_0 \leq 1. \tag{3}$$

Obecną wartość parametru gęstości Ω_0 z jego wartością Ω przy przesunięciu ku czerwieni z wiąże zależność:

$$\frac{1-\Omega}{\Omega} = \frac{1-\Omega_0}{\Omega_0}\frac{1}{(1+z)^n}, \tag{4}$$

gdzie n to współczynnik zależny od epoki:

- $n = 2$ w epoce promieniowania,
- $n = 1$ w epoce dominacji materii.

Korzystając z tego wzoru oraz ograniczenia (3) możemy wyznaczyć dokładność z jaką gęstość energii w epoce Plancka musi być równa gęstości krytycznej:

$$|\Omega - 1| \equiv \left|\frac{\rho}{\rho_{kryt}} - 1\right| \leq 10^{-59}. \tag{5}$$

Ustalenie warunków początkowych z taką wielką dokładnością: 1 na 10^{59} uważane jest za ekstremalnie nienaturalne [7, 19], dlatego też fakt ten interpretowany jest jako problem standardowego modelu kosmologicznego, na który po raz pierwszy w 1979 roku zwrócili uwagę Dicke i Peebles [7].

1.5 Inflacja

Wszystkie powyższe problemy znajdują rozwiązanie w inflacyjnym modelu kosmologicznym. Jest to model standardowy uzupełniony o okres wykładniczej ekspansji wszechświata, odbywającej się tuż po wielkim wybuchu. Po raz pierwszy takie uzupełnienie standardowego modelu kosmologicznego zaproponował A.Guth w pracy [13]. Omówimy teraz pokrótce, w jaki sposób model inflacyjny rozwiązuje wspomniane wcześniej problemy.

1.5.1 Rozwiązanie problemu płaskości

W konkretnych modelach inflacyjnych mechanizmy zajścia tej potrzebnej standardowemu modelowi kosmologicznemu fazy bardzo szybkiej ekspansji wszechświata różnią się nieco między sobą, lecz zasadnicza idea pozostaje taka sama.

Przeanalizujmy zatem równania opisujące ewolucję wszechświata w standardowym modelu kosmologicznym. Geometrię wszechświata w tym modelu opisuje metryka Robertsona-Walkera:[7]

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \right) \right], \tag{6}$$

gdzie $k = +1, 0, -1$, odpowiednio dla zamkniętego, płaskiego i otwartego wszechświata. Z einsteinowskich równań pola zapisanych w tej metryce otrzymujmy równania Friedmana opisujące ewolucję czynnika skali $a(t)$. Mają one postać:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3} G(\rho + 3p)a, \tag{7}$$

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} G\rho - \frac{k}{a^2}. \tag{8}$$

Problem płaskości będzie rozwiązany, gdy drugi człon prawej strony równania (8) stanie się zaniedbywalnie mały w porównaniu z pierwszym członem:

$$\frac{8\pi}{3} G\rho \gg \left| \frac{k}{a^2} \right|. \tag{9}$$

Można doprowadzić do takiej sytuacji, gdy podczas epoki inflacyjnej stosunek członu $\frac{8\pi}{3}G\rho$ do członu krzywiznowego $\frac{1}{a^2}$ urośnie na tyle, by warunek (9) był spełniony. Z równania (8) stosunek ten możemy wyrazić następująco:

$$\frac{(8\pi G\rho)/3}{1/a^2} = \dot{a}^2 + k. \tag{10}$$

[7] Przyjmujemy $c \equiv 1$.

Aby lewa strona równania (10) rosła podczas inflacji rosnąć musi także $\dot{a}$, lub innymi słowy, podczas inflacji $\ddot{a}$ musi być dodatnie [1]. Idąc dalej widzimy, że z równania (8) wynika warunek, który w okresie inflacyjnym musi spełniać równanie stanu:

$$\rho + 3p < 0. \tag{11}$$

Niestety, żadne równanie stanu opisujące "zwykłą" materię nie spełnia powyższego warunku. W tym momencie na pomoc kosmologom przyszła teoria cząstek elementarnych. W roku 1981 A. Guth zajmujący się wówczas badaniem potencjału efektywnego pola skalarnego Higgsa w modelu GUT, zauważył, że przy odpowiednich warunkach tensor energii-pędu pola skalarnego może spełnić warunek (11). Wspólną cechą wszystkich modeli inflacyjnych jest właśnie pole skalarne [8], które umożliwia spełnienie warunku (11).

1.5.2 Rozwiązanie problemu horyzontu

Rozmiar horyzontu jest proporcjonalny do odwrotności stałej Hubble'a $1/H$, odległość między ustalonymi punktami, czyli fizyczna odległość, rośnie jak a, zatem stosunek $a/(1/H) = (a\dot{a})/a = \dot{a}$, rośnie w czasie inflacji [1]. Tak więc punkty znajdujące się wewnątrz horyzontu mogą podczas inflacji wyjść poza horyzont i stać się przyczynowo nie związanymi. To rozwiązuje problem horyzontu, gdyż obszary nie połączone przyczynowo ze sobą, w czasie odłączenia się materii, były przed inflacją wewnątrz jednego horyzontu zdarzeń.

Jak widzimy, wystarczy by wszechświat na samym początku swojej ewolucji przeszedł fazę w której $\ddot{a} > 0$ i problemy standardowego modelu kosmologicznego zostają rozwiązane.

1.5.3 Stara inflacja

A. Guth w pracy [13] zaproponował pierwszy model, zwany dzisiaj modelem starej inflacji, który rozwiązywał problemy klasycznego modelu Wielkiego Wybuchu. Występuje tam pole skalarne Higgsa związane z łamaniem symetrii GUT. Potencjał pola Higgsa zmienia się z temperaturą, bowiem Guth przyją za najistotniejsze właśnie poprawki temperaturowe.

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\lambda\left(\phi^2 + \mu^2(T)\right)^2. \tag{12}$$

Powyżej temperatury krytycznej T_k przejścia fazowego, związanego z łamaniem symetrii GUT, potencjał ma jedno minimum, w którym $\phi = 0$. Poniżej tej temperatury pojawia się nowe minimum, które staje się stanem prawdziwej próżni z $\phi \neq 0$.

W scenariuszu Guth'a początkowo bardzo gorący wszechświat rozszerza się a pole Higgsa znajduje się w globalnym minimum $\phi = 0$. Gdy temperatura spada poniżej T_c,

[8] Może być więcej niż jedno pole skalarne.

wszechświat, a przynajmniej jego część, zostaje przechłodzona w stanie *fałszywej próżni* ($\phi = 0$). Energia potencjalna pola Higgsa w stanie fałszywej próżni determinuje wówczas tempo ewolucji wszechświata, który w okresie przechłodzenia rośnie eksponencjalnie - jest to tak zwana faza de Sitterowska. Okres inflacyjnej ekspansji kończy się, gdy pole Higgsa w przejściu fazowym łamiącym symetrię GUT przetunelowuje to stanu prawdziwej próżni.

Tak więc na tle de Sitterowskiej fazy pojawiają się krople fazy Friedmana - Robertsona - Walkera, które łączą się w jeden duży wszechświat FRW. Ciepło utajone przejścia fazowego (energia potencjalna stanu fałszywej próżni) wydziela się podczas zderzania się kropli FRW podgrzewając z powrotem wszechświat, który ewoluuje dalej zgodnie z modelem gorącego Wielkiego Wybuchu.

Jednak w modelu tym pojawia się problem - zwany *problemem perkolacji* - polegający na tym, że bardzo trudno jest kroplom FRW pojawiającym się na eksponencjalnie rosnącym tle de Sitterowskim[9] połączyć się w jeden duży wszechświat FRW. Również kolizje kropli FRW prowadzą do ogromnych niejednorodności w połączonym już dużym wszechświecie FRW, co oczywiście dyskwalifikuje ten model jako poprawny model fizyczny.

1.5.4 Nowa inflacja

Jednak droga, którą obrał Guth, okazała się słuszna i w niedługim czasie niezależnie Linde oraz Albrecht i Steinhardt zaproponowali zmodyfikowany model inflacyjny, który był pozbawiony obydwu niedogodności występujących w modelu Guth'a [7, 19]. Model ten nazywamy *nowym modelem inflacyjnym*. W modelu tym zakłada się, że istotną rolę odgrywają poprawki kwantowe. Dlatego też w modelu nowej inflacji korzysta się z jednopętlowego potencjału efektywnego pola Higgsa, który został znaleziony przez Colemana i Weinberga.

Potencjał ten ma globalne minimum dla $\phi \neq 0$, oraz dodatkowe minimum lokalne dla $\phi = 0$. Minimum lokalne w $\phi = 0$ istnieje dzięki niewielkiemu garbowi potencjału w pobliżu tego minimum [7]. Wielkość tego garbu zależy od temperatury.

Scenariusz modelu nowej inflacji jest następujący. Początkowo bardzo gorący wszechświat rozszerza się i pole utrzymywane jest przez garb potencjału w stanie fałszywej próżni. W miarę opadania temperatury zmniejsza się też garb podtrzymujący pole w lokalnym minimum. Gdy temperatura spada do wartości T_c garb praktycznie znika i pole Higgsa z łatwością przetunelowuje przez niewielką barierę zaczynając powolną ewolucję po niemal płaskim (w okolicach $\phi = 0$) potencjale, w kierunku globalnego minimum. Podczas procesu powolnego staczania się energia potencjalna praktycznie się nie zmienia i bąble nadal rozszerzają się eksponencjalnie. Jeżeli proces staczania będzie trwał odpowiednio długo to bąbel wzrośnie na tyle, że nasz cały wszechświat zmieści się wewnątrz pojedynczego bąbla inflacyjnego. W pobliżu globalnego minimum potencjał CW jest bardzo stromy i pole już bardzo szybko osiąga wartoś minimalną. Energia fałszywej próżni zostaje wypromieniowana w postaci cząstek podczas szybkich oscylacji pola Higgsa wokół stanu prawdziwej

[9] Natomiast krople FRW rosną potęgowo.

próżni.

Jak widzimy model ten jest wolny od problemów modelu starej inflacji. Posiada jednak własne: parametry potencjału muszą być ustalone z dużą dokładnością - co wskazuje na pewną nienaturalność modelu. Także fluktuacje powstałe podszas ewolucji pola ze stanu fałszywej próżni do stanu prawdziwej próżni okazują się być o wiele większe od obecnych ograniczeń obserwacyjnych.

1.5.5 Inflacja chaotyczna

Specyficzne wymagania co do kształtu potencjału w nowym modelu inflacyjnym sprawiały, że inflacja we wszechświecie byłaby bardzo szczególnym zjawiskiem, które mogło zajść jedynie w pewnej ograniczonej klasie teorii.

W roku 1983 Linde zaproponował model inflacyjny, który mógł być zrealizowany w szerokiej klasie teorii włączając w to model Weinberga - Salama oraz minimalny model SU(5) [18]. Model ten zwany modelem *inflacji chaotycznej* bazuje na naturalnym założeniu, że na samym początku ery Plancka ($t = t_{PL}$) wszechświat znajduje się w chaotycznym stanie kwantowym [18]. Pamiętając, że w epoce Plancka gęstość energii jest mniejsza od M_{PL}^4, widzimy, że w takim chaotycznym stanie kwantowym możemy oczekiwać, że pole skalarne może przyjąć dowolną wartość, o ile zachodzi $V(\phi) \leq M_{PL}^4$. Założenie to prowadzi do wniosku, że we wszechświecie istnieją lokalnie jednorodne domeny zawierające pole ϕ o dowolnych dozwolonych wartościach. W takich domenach pole ewoluuje według klasycznych równań ruchu.

W domenach w których $\phi_0 \gg M_{PL}$ prędkość z jaką zmieniają się pole ϕ oraz wartość potencjału $V(\phi)$ jest o wiele mniejsza niż tempo ekspansji wszechświata [19]:

$$\frac{\dot{\phi}}{\phi} \ll H, \quad \dot{H} \ll H^2.$$

Dzięki temu wszechświat, w okresie czasu $\Delta t \sim \frac{H}{\dot{H}} \gg \frac{1}{H}$, wygląda w przybliżeniu jak przestrzeń de Sittera. Wszechświat ekspanduje wówczas kwaziwykładniczo:

$$a(\Delta t) \approx a_0 e^{H \Delta t},$$

gdzie stała Hubble'a H zmienia się wolno w czasie według zależności [19]:

$$H(\phi(t)) = \frac{8\pi V(\phi(t))}{3M_{PL}^2}.$$

Epoka inflacyjna w tym scenariuszu kończy się podobnie jak w nowym modelu inflacyjnym szybkimi oscylacjami wokół stanu próżni.

W pracy [19] bardzo dokładnie przedyskutowany jest ten model dla szerokiej klasy potencjałów:

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{n!}\phi^n.$$

2 Otwartość wszechświata

W rozdziale tym przedstawimy argumenty przemawiające za tym, że wszechświat w którym żyjemy jest otwarty ($\Omega_0 < 1$). Wszystkie próby oszacowania obecnej wartość parametru gęstości Ω_0, bazujące na konkretnych danych obserwacyjnych, dają jego wartość mniejszą od jedynki.

2.1 Obserwacje materii świecącej

Z danych obserwacyjnych możemy wyznaczyć kształt funkcji jasności galaktyk ϕ, która jest zdefiniowana poprzez średnią liczbę galaktyk (dn) w jednostce objętości z jasnością mieszczącą się w przedziale od L do $L + dL$, związkiem

$$dn = \phi\left(\frac{L}{L_*}\right)\frac{dL}{L_*}, \tag{13}$$

gdzie L_* jest charakterystyczną jasnością galaktyki. Dokładniejsze omówienie, a także dodatkowe referencje, dotyczące kształtu funkcji ϕ wyznaczanego na podstawie obserwacji znajdują się w pracy [28].

Następnie wykorzystujemy związek między masą galaktyki M a jej jasnością L, wtedy przyjmując, że dla poszczególnych typów galaktyk stosunek M/L jest stały, możemy oszacować średnią gęstość materii świecącej przez uśrednienie po typach galaktyk wielkości:

$$\int_0^\infty L\phi\left(\frac{L}{L_*}\right)\frac{M}{L}\frac{dL}{L_*}. \tag{14}$$

Obliczona w ten sposób średnia gęstość materii świecącej ρ_{lum} po podzieleniu przez gęstość krytyczną $\rho_{kryt} = 1.88 \times 10^{-29}h^2\mathrm{g/cm^3}$, daje parametr gęstości [28]:

$$\Omega_{lum} < 0.006. \tag{15}$$

Powyższe oszacowanie nie uwzględnia jednak całej materii dającej wkład do całkowitej gęstości we wszechświecie, tak więc na jego podstawie nie można stwierdzić z całą pewnością, czy nasz wszechświat jest otwarty, płaski, czy zamknięty.

2.2 Dynamiczne oszacowania parametru gęstości Ω

Obserwując ruch rotacyjny galaktyk spiralnych oraz soczewkowatych odkryto, że prędkość obrotowa takich galaktyk jest funkcją odległości od osi obrotu. Zależność ta (tzw. *krzywa rotacji*) pozwala na oszacowanie masy takiej galaktyki. Przyjmując, że rozkład masy w tych galaktykach ma symetrię sferyczną, dostajemy z przyrównania sił dośrodkowej i grawitacyjnej zależność:

$$\frac{v^2(r)}{r} = \frac{GM(r)}{r^2} \Longrightarrow M(r) = \frac{v^2(r)r}{G}, \tag{16}$$

gdzie $M(r)$ to masa zawarta w kuli o promieniu r i o środku pokrywającym się ze środkiem rozkładu masy w galaktyce. Maksymalna odległość r dla jakiej potrafimy zmierzyć prędkość v daje nam oszacowanie na masę widocznej części galaktyki. Masy otrzymywane tą metodą mieszczą się w granicach $(10^9 - 10^{11})\, M_\odot$.

Do gromad galaktyk jako całości takiego rozumowania nie można przeprowadzić, ponieważ galaktyki wewnątrz gromady poruszają się w sposób chaotyczny, tak więc nie ma żadnej zależności w rozkładzie prędkości galaktyk. Obserwacje pozwalają nam na pomiar prędkości ruchu chaotycznego galaktyk w kierunku obserwacji. Możemy zatem wyznaczyć średni kwadrat jednej ze składowych prędkości galaktyk. Następnie dzięki temu, że przestrzeń jest izotropowa i rozkład prędkości we wszystkich kierunkach jest przypadkowy możemy oszacować średni kwadrat całkowitej prędkości:

$$\left\langle v^2 \right\rangle = 3 \left\langle v_r^2 \right\rangle . \tag{17}$$

Następnie stosuje się twierdzenie o wiriale do gromady jako całości. Bardzo często w literaturze pomija się fakt, iż gromady galaktyk nie do końca spełniają założenia twierdzenia o wiriale, które wymagają, by obiekt był stacjonarny i jego parametry nie zmieniały się w czasie. Charakterystyczny czas gromady, określony jako czas potrzebny do przebycia przez galaktykę odległości równej promieniowi gromady (R) wynosi: $t_h = \frac{R}{\sqrt{<v^2>}} \approx 10^9$ lat i jest dużo mniejszy od wieku gromad, tak więc twierdzenie o wiriale w pierwszym przybliżeniu można zastosować. Twierdzenie to mówi nam, że energia kinetyczna związana z ruchem chaotycznym (w naszym przypadku galaktyk) równa jest połowie energii potencjalnej oddziaływania między galaktykami. Tak więc można napisać w przybliżeniu równość:

$$M \left\langle v^2 \right\rangle \approx \frac{GM^2}{R} \Longrightarrow M \sim \frac{R \left\langle v^2 \right\rangle}{G}. \tag{18}$$

Oszacowane w ten sposób masy gromad galaktyk są rzędu $\sim 3{\times}10^{15} M_\odot$, jest to ponad rząd wielkości więcej od oszacowań, w których sumuje się masy wszystkich galaktyk świecących, które to dają wynik mniejszy od $10^{14} M_\odot$. Zatem jak widzimy oszacowania dynamiczne dają nam wartość $\Omega_{dyn} \sim 0.2$.

2.3 Pierwotna nukleosynteza

Okres tworzenia się lekkich pierwiastków we wczesnym wszechświecie nazywamy okresem *pierwotnej nukleosyntezy*. Zaczął się on około 10s od momentu Wielkiego Wybuchu, gdy temperatura wszechświata spadła do około $\sim 3 \times 10^9$K. Pierwszymi złożonymi jądrami atomowymi, które pojawiły się we wszechświecie były jądra deuteru ($D = {}^2_1H$). Jednak jądra deuteru są słabo związane i bardzo szybko ulegały rozpadowi w procesach dysocjacji [7]. Dopiero gdy temperatura we wszechświecie spadła poniżej 10^9K gęstość fotonów spada na tyle, że procesy fotodysocjacji przestają odgrywać kluczową rolę i stężenie jąder deuteru zaczyna się zwiększać [7]. Wtedy też zaczynają się reakcje jądrowe prowadzące do powstania trwałego izotopu helu ${}^4_2He$. Zachodzące wówczas reakcje można przedstawić w następujących cyklach:

$$p + p \to D + e^+ + \nu_e,$$

$$D + p \to {}^3_2He + \gamma,$$
$${}^3_2He + {}^3_2He \to {}^4_2He + p + p,$$

gdzie ν_e oznacza neutrino elektronowe. W drugim cyklu deuter powstaje wskutek bezpośredniej syntezy neutronu z protonem:

$$n + p \to D + \gamma,$$

$$n + D \to T + \gamma,$$
$$T \to {}^3_2He + e^- + \bar{\nu}_e,$$
$${}^3_2He + n \to {}^4_2He + \gamma,$$

gdzie T oznacza izotop wodoru zwany *trytem* ($T = {}^3_1H$), natomiast $\bar{\nu}_e$ - antyneutrino elektronowe.

Biorąc pod uwagę fakt, że nie istnieją trwałe izotopy pierwiastków o liczbach atomowych 5 i 8 oraz to, że energie jąder trytu i izotopów helu są zbyt małe na to, aby przełamać barierę kulombowską, widzimy, że z pierwiastków cięższych od helu w procesach pierwotnej nukleosyntezy mogły powstać jedynie w bardzo małych ilościach jądra izotopów litu i berylu (${}^7Li$, ${}^7Be$)[7].

Procesy termojądrowe pierwotnej nukleosyntezy zaczęły ustawać, gdy temperatura na skutek ekspansji wszechświata spadła do około 3×10^8K.

Ilość wyprodukowanych w procesach pierwotnej nukleosyntezy lekkich pierwiastków (szczególnie deuteru) jest czułą funkcją gęstości materii barionowej - czyli parametru Ω_b. Pomiary rozprzestrzenienia lekkich pierwiastków we wszechświecie wskazują, że obecna wartość parametru gęstości mieści się w granicach [28, 8]:

$$0.02 < \Omega_b < 0.06,$$

gdzie przyjęliśmy $h \equiv H_0/(100\text{km}\,\text{s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}) \approx 0.6$.

Parametry opisujące procesy pierwotnej nukleosyntezy pozwalają na odtworzenie wyników obserwacji. Fakt ten, o czym wspominaliśmy już we wstępie, jest jednym z większych sukcesów teorii Wielkiego Wybuchu.

Maksymalna wartość Ω_b jaką można otrzymać z analizy procesów pierwotnej nukleosyntezy wynosi $\Omega_b \approx 0.2$. Widzimy zatem, że pomiary rozprzestrzenienia lekkich pierwiastków we wszechświecie dają dodatkowe więzy na parametry teorii pierwotnej nukleosyntezy.

Przy założeniu, że cała materia we wszechświecie jest barionowa widzimy, że oszacowania wynikające z pierwotnej nukleosyntezy przemawiają na korzyść modelu otwartego wszechświata.

Jednak czułość procesów nukleosyntezy ze względu na całkowitą wartość parametru gęstości, który może zawierać w sobie choćby wkład od niezerowej stałej kosmologicznej: $\Omega = \Omega_b + \Omega_\Lambda$, jest niewielka, tak więc zwolennicy płaskości wszechświata mogą szukać pomocy ze strony stałej kosmologicznej Λ aby uzyskać wartość parametru gęstości $\Omega = 1$.

2.4 Inne metody szacowania parametru gęstości Ω

Powyżej wymienione trzy sposoby określenia parametru Ω są w pewnym sensie nie pełne, gdyż albo dotyczą wyłącznie świecącej materii barionowej, albo wyłącznie materii barionowej (nukleosynteza), albo uwzględniają wpływ całej materii, lecz tylko w skalach nie większych niż gromady galaktyk (krzywe rotacji).

Jedną z kolejnych możliwości mogących przybliżyć nas do rozwiązania zagadki geometrii wszechświata jest badanie soczewek grawitacyjnych. Tak zwane soczewki grawitacyjne rzeczywiście wzmacniają obraz bardzo odległych obiektów emitujących fotony. Jeżeli na drodze fotonów od źródła do obserwatora znajduje się obiekt o dużej masie (galaktyka, gromada galaktyk) to początkowo rozbieżna wiązka może zostać częściowo uzbieżniona - dzięki zakrzywianiu torów ruchu fotonów w polu grawitacyjnym "soczewki" - wzmacniając tym samym obraz rejestrowany przez obserwatora, który widzi coś w rodzaju pierścienia[10] wokół "rzucającej cień" soczewki. Zjawisko to pozwala na rejestrowanie nawet tak odległych obiektów, których bez soczewkowania nie moglibyśmy zarejestrować - ze względu na ograniczoną czułość przyrządów. Przeprowadzane od pewnego czasu obserwacje takich soczewek, nie są jeszcze na tyle dokładne by rostrzygnąć sprawę wartości Ω. Wartość $\Omega = 1$ jest na samej granicy dopuszczalnych, przez obserwacje soczewek, wartości Ω.

Jednak najbardziej miarodajne wyniki można uzyskać dzięki obserwacji anizotropii temperatury promieniowania reliktowego. Porównując obliczenia teoretyczne z zebranymi dotąd danymi obserwacyjnymi możemy powiedzieć jedno: przewidywania płaskiego model wszechświata złożonego wyłącznie z barionów (bez stałej kosmologicznej) są całkowicie niezgodne z obserwowaną anizotropią. Natomiast w granicach błędów obserwacyjnych jak i teoretycznych poprawne przewidywania dają modele [27]:

- otwarty, z:
$$\Omega_b \approx 0.3, \quad \Omega_\Lambda \approx 0, \quad \Omega = \Omega_b + \Omega_\Lambda < 1,$$
- płaski, z:
$$\Omega_b \approx 0.3, \quad \Omega_\Lambda \approx 0.7, \quad \Omega = \Omega_b + \Omega_\Lambda = 1.$$

[10] Pierścienie te noszą nazwę *pierścieni Einsteina*.

Pojawiają się nawet głosy, że model płaski dokładniej odzwierciedla wyniki obserwacyjne. Jednak dopóki nie uda się uzyskać dokładniejszych pomiarów anizotropii nie możemy wydawać ostatecznych sądów.

Miejmy nadzieję, że planowane na najbliższe lata pomiary anizotropii temperatury promieniowania reliktowego (eksperymenty *PLANCK* i *MAP* [39, 40]) pozwolą nam odpowiedzieć na pytanie w jakim wszechświecie żyjemy.

3 Inflacja hybrydowa

W rozdziale tym opiszemy model inflacyjny z trzema polami skalarnymi, których ewolucja pozwala na powstanie otwartego wszechświata wewnątrz pojedynczego bąbla inflacyjnego. Ściślej rzecz biorąc model, który tu opiszemy [11, 20, 22, 21] prowadzi do powstania nieskończenie wielu otwartych wszechświatów z wszystkimi możliwymi wartościami parametru Ω z przedziału od 1 do 0.

Model ten nosi nazwę *inflacji hybrydowej*, gdyż jest to w istocie hybryda kilku modeli inflacyjnych. Najważniejszy jest tu okres powolnej ewolucji jednego z pól zachodzący już wewnątrz uformowanego bąbla. Pole to w literaturze zwane jest inflatonem [19], a mechanizm zajścia tej fazy inflacji jest identyczny jak w przypadku chaotycznej inflacji opisanej w rozdziale 1.5.5.

Działanie w tym modelu jest następujące:

$$S = \int \left\{ -\frac{M_{PL}^2}{16\pi} R + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma + \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi \right) + V(\phi, \sigma, \psi) \right\} \sqrt{-g} d^4 x, \quad (19)$$

gdzie R to skalar krzywizny, g wyznacznik tensora metrycznego, M_{PL} masa Plancka, ϕ, σ, ϕ -pola skalarne występujące w modelu, a potencjał $V(\phi, \sigma, \psi)$ ma postać:

$$V(\phi, \sigma, \psi) = \frac{g^2}{2} \phi^2 \sigma^2 + \frac{M^2 \sigma^2}{2} - \alpha M \sigma^3 + \frac{\alpha^2 \sigma^4}{4} + V_0 + \frac{h^2}{2} \phi^2 \psi^2 + \frac{1}{4\beta^2} \left(M_2^2 - \beta^2 \sigma^2 \right)^2, \quad (20)$$

gdzie $g, M, \alpha, V_0, h, \beta, M_2$ to stałe definjujące model.

Globalne minimum tego potencjału znajduje się w punkcie :

$$\phi_m = 0, \quad \sigma_m = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \frac{M}{\alpha}, \quad \psi_m = \frac{M_2}{\beta}. \quad (21)$$

Stała V_0 została tak dobrana, by wartość potencjału w tym punkcie była równa zero:

$$V(\phi_m, \sigma_m, \psi_m) = 0, \quad (22)$$

dostajemy stąd:

$$V_0 \equiv \frac{11 + 5\sqrt{5}}{8} \frac{M^4}{\alpha^2} \approx 2.77 \frac{M^4}{\alpha^2}. \quad (23)$$

Pozostałe wyrazy występujące we wzorze na potencjał (20) będą omawiane w dalszej części pracy.

3.1 Pierwszy etap

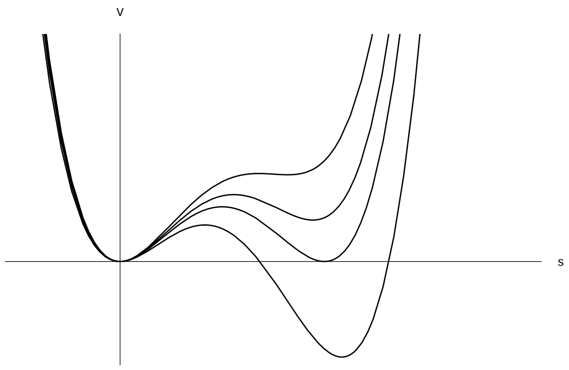
Dzięki oddziaływaniu pola ϕ z dwoma pozostałymi polami wartość inflatonu ϕ wpływa na stany próżni zarówno pola σ jak i pola ψ. Dla dużych wartości pola ϕ stan $\sigma = 0$ jest jedynym minimum potencjału w kierunku pola σ i podobnie stan $\psi = 0$ jest jedynym minimum w kierunku ψ. Ewolucję pól w naszym modelu zaczynamy właśnie ze stanu $\sigma = \phi = 0$.

Stany $\sigma = \psi = 0$ przestają być stanami próżni dla odpowiednich wartości pola ϕ:

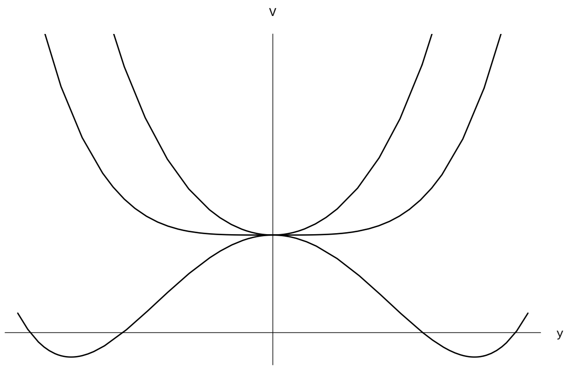
- dla $\phi > \frac{M}{g}$, drugie minimum w kierunku σ, które pojawiło się przy trochę większych wartościach ϕ (dokładniej o tym napiszemy w dalszej części pracy), staje się głębsze niż minimum w $\sigma = 0$ (rys.1.a),
- dla $\phi > \frac{M_2}{h}$, punkt $\psi = 0$ staje się lokalnym maksimum a minimum pojawia się w innym miejscu $\psi \neq 0$ (rys.1.b).

W tym modelu nowa próżnia w kierunku σ powinna pojawić się dla większych wartości pola ϕ niż próżnia w kierunku ψ. Żądanie to narzuca warunek na parametry teorii, mianowicie:

$$\frac{M}{g} > \frac{M_2}{h}. \tag{24}$$



Rys 1.a. Przekrój potencjału $V(\phi, \sigma, \psi)$ wzdłuż pola σ dla różnych wartości pola ϕ.



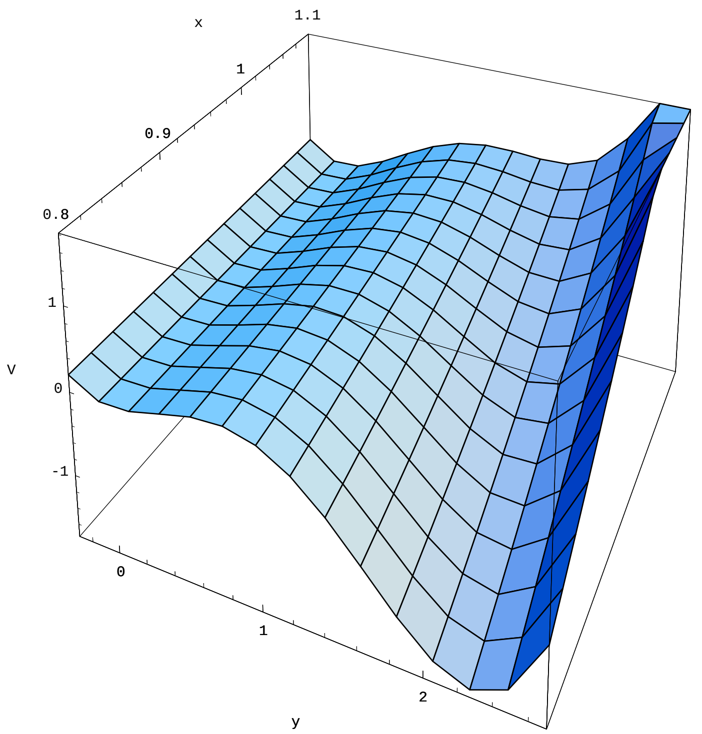
Rys 1.b. Przekrój potencjału $V(\phi, \sigma, \psi)$ wzdłuż pola ψ dla różnych wartości pola ϕ.

Do momentu, gdy wartość pola ϕ jest mniejsza od M_2/h, czyli do momentu, gdy stan $\psi = 0$ jest ciągle stanem prawdziwej próżni i pole ψ znajduje się w nim nie zmieniając swojej wartości, możemy na chwilę zapomnieć o istnieniu pola ψ. Tak więc na tym etapie rozważań mamy do czynienia z uproszczonym modelem, w którym występują dwa pola skalarne ϕ i σ z potencjałem, który dla $\psi = 0$ przybiera postać:

$$V(\phi, \sigma, \psi = 0) \equiv V(\phi, \sigma) = \frac{g^2}{2}\phi^2\sigma^2 + \frac{M^2}{2}\sigma^2 - \alpha M \sigma^3 + \frac{\alpha^2}{4}\sigma^4 + V_0 + \frac{M_2^4}{4\beta^2}. \tag{25}$$

Pierwszy człon w potencjale (25) jest członem opisującym odziaływanie między polami σ i ϕ, kolejny to człon masowy pola σ, dwa następne opisują samooddziaływanie pola σ. Jak widać pole ϕ jest bezmasowe. Wyraz V_0 został tak dobrany (23) by wartość potencjału (25) w globalnym minimum była równa zeru. Ostatni człon jest związany z wartością próżniową pola ψ.

Przyjrzyjmy się dokładniej właściwościom tego potencjału. Dzięki bezmasowości pola ϕ widzimy, że dla stanów znajdujących się w minimum potencjału z $\sigma = 0$, kierunek na powierzchni $V(\phi, \sigma)$ wzdłuż pola ϕ jest płaski (rys.2). Innymi słowy wartość energii potencjalnej jest niezależna od wartości pola ϕ. Jest to bardzo ważne spostrzeżenie, gdyż mówi nam, że obszary we wszechświecie, gdzie $\sigma = 0$, mogą być podzielone na mniejsze obszary, wewnątrz których pole ϕ ma różne wartości.



Rys.2 Potencjał $V(\phi, \sigma)$. Widoczny jest płaski kierunek wzdłuż pola ϕ ($x \equiv \phi\frac{g}{M}$) dla wartości pola $\sigma \equiv y\frac{M}{\alpha} = 0$. Wartość potencjału wyrażona jest w jednostkach $\frac{M^4}{\alpha^2}$ z pominięciem wyrazu stałego $V_0 + \frac{M_2^4}{4\beta^2}$.

Od tego momentu mówiąc o minimum potencjału $V(\phi, \sigma)$ mamy na myśli minimum wzdłuż σ, czyli minimum $V(\phi, \sigma)$ przy ustalonym ϕ. Dla wartości ϕ większych niż $\phi_p = \frac{\sqrt{5}M}{2g}$, minimum w $\sigma = 0$ jest jedynym minimum $V(\phi, \sigma)$ (rys.1.a). Dla wartości ϕ mniejszych od ϕ_p pojawia się drugie minimum, które wraz z coraz mniejszymi wartościami ϕ staje się coraz głębsze, by przy wartości $\phi = \phi_k = \frac{M}{g}$ zrównać się z minimum przy $\sigma = 0$ (rys.1.a). Ostatecznie widzimy, o czym wspominaliśmy już wcześniej, że dla $\phi < \phi_k$ nowe minimum jest głębsze niż to z $\sigma = 0$ (rys.1.a), tak więc w tym przypadku próżnią staje się minimum z $\sigma \neq 0$. Zatem w obszarach we wszechświecie, gdzie $\sigma = 0$, oraz pole $\phi < \phi_k$ będą się pojawiały bąble fazy z $\sigma \neq 0$, ponieważ, dzięki kwantowemu zjawisku tunelowania powstaje możliwość pojawienia się pola σ w stanie prawdziwej próżni [22, 21, 20]. Dzięki temu, że wewnątrz tak powstałego bąbla fazy $\sigma \neq 0$ będzie trwała inflacyjna ekspansja nie pojawia się tutaj problem perkolacji bąbli, jaki mieliśmy w modelu starej inflacji, ponieważ cały wszechświat znajduje się wewnątrz pojedynczego bąbla. Dla wartości krytycznej pola $\phi = \phi_k = \frac{M}{g}$ drugie minimum pojawia się przy $\sigma = \sigma_k = \frac{2M}{\alpha}$.

3.2 Drugi etap

Drugi etap inflacji zaczyna się już wewnątrz bąbla. Dzięki niezerowej wartości pola σ możemy powiedzieć (patrz 25), że pole ϕ efektywnie otrzymało masę równą $m_\phi = g\sigma$. Z warunków dyskutowanych powyżej widzimy, że jest ona ograniczona od dołu, mianowicie: $m_\phi \geq g\sigma_k = \frac{2gM}{\alpha}$. W całym drugim etapie inflacji ewolucją wszechświata wewnątrz bąbla kieruje pole ϕ, które podobnie jak w przypadku inflacji chaotycznej stacza się swobodnie w kierunku globalnego minimum potencjału (25), które znajduje się w punkcie $(\phi_{min} = 0, \sigma_{min} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}\frac{M}{\alpha})$. Wraz z ewolucją pola ϕ w kierunku wartości $\phi = 0$ masa m_ϕ powoli rośnie, co jest spowodowane nieznacznym przesuwaniem się minimum potencjału w kierunku większych wartości pola σ (odchylenie "rynienki" na rys.2). Zobaczmy w jakim stopniu masa pola ϕ zmieni się w ciągu całej ewolucji na drodze od $\phi = \phi_k$ do $\phi = 0$. Jest to zarazem maksymalna możliwa zmiana wartości masy pola ϕ. Na samym początku masa wynosi, jak już wcześniej wspominaliśmy $m_\phi = \frac{2gM}{\alpha}$, natomiast na końcu drogi $m_\phi = g\sigma_m = \frac{3+\sqrt{5}}{2}\frac{M}{\alpha}$. Stosunek tych dwóch wielkości wynosi:

$$\frac{m_\phi(\text{koniec})}{m_\phi(\text{poczatek})} = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \approx 1.3. \tag{26}$$

Jak widzimy z (26) zależnie od początkowej wartości pola ϕ, masa pola m_ϕ w ciągu całego drugiego etapu inflacji wzrośnie o wartość mieszczącą się w przedziale od 0% do 30% wartości początkowej. Na tym etapie ewolucja pola σ jest ściśle związana z ewolucją pola ϕ, związkiem:

$$\sigma = M\frac{3 + \sqrt{5 - 4\frac{\phi^2 g^2}{M^2}}}{2\alpha}, \tag{27}$$

jest to bowiem taka wartość pola σ, która przy ustalonym $\phi > M/g$ minimalizuje potencjał (25). W momencie, gdy pole ϕ osiągnie wartość $\phi_{end} = \frac{M_2}{h}$, fluktuacje pola ψ nie znajdującego się już wtedy w stanie stabilnej równowagi (rys.1b), zainicjują przejście fazowe związane z łamaniem symetrii GUT, które to kończy drugi, ostatni etap inflacji. Podczas owego przejścia fazowego, pola ϕ i σ bardzo szybko osiągają swoje minimum ($\phi_{min} = 0, \sigma_{min} = \frac{M(3+\sqrt{5})}{2\alpha}$), a także pole ψ, dotychczas statyczne przechodzi do stanu nowej prawdziwej próżni $\psi = \frac{M_2}{\beta}$. Czas zajścia tego przejścia fazowego zależy od krzywizny potencjału w kierunku ψ oraz tempa ekspansji wszechświata w trakcie drugiej fazy inflacyjnej[11]. Jeżeli

$$H \ll M, \tag{28}$$

wtedy odbywa się to niemal natychmiastowo. W naszym modelu, w którym bardzo ważna jest wielkość przyrostu czynnika skali w czasie inflacji (ze względu na zapewnienie otwartości wszechświata), taki dodatkowy wzrost wszechświata podczas wolno zachodzącego przejścia fazowego nie jest korzystny, tak więc będziemy chcieli by parametry modelu spełniały warunek (28).

Po tym dosyć długim opisie jakościowym, możemy przystąpić do konkretnych wyliczeń. Zdefiniujmy współczynnik[12] określający przyrost czynnika skali podczas trwania epoki inflacyjnej równaniem:

$$N \equiv \int_{t_p}^{t_k} H(t)dt, \tag{29}$$

gdzie t_p i t_k to odpowiednio czas rozpoczęcia i zakończenia epoki inflacyjnej. Rozmiary bąbla podczas inflacji wzrosły więc o czynnik e^N, możemy zatem napisać:

$$l(t_k) = e^N l(t_p), \tag{30}$$

gdzie $l(t_p)$ i $l(t_k)$ są rozmiarami bąbla przed i po okresie inflacyjnej ekspansji.

W momencie utworzenia się bąbla pole ϕ w jego wnętrzu ma wartość $\phi(t_p) \equiv \phi_0 \leq M/g$, natomiast w momencie zakończenia się inflacji jego wartość wynosi $\phi(t_k) \equiv \phi_1 = M_2/h$. Tak więc wartość współczynnika N zmienia się wraz z wartością początkową ϕ_0 i zależnie od tej wartości, wewnątrz bąbla powstanie wszechświat z $\Omega \in (0,1)$. Dyskusja dotycząca prawdopodobieństwa nukleacji bąbli przy odpowiednich wartościach początkowych pola ϕ, czyli bąbli produkujących wszechświaty z odpowiednim parametrem gęstości Ω, przeprowadzona została w pracach [22, 21, 20]. Nie wnikając głębiej w to zagadnienie okazuje się, że dla wartości $\phi > M/g$ bąble w ogóle nie powstają, gdyż minimum w $\sigma \neq 0$ jest płytsze niż to w $\sigma = 0$ albo w ogóle go nie ma (rys.1.a.), natomiast im to minimum jest głębsze tym bardziej rośnie prawdopodobieństwo nukleacji. Najistotniejszy jest jednak

[11] Krzywiznę w kierunku ψ określa wartość współczynnika M, natomiast tempo ekspansji zdeterminowane jest wartością stałej Hubble'a w danym okresie.

[12] Ang. "number of e-folds".

fakt, iż model ten dopuszcza powstanie wszechświata, który w kilkanaście miliardów lat po zakończeniu inflacji ma parametr gęstości Ω mniejszy od 1 [22, 21, 20].

W trakcie inflacyjnej ekspansji wewnątrz bąbla potencjał modelu (20) przybiera postać:

$$V(\phi,\sigma,\psi=0)=\frac{m^2(\sigma)}{2}\phi^2+\frac{M^2}{2}\sigma^2-\alpha M\sigma^3+\frac{\alpha^2}{4}\sigma^4+V_0+\frac{M_2^4}{4\beta^2}, \tag{31}$$

gdzie $m^2(\sigma)\equiv\sigma^2g^2$ oraz σ wiąże się z wartością pola ϕ wzorem (27). Niezerowa wartość pola σ nadała bezmasowemu polu ϕ masę, która jak wcześniej pokazywaliśmy (26) nieznacznie rośnie w trakcie ewolucji bąbla.

Równania ruchu dla pól $\phi i \sigma$ oraz równanie ewolucji czynnika skali wewnątrz bąbla wyglądają następująco:

$$\ddot{\phi}+3H\dot{\phi}=-m^2(\sigma)\phi, \tag{32}$$

$$\ddot{\sigma}+3H\dot{\sigma}=-M^2\sigma+3\alpha M\sigma^2-\alpha\sigma^3, \tag{33}$$

$$H^2=\frac{8\pi}{3M_{PL}^2}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2+\frac{1}{2}\dot{\sigma}^2+V(\phi,\sigma)\right)+\frac{1}{a^2}, \tag{34}$$

pamiętając o zależności (27), możemy bez straty ogólności rozważań ograniczyć układ równań tylko do dwóch skrajnych równań (32,34).

Dla wolno ewoluującego pola ϕ:

$$\dot{\phi}^2\ll V(\phi,\sigma),\qquad \ddot{\phi}\ll\frac{\partial V(\phi,\sigma)}{\partial\phi}, \tag{35}$$

tak jak to mieliśmy w przypadku modelu inflacji chaotycznej (patrz rozdz.1.5.5), równania (32 i 34) redukują się do postaci:

$$3H\dot{\phi}=-m^2(\sigma)\phi, \tag{36}$$

$$H^2-\frac{1}{a^2}=\frac{8\pi}{3M_{PL}^2}V(\phi,\sigma). \tag{37}$$

Jeżeli parametry modelu spełniają ograniczenia:

$$\frac{M_2^4}{\beta^2}\gg\frac{8M^4}{\alpha^2}, \tag{38}$$

to wartość potencjału (31) jest zdominowana przez wartość próżniową pola ψ (człon $\frac{M_2^4}{4\beta^2}$). Ponadto człon $1/a^2$ w równaniu (37) można pominąć, gdyż dzięki ekspansji bąbla ($\dot{a}>0$) i dużej wartości potencjału $V(\phi,\sigma)$ w trakcie tej ewolucji rozwiązania równań (36,37) bardzo szybko dążą do swojej asymptotycznej granicy kwaziwykładniczej ekspansji [19]. Stała Hubble'a w tym okresie zdominowania jest więc przez wartość próżniową pola ψ:

$$H^2 = \frac{2\pi M_2^4}{3\beta^2 M_{PL}^2}. \tag{39}$$

Ostatecznie możemy więc powiedzieć, że czynnik skali w trakcie inflacji, czyli w okresie, gdy pole ϕ ewoluowało od wartości początkowej $\psi(t_p) \leq M/g$ do wartości kończącej okres powolngo staczania $\psi(t_k) = M_2/h$, rósł zgodnie z prawem:

$$a(t) = a(t_p)e^{Ht}, \tag{40}$$

gdzie oczywiście H jest określone wzorem (39). Dokładne rozwiązanie, uwzględniające człon krzywiznowy podane jest w dodatku (A.2).

3.3 Wartość parametru gęstości Ω

Policzmy teraz zdefiniowany wcześniej (29) współczynnik N. By otrzymać wszechświat otwarty, który miliardy lat po zakończeniu epoki inflacji ma parametr $\Omega \sim 0.3$, to współczynnik N powinien mieć wartość w granicach $55 - 65$. Zgodnie z definicją:

$$N = \int_{t_p}^{t_k} H(t)dt. \tag{41}$$

Wygodnie będzie zamienić całkowanie względem t na całkowanie względem pola ϕ, gdyż znamy jego wartości krańcowe (wartość początkowa ograniczona od góry może służyć do kontrolowania wartości współczynnika N). Mamy zatem:

$$N = \int_{t_p}^{t_k} H dt = \int_{\phi(t_p)}^{\phi(t_k)} H\frac{dt}{d\phi}d\phi = \int_{\phi_p}^{M_2/h} \frac{H}{\dot{\phi}}d\phi = \int_{\phi_p}^{M_2/h} \frac{H^2}{H\dot{\phi}}d\phi. \tag{42}$$

Teraz korzystając z równań (36,37) możemy napisać:

$$N = -3\int_{\phi_0}^{M_2/h} \frac{\frac{2\pi M_2^4}{3\beta^2 M_{PL}^2}}{m^2\phi}d\phi, \tag{43}$$

pamiętamy ponadto, że masa m^2 jest funkcją σ poprzez równość $m^2 = g^2\sigma^2$, natomiast σ wiąże się z ϕ zależnością (27). Wprowadzając bezwymiarową zmienną

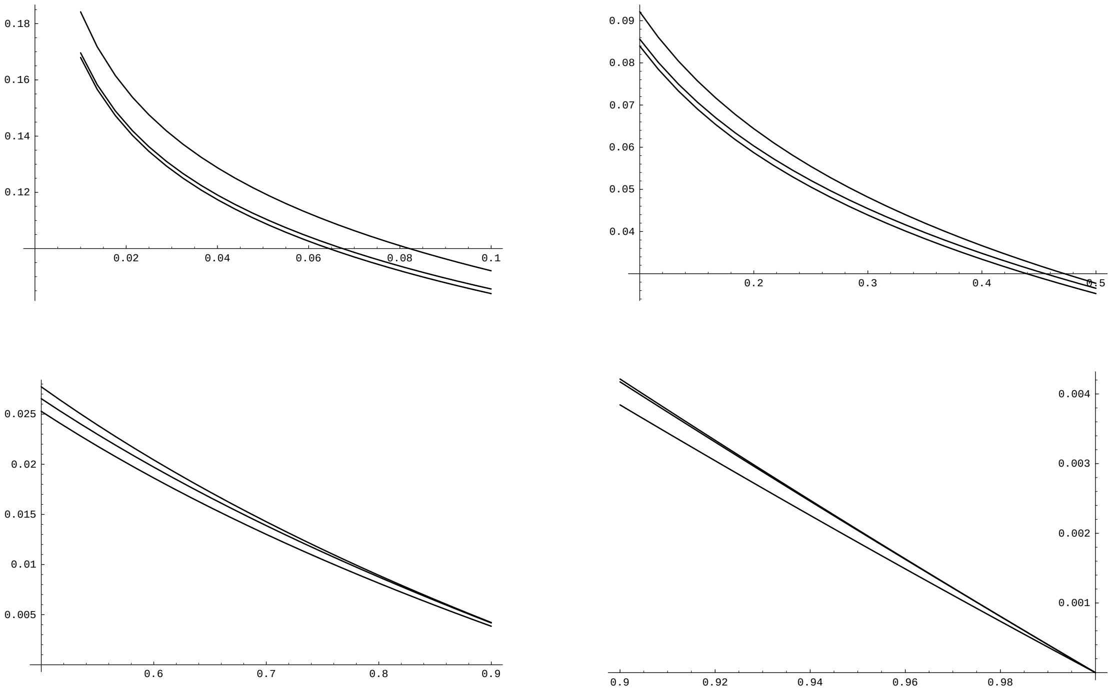
$$x \equiv \frac{g}{M}\phi, \tag{44}$$

dostajemy następujące wyrażenie na N

$$N = \frac{8\pi M_2^4 \alpha^2}{M_{PL}^2 M^2 g^2 \beta^2}\int_{x_1}^{x_0} \frac{dx}{x\left(3+\sqrt{5-x^2}\right)^2}, \tag{45}$$

gdzie $x_0 \equiv \frac{g}{M}\phi_0$, $x_1 \equiv \frac{M_2 g}{Mh}$. Obliczmy wartość współczynnika N dla $\phi_0 = M/g$ ($x_0 = 1$) - jest to minimalna wartość ϕ_0, dla której może pojawić się bąbel inflacyjny. Otrzymana wartość będzie zatem maksymalną osiągalną wartością współczynnika N dla danych parametrów modelu. Wynik całkowania w zależności od parametru x_1 przedstawiony jest na (rys.4). Na tym samym wykresie przedstawiamy także oszacowania od dołu i od góry, które otrzymaliśmy podstawiając w miejsce zmiennej masy $m(\phi)$ jej wartości:

- na początku drugiego etapu inflacji ($\phi = M/g$)
- oraz w stanie prawdziwej próżni ($\phi = 0$).



Rys.3 Na pionowej osi mamy wynik całkowania oraz oszacowania od góry i od dołu, na osi poziomej wartość parametru x_1.

Błąd względny przy takich oszacowaniach nie przekracza 5 %. Dzięki temu możemy podać jawną postać współczynnika N w niezbyt skomplikowanej postaci:

$$N = \frac{8\pi M_2^4 \alpha^2}{M_{PL}^2 M^2 g^2 \beta^2} \frac{1}{b} \ln\left(\frac{\mathrm{Mh}}{\mathrm{M_2 g}}\right), \tag{46}$$

gdzie b to bezwymiarowy współczynnik, którego wartość mieści się w granicach

$$25 < b < (3 + \sqrt{5})^2 \approx 27.4. \tag{47}$$

Jeżeli chcemy otrzymać wszechświat, który obecnie jest otwarty i posiada parametr gęstości rzędu $\Omega \sim 0.3$, to ze związku (4) widzimy, że pod koniec epoki inflacji = początek ery zdominowanej przez promieniowanie ($z \sim T_{GUT}/2.7K \sim 3.7\times10^{28}$) parametr Ω spełnia zależność:

$$\frac{1-\Omega(t_k)}{\Omega(t_k)} = \frac{7}{3}\frac{1}{(1+10^{28})^2} \sim 10^{-57} \Longrightarrow 1-\Omega(t_k) \sim 10^{-57}. \tag{48}$$

Czyli w momencie zakończenia ery inflacji gęstość wszechświata powinna być zbliżona do gęstości krytycznej z dokładnością rzędu $\sim 10^{-57}$. Z równań Friedmana dostajemy:

$$1-\Omega(t) = \frac{1}{(H(t)a(t))^2}. \tag{49}$$

Jeżeli na końcu epoki inflacyjnej $(1-\Omega)$ ma być rzędu $\sim 10^{-57}$, to na początku tej epoki, czyli w naszym modelu warunki początkowe dotyczące gęstości wszechwiata wyglądają następująco:

$$1-\Omega(t_p) = \frac{1}{(Ha(t_p))^2} = \frac{1}{(Ha(t_k)e^{-N})^2} = \frac{1}{(Ha(t_k))}e^{2N} \sim 10^{-57}e^{2N}. \tag{50}$$

Żeby otrzymać otwarty wszechświat to parametr Ω na początku inflacyjnej ekspansji musi oczywiście spełniać:

$$1-\Omega(t_p) < 1. \tag{51}$$

Łącząc warunki (50 i 51) dostajemy ograniczenie od góry na wartość współczynnika N:

$$10^{-57}e^{2N} < 1 \Longrightarrow N < \frac{1}{2}\ln\left(10^{57}\right) \sim 65.6. \tag{52}$$

Liczba ta nie może też być zbyt mała, ponieważ problem płaskości pozostałby wówczas nierozwiązany. Tak więc by rozważany tu model był poprawnym modelem kosmologicznym musimy otrzymać następującą wartość współczynnika N:

$$N = 60 \pm 5. \tag{53}$$

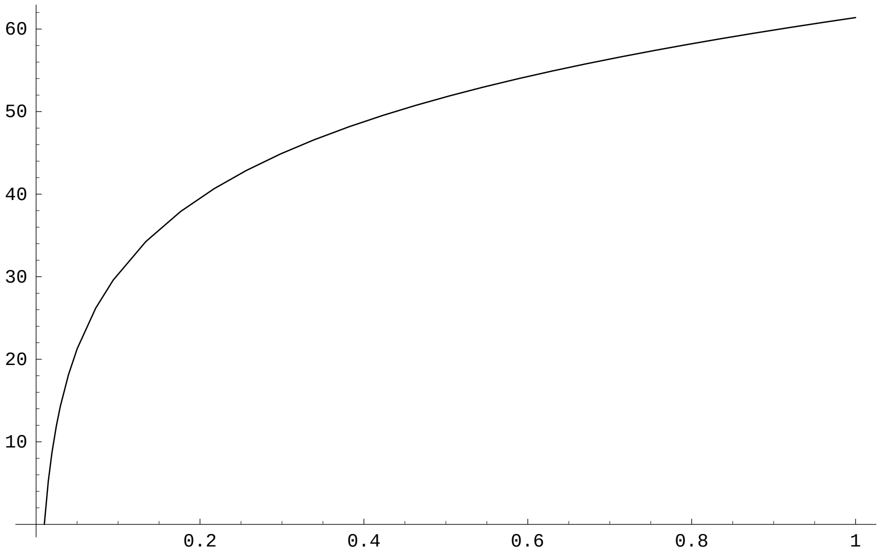
Musimy jeszcze określić parametry teorii, które spełniają warunki (24,28,38,53). Jeżeli wybierzemy:

M	M_2	g	h	α^2	β^2
$3\times10^{-4}M_{PL}$	$2M$	10^{-3}	0.2	0.1	0.01

to wszystkie warunki będą spełnione. Maksymalna liczba e-cykli dla takich parametrów wynosi:

$$N_{max} \approx 61,4. \tag{54}$$

Na rysunku 4. przedstawiona jest liczba e-cykli N w zależności od momentu nukleacji bąbla. Widzimy, że dla szerokiego zakresu wartości ϕ_0 otrzymamy wewnątrz bąbla wszechświat z parametrem gęstości $\Omega \sim 0.3$.



Rys.4 Pionowa oś - liczba e-cykli N, pozioma oś - wartość pola σ w momencie nukleacji bąbla, w jednostkach $\frac{M}{\alpha}$.

4 Fale grawitacyjne

Falami grawitacyjnymi nazywamy takie zaburzenia metryki, które nie wywołują zmian rozkładu gęstości materii ani ruchu cząstek [7]. W modelach kosmologicznych reprezentowane są one za pomocą małych zaburzeń metryki Robertsona - Walkera. W przypadku modelu otwartego wszechświata - jak pokazaliśmy w dodatku A.3 - przybierają one postać:

$$ds^2 = dt^2 - \left[a^2(t)\gamma_{\alpha\beta} - h_{\alpha\beta}\right] dx^\alpha dx^\beta, \tag{55}$$

gdzie $\gamma_{\alpha\beta}$ to metryka w przestrzeni Σ[13] określona równaniem (168). Współrzędne przestrzenne x^α to oczywiście bezwymiarowe współrzędne sferyczne (r, θ, ϕ) zdefiniowane w dodatku A.1. Tensor $h_{\alpha\beta}$ jest ponadto bezśladowy: $h_\alpha{}^\alpha = 0$, oraz ma znikającą dywergencję: $\nabla_\alpha h_\beta{}^\alpha = h_\beta{}^\alpha{}_{;\alpha} = 0$.

Powyższe warunki sprawiają, iż pozostają jedynie dwie niezależne składowe $h_{\alpha\beta}$ - odpowiadają one dwóm możliwym stanom polaryzacji fal grawitacyjnych.

Równanie falowe, które w przypadku modelu otwartego wszechświata otrzymaliśmy w dodatku (A.3) można zapisać w postaci:

$$\ddot{h}_\alpha{}^\beta + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{h}_\alpha{}^\beta - \frac{2}{a^2}h_\alpha{}^\beta - \frac{1}{a^2}\,{}^\Sigma\Delta h_\alpha{}^\beta = 0, \tag{56}$$

gdzie ${}^\Sigma\Delta$ jest operatorem Laplace'a w przestrzeni Σ. W powyższym równaniu możemy rozseparować czas od współrzędnych przestrzennych:

$$h_\alpha{}^\beta(t, \alpha, \theta, \phi) \equiv h(t)\Psi_\alpha{}^\beta(\alpha, \theta, \psi) \equiv \frac{\mu(t)}{a(t)}\Psi_\alpha{}^\beta(\alpha, \theta, \psi), \tag{57}$$

gdzie nowa współrzędna α zdefiniowana jest równaniem $r \equiv \sinh\alpha$ (patrz dodatek A.4), funkcja $\mu(t)$ nazywana jest amplitudą fali a funkcje $\Psi_\alpha{}^\beta$ to zdefiniowane w dodatku A.4 tensorowe, hiperboliczne funkcje harmoniczne numerowane czterema "liczbami kwantowymi":

$$p > 0,$$

$$l = 2, 3, 4, \ldots,$$

$$m = -l, -l+1, \ldots, l-1, l,$$

oraz liczbą określającą stan polaryzacji fali:

$$K = K_+, K_\times.$$

Pełną klasyfikację hiperbolicznych, tensorowych funkcji harmonicznych można znaleźć w pracy [37].

[13] Patrz dodatek (A.3).

Ogólne rozwiązanie równania (56) można zapisać w następującej postaci:

$$h_\alpha{}^\beta(\eta,\alpha,\theta,\phi) = \sum_{K=K_+}^{K_\times} \int_0^\infty dp \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left[A(K,p,l,m) \frac{\mu^p(\eta)}{a(\eta)} \Psi^{Kplm}{}_\alpha{}^\beta(\alpha,\theta,\phi) + h.c \right], \quad (58)$$

gdzie $A(K,p,l,m)$ to dowolne stałe zespolone, które po skwantowaniu stają się operatorami kreacji i anihilacji [25] oraz μ^p to amplituda fourierowskiego modu fali odpowiadająca liczbie kwantowej p.

4.1 Kwantowanie fal grawitacyjnych

Parker i Ford w pracy [9] zauważyli, że równanie fal grawitacyjnych we wszechświecie Robertsona - Walkera jest analogiczne z równaniem ruchu bezmasowego pola skalarnego zapisanego w tej samej czasoprzestrzeni. Opierając się na tym spostrzeżeniu podali sposób kwantowania fal grawitacyjnych, który nie prowadzi do niekonsystencji z warunkiem cechowania narzuconym na zaburzenia metryki. Do zupełnej analogii z przypadkiem skalarnym potrzeba dwóch bezmasowych pól skalarnych - fale grawitacyjne mają bowiem dwa niezależne stopnie swobody odpowiadające dwóm możliwym stanom polaryzacji fali. Nie będziemy wchodzili w szczegóły tej procedury odsyłając jednocześnie czytelnika do literatury [9]; ograniczymy się jedynie do podania kilku faktów, które będą potrzebne w naszych dalszych rozważaniach.

Uogólniając notację stosowaną przez Lyth'a i Steward'a w przypadku płaskiego modelu [36], na przypadek czasoprzestrzeni z ujemną krzywizną, możemy zapisać ogólne rozwiązanie równania (56) w nieco odmiennej postaci niż (58), mianowicie:

$$\hat{h}_\alpha{}^\beta(\eta,\alpha,\theta,\phi) = \sum_{K=K_+}^{K_\times} \int_0^\infty dp \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{\hat{\mu}^{K,p,l,m}(\eta)}{a(\eta)} \Psi^{plmK}{}_\alpha{}^\beta(\alpha,\theta,\phi). \quad (59)$$

Odpowiedniość zapisu (58) z zapisem (59) łatwo jest dostrzec zauważając następującą równość:

$$\Psi^{K,p,l,m}{}_\alpha{}^\beta = \left(\Psi^{K,p,l,-m}{}_\alpha{}^\beta\right)^\dagger.$$

Daszek we wzorze (59) oznacza operator kwantowo - mechaniczny, natomiast $\hat{\mu}^{K,p,l,m}$ zdefiniowane jest następująco: [14]

$$\hat{\mu}^{K,p,l,m}(\eta) \equiv \mu^p(\eta)\hat{A}(K,p,l,m) + \bar{\mu}^p(\eta)\hat{A}^\dagger(K,p,l,-m), \quad (60)$$

gdzie $\mu^p(\eta)$ jest dowolnym rozwiązaniem równania (69), które normalizujemy w następujący sposób [9, 36]:

$$\mu^p \frac{d\bar{\mu}^p}{d\eta} - \frac{d\mu^p}{d\eta}\bar{\mu}^p = i. \quad (61)$$

[14] Oczywiście $\hat{h}^{Kplm} = \frac{\hat{\mu}^{Kplm}}{a}$.

powyższy warunek normalizacyjny możemy także przepisać dla funkcji $h^p = \frac{\mu^p}{a}$ (57):

$$h^p(\eta)\frac{d\bar{h}^p(\eta)}{d\eta} - \bar{h}^p(\eta)\frac{dh^p(\eta)}{d\eta} = \frac{i}{a^2(\eta)}. \tag{62}$$

Operatory anihilacji i kreacji $\hat{A}(K,p,m,l)$, $\hat{A}^\dagger(K,p,l,m)$ spełniają kanoniczne relacje komutacyjne

$$\left[\hat{A}(K,p,l,m), \hat{A}^\dagger(K',p',l',m')\right] = \delta(p-p')\delta_{KK'}\delta_{ll'}\delta_{mm'}, \tag{63}$$

$$\left[\hat{A}(K,p,lm), \hat{A}(K',p',l',m')\right] = \left[\hat{A}^\dagger(K,p,l,m), \hat{A}^\dagger(K',p',l',m')\right] = 0. \tag{64}$$

Stan próżni naszej przestrzeni Fock'a, $|0\rangle$ jest, jak zwykle, zdefiniowany równością:

$$\hat{A}(K,p,l,m)\,|0\rangle = 0. \tag{65}$$

Do kompletnego zdefiniowana przestrzeni Fock'a musimy się jeszcze zdecydować na wybór rozwiązania dla modów Fourierowskich $\mu^p(\eta)$, zdefiniowanych równaniem (60). Podobnie jak autorzy pracy [24] przyjmiemy tzw. konforemny warunek brzegowy dla stanu próżni pola opisującego grawitony (fale grawitacyjne), który mówi, że w początkowym okresie ewolucji zależność od czasu konforemnego η modów Fourierowskich μ^p dana jest przez człon:

$$\mu^p(\eta) \rightsquigarrow e^{-ip\eta}. \tag{66}$$

Widzimy tutaj analogię z członem $e^{-i\omega t}$, który w przestrzeni Minkowskiego reprezentuje dodatnio-energetyczne rozwiązanie równań teorii pola.

4.2 Analogia równania na amplitudę fali z równaniem klasycznego oscylatora harmonicznego

Wstawiając (57) do równania (56) i wykorzystując (211) otrzymujemy równanie na amplitudę fali $\mu(t)$:

$$\ddot{\mu}(t) + \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\dot{\mu}(t) + \left(\frac{p^2+1}{a^2(t)} - \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} - \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}\right)\mu(t) = 0. \tag{67}$$

Zapisując to równanie przy użyciu czasu konforemnego η (patrz równanie 124) otrzymujemy:

$$\mu''(\eta) + \left(p^2 + 1 - \frac{a''(\eta)}{a(\eta)}\right)\mu(\eta) = 0, \tag{68}$$

jak widać równanie to ma postać równania oscylatora harmonicznego z częstością zależną od czasu: $\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0$.

Wykorzystując jawną postać czynnika skali obliczoną w dodatku (A.2) (równanie 161) dostajemy:

$$1 - \frac{a''(\eta)}{a(\eta)} = \frac{1-\beta}{\beta}\frac{1}{\sinh^2\chi(\eta)},$$

gdzie zmienna χ zdefiniowana jest w dodatku (A.2) równaniem (160).

Równanie (68) wygląda wtedy następująco:

$$\mu''(\eta) + \left(p^2 + \frac{1-\beta}{\beta}\frac{1}{\sinh^2\chi(\eta)}\right)\mu(\eta) = 0. \tag{69}$$

Dalszą analizę tego równania przeprowadzimy osobno dla każdej z epok.

4.3 Epoka inflacyjna

Ogólne rozwiązanie na amplitudę fali w epoce inflacyjnej otrzymamy najłatwiej zapisując równanie (56) w języku funkcji $h(t) = \mu(t)/a(t)$ (patrz. równanie 57). Otrzymujemy wówczas:

$$\ddot{h}(t) + 3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\dot{h}(t) + \frac{p^2+1}{a^2(t)}h(t) = 0. \tag{70}$$

Przepisując to równanie przy użyciu czasu konforemnego η:

$$h''(\eta) + 2\frac{a'(\eta)}{a(\eta)}h'(\eta) + \left(p^2+1\right)h(\eta) = 0, \tag{71}$$

oraz wykorzystując jawną postać czynnika skali w epoce inflacyjnej (patrz dodatek A.2 równanie 161):

$$\frac{a'(\eta)}{a(\eta)} = -\coth(\chi),$$

otrzymujemy:

$$h''(\eta) - 2\coth\chi(\eta)h'(\eta) + \left(p^2+1\right)h(\eta) = 0, \tag{72}$$

gdzie $\chi = \eta + \phi$ jest zmienną zdefiniowaną równaniem (160). Z uwagi na to, że $d/d\eta = d/d\chi$ prim w równaniu (72) równie dobrze może oznaczać pochodną po zmiennej χ.

Podstawiając:

$$h(\chi) \equiv U(\chi)\sinh^{3/2}\chi, \tag{73}$$

otrzymujemy:

$$\frac{1}{\sinh\chi}\frac{d}{d\chi}\left(\sinh\chi\frac{dU}{d\chi}\right) + \left(p^2 + \frac{1}{4} - \frac{\frac{9}{4}}{\sinh^2\chi}\right)U = 0. \tag{74}$$

Otrzymane równanie jest identyczne z równaniem na radialną część skalarnej funkcji harmonicznej z orbitalnym momentem kątowym $l = 1$ (199). Tak więc równanie to ma dwa liniowo niezależne rozwiązania w postaci funkcji Lagrange'a pierwszego rodzaju:

$$U(\chi) = A_1 P^{-3/2}_{-1/2+ip}(\cosh\chi) + A_2 P^{3/2}_{-1/2+ip}(\cosh\chi), \tag{75}$$

gdzie A_1, A_2 to dowolne stałe zespolone. Obydwie funkcje Lagrange'a można w prosty sposób wyrazić przez funkcje elementarne (trygonometryczne i hiperboliczne).

Pierwszą z funkcji Lagrange'a z dokładnością do stałego czynnika multiplikatywnego możemy otrzymać bezpośrednio ze wzoru (203):

$$P^{-3/2}_{-1/2+ip}(\cosh\chi) = const. \times \left(\frac{\coth\chi \sin p\chi}{\sqrt{\sinh\chi}} - \frac{p\cos p\chi}{\sqrt{\sinh\chi}} \right). \tag{76}$$

Drugą z funkcji Lagrange'a, $P^{3/2}_{-1/2+ip}$, obliczymy wykorzystując następującą zależność rekurencyjną [4]:

$$P^{\mu+2}_{\nu}(z) + 2(\mu+1)z(z^2-1)^{-1/2} P^{\mu+1}_{\nu}(z) = (\nu-\mu)(\nu+\mu+1)P^{\mu}_{\nu}(z), \tag{77}$$

oraz:

$$P^{1/2}_{\nu} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(z^2-1\right)^{-1/4} \left[\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)^{\nu+1/2} + \left(z+\sqrt{z^2-1}\right)^{-\nu-1/2} \right], \tag{78}$$

$$P^{-1/2}_{\nu} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(z^2-1)^{-1/4}}{2\nu+1} \left[\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)^{\nu+1/2} - \left(z+\sqrt{z^2-1}\right)^{-\nu-1/2} \right], \tag{79}$$

Wstawiając do zależności rekurencyjnej (77)

$$\mu = -\frac{1}{2}, \quad \nu = -\frac{1}{2} + ip$$

oraz

$$z = \cosh\chi,$$

otrzymujemy:

$$P^{3/2}_{-1/2+ip}(\cosh\chi) + \coth\chi P^{1/2}_{-1/2+ip}(\cosh\chi) = -p^2 P^{-1/2}_{-1/2+ip}(\cosh\chi). \tag{80}$$

Bezpośrednio ze wzorów (78,79) otrzymujemy:

$$P^{1/2}_{-1/2+ip}(\cosh\chi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos p\chi}{\sqrt{\sinh\chi}}, \tag{81}$$

$$P^{-1/2}_{-1/2+ip}(\cosh\chi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin p\chi}{p\sqrt{\sinh\chi}}. \tag{82}$$

Po wstawieniu do (80) otrzymujemy szukaną funkcję Lagrange'a:

$$P^{3/2}_{-1/2+ip}(\cosh\chi) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{p\sin p\chi}{\sqrt{\sinh\chi}} + \frac{\coth\chi\cos p\chi}{\sqrt{\sinh\chi}}\right]. \tag{83}$$

Tak więc ogólne rozwiązanie na funkcję $h(\chi)$ możemy zapisać w postaci (73,75,76,83):

$$h(\chi) = C_1\left(\cosh\chi\sin p\chi - p\cos p\chi\sinh\chi\right) + C_2\left(p\sinh\chi\sin p\chi + \cosh\chi\cos p\chi\right). \tag{84}$$

W tym momencie na rozwiązanie fizyczne narzucamy żądanie by fluktuacje, z których powstały zaburzenia spełniały założenia "konforemności" próżni (66). Z warunku tego możemy wyznaczyć jedną ze stałych C_1, C_2.

Zauważmy, że wybór stałej C_2 w postaci:

$$C_2(p) = iC_1(p),$$

sprowadza rozwiązanie (84) do postaci:

$$h(\chi) = C_1(p)\left[i\cosh\chi - p\sinh\chi\right]e^{-ip\chi}. \tag{85}$$

Jest to zatem fizyczne rozwiązanie równania (72) odpowiadające naszym żądaniom co do postaci rozwiązania w stanie próżni.

Drugą stałą obliczymy z warunku normalizacyjnego (62):

$$h(\chi)\bar{h}'(\chi) - \bar{h}(\chi)h'(\chi) = \frac{i}{a^2(\chi)}.$$

Po podstawieniu rozwiązania (85) do powyższego równania otrzymujemy:

$$C_1 = \frac{e^{i\xi}}{2a_0\sinh\chi_0\sqrt{p(1+p^2)}}, \tag{86}$$

gdzie rzeczywiste ξ jest nieistotną fazą, którą możemy położyć równą zeru.

Tak więc ostatecznie unormowane rozwiązanie na amplitudę fali w epoce inflacji przybiera postać:

$$h_p(\chi) = \frac{1}{2a_0\sinh\chi_0\sqrt{p(1+p^2)}}\left[i\cosh\chi - p\sinh\chi\right]e^{-ip\chi}, \tag{87}$$

gdzie indeksem p oznaczyliśmy jawnie rozwiązania numerowane liczbą kwantową p, natomiast stałe a_0 i χ_0 są określone w dodatku (A.2).

Teraz musimy znaleźć amplitudę jaką miały odpowiednie mody w momencie wychodzenia poza promień Hubble'a[15]. Fizyczna długość fali grawitacyjnej λ_{fiz} wiąże się z liczbą kwantową p związkiem:

$$\lambda_{fiz}(\chi(\eta)) \equiv \frac{2\pi a(\chi(\eta))}{p}, \tag{88}$$

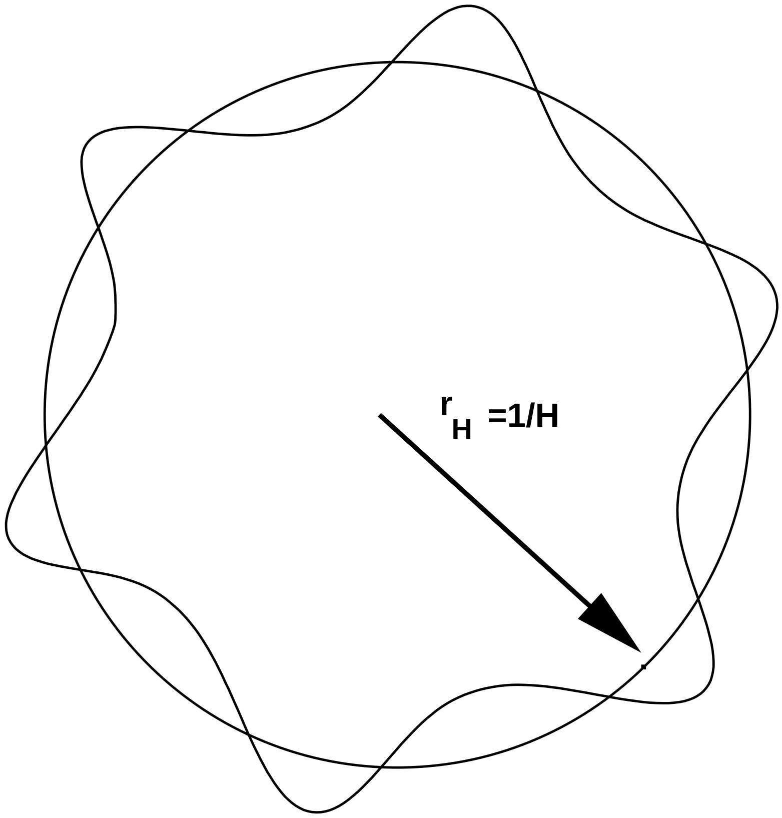
[15] W dalszej części pracy będziemy używać wymiennie zwrotów *promień Hubble'a* oraz *horyzont*, z pełną świadomością, że nie są to wielkości identyczne, a jedynie zachodzi między nimi proporcjonalność.

gdzie p to znana już liczba kwantowa, zwana liczbą falową oraz a to oczywiście czynnik skali. Warunek na to by co najmniej jeden cały okres fali mieścił się wewnątrz kuli o promieniu równym promieniowi Hubble'a $r_H = 1/H$ wygląda następująco (rys.5):

$$2\pi r_H = \lambda_{fiz} \Rightarrow \frac{2\pi}{H} = \frac{2\pi a}{p}.$$

Można go zapisać w bardziej konwencjonalnej formie:

$$\frac{Ha}{p} = 1. \tag{89}$$



Rys.5 Na obwodzie sfery Hubble'a $2\pi r_H$ musi się zmieścić conajmniej jedna długość fali λ.

Obliczmy teraz wartość wyrażenia Ha w epoce inflacyjnej. W dodatku A.2 pokazaliśmy, że:

$$a(\chi(\eta)) = \frac{a_0 \sinh \chi_0}{\sinh \chi(\eta)},$$

mamy zatem:

$$Ha \equiv \frac{\frac{da}{dt}}{a} a = \frac{1}{a}\frac{da}{d\eta} = \frac{1}{a(\chi)}\frac{da(\chi)}{d\chi} = -\coth \chi.$$

Jak wiadomo, $|\coth x| > 1$, tak więc widzimy, że jedynie mody dla których $p^2 > 1$ znajdowały się podczas epoki inflacyjnej wewnątrz horyzontu. Mody z $p < 1$ od samego początku epoki inflacyjnej rozciągały się daleko poza promień Hubble'a. W okresie kiedy zaburzenia są większe od rozmiarów horyzontu, procesy zachodzące w mikroświecie nie są w stanie zmienić amplitudy zaburzenia [7], - dlatego też widmo zaburzeń modów z $p < 1$ w momencie wejścia pod horyzont - gdzieś w epoce zdominowanej oprzez materię - jest równe pierwotnemu widmu kwantowych fluktuacji.

Warunek (89) możemy zapisać w postaci:

$$p^2 = \coth^2 \chi; \tag{90}$$

równanie to określa czas $(\chi(\eta(t)))$, w którym dany mod opuścił sferę Hubble'a.

Możemy już obliczyć amplitudę modów $(p^2 > 1)$ w momencie przekraczania horyzontu:

$$|h_p| = \frac{1}{|a_0 \sinh \chi_0| \sqrt{p(1+p^2)}} \sqrt{\cosh^2 \chi + p^2 \sinh^2 \chi},$$

wykorzystując (90) oraz:

$$H = \frac{a'}{a^2} = -\frac{\cosh \chi}{a_0 \sinh \chi_0},$$

dostajemy ostatecznie:

$$|h_p| = \frac{H}{\sqrt{2p(1+p^2)}} |_{Ha/p=1}. \tag{91}$$

Pierwotną amplitudę kwantowych zaburzeń dla modów rozciągniętych poza sferą Hubble'a określimy kładąc w wyrażeniu (87):

$$\coth^2 \chi_0 \gg p^2,$$

gdzie χ_0 jest momentem tuż po nukleacji bąbla inflacyjnego, dla którego mamy $Ha(\chi_0) \gg p^2$, stała Hubble'a -w przybliżeniu - określona jest równaniem (39). Dostajemy wówczas:

$$|h_p| = \frac{H}{\sqrt{2p(1+p^2)}}, \tag{92}$$

gdzie w odróżnieniu od amplitudy (91) stała Hubble'a jest niezależna od liczby falowej p.

Widmo mocy fal grawitacynych, P_Ψ, definiujemy w następujący sposób:

- klasycznie:

$$\left\langle f^{Kplm} f^{K'p'l'm'} \right\rangle \equiv \frac{2\pi^2}{p(1+p^2)} P_\Psi(p) \delta(p-p') \delta_{KK'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \tag{93}$$

  gdzie oznaczyliśmy

$$f^{Kplm}(\eta) \equiv A(K,p,l,m) h^p(\eta) + \bar{A}(K,p,l,-m) \bar{h}^p(\eta).$$

- kwantowo:

$$\left\langle 0 \left| \hat{h}^{Kplm} \hat{h}^{K'p'l'm'} \right| 0 \right\rangle \equiv \frac{2\pi^2}{p(1+p^2)} P_\Psi(p) \delta(p-p') \delta_{KK'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \tag{94}$$

W języku amplitudy fali powyższą definicję można zapisać następująco:

$$|h_p(\chi)|^2 = \frac{2\pi^2}{p(1+p^2)} P_\Psi(p). \tag{95}$$

Wykorzystując (92) możemy policzyć widmo tych fal, które wyszły poza horyzont w epoce inflacyjnej i zachowując jego kształt, weszły z powrotem pod horyzont dopiero w epoce zdominowanej przez materię:

$$P_\Psi^{1/2}(p) = \frac{H}{2\pi}|_{Ha/p=1}. \tag{96}$$

I analogicznie widmo dla modów $p > 1$:

$$P_\Psi^{1/2}(p) = \frac{H}{2\pi}. \tag{97}$$

Drugi etap epoki inflacyjnej trwał stosunkowo krótko, możemy więc w przybliżeniu przyjąć, że stała Hubble'a w powyższych widmach jest taka sama dla wszystkich modów i określona zależnością (39).

4.4 Epoka dominacji promieniowania

Ewolucja fal grawitacyjnych w epoce zdominowanej przez promieniowanie nie ma wpływu na szerokokątową perturbację promieniowania reliktowego, gdyż mody, które dają wkład do tych perturbacji w epoce promieniowania rozciągają się daleko poza horyzont i lokalnie, w obrębie horyzontu, mody te były niewidoczne i nie podlegały ewolucji tak jak mody, które były wewnątrz horyzontu.

Mimo to podamy rozwiązanie równania na amplitudę fali dla modów znajdujących się wewnątrz horyzontu, gdyż w epoce promieniowania równanie na amplidudę fali (69) staje się bardzo proste:

$$\mu^{''}(\eta) + p^2\mu(\eta) = 0, \tag{98}$$

gdzie prim oznacza pochodną po czasie konforemnym η. Ogólne rozwiązanie tego równania wygląda następująco:

$$\mu(\eta) = C_1 e^{ip\eta} + C_2 e^{-ip\eta}. \tag{99}$$

Zgodnie z naszym wyborem rozwiązania na amplitudę fali (66) widzimy, że stałą C_1 musimy położyć równą zeru. Wartość drugiej stałej uzyskamy z warunku normalizacyjnego (61):

$$\mu(\eta)\bar{\mu}^{'}(\eta) - \bar{\mu}(\eta)\mu^{'}(\eta) = i.$$

Tak, że ostatecznie rozwiązanie przyjmuje postać:

$$\mu_p(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2p}} e^{-ip\eta}. \tag{100}$$

Jak widać w epoce zdominowanej przez promieniowanie fale grawitacyjne rozchodzą się swobodnie.

4.5 Epoka dominacji materii

W epoce materii zmienna χ związana jest z czasem konforemnym zależnością:

$$\chi = \frac{\eta}{2} + \phi,$$

gdzie stała ϕ jest określona w dodatku (A.2). Mamy zatem

$$\frac{d}{d\eta} = \frac{1}{2}\frac{d}{d\chi}, \qquad \frac{d^2}{d\eta^2} = \frac{1}{4}\frac{d^2}{d\chi^2}.$$

Oznaczając primem pochodną po χ: $' \equiv d/d\chi$, równanie na amplitudę fali (71) możemy zapisać w następujący sposób:

$$\frac{1}{4}h''(\chi) + \coth\chi h'(\chi) + (p^2+1)h(\chi) = 0, \tag{101}$$

gdzie wykorzystaliśmy ponadto (dodatek A.2):

$$\frac{d\ln a(\eta)}{d\eta} = \frac{da/d\eta}{a} = \coth\chi(\eta).$$

Podstawiając

$$h(\chi) \equiv \frac{U(\chi)}{\sinh^{3/2}\chi}, \tag{102}$$

otrzymujemy:

$$\frac{1}{\sinh\chi}\frac{d}{d\chi}\left(\sinh\chi\frac{dU}{d\chi}\right) + \left(4p^2 + \frac{1}{4} - \frac{\frac{9}{4}}{\sinh^2\chi}\right)U = 0. \tag{103}$$

Jest to równanie identyczne z tym, które uzyskaliśmy w przypadku epoki inflacyjnej (74), z niewielką zamianą $p \to 2p$. Tak więc ogólne rozwiązanie na funkcję $U(\chi)$ wygląda następująco:

$$U(\chi) = A_1 P^{-3/2}_{-1/2+2ip}(\cosh\chi) + A_2 P^{3/2}_{-1/2+2ip}(\cosh\chi), \tag{104}$$

gdzie A_1, A_2 to jak zwykle dowolne stałe zespolone.

Wykorzystując (76,83,102) możemy napisać ogólne rozwiązanie na funkcję $h(\chi)$ w postaci:

$$h(\chi) = C_1\left[\frac{2p\sin 2p\chi \sinh\chi + \cosh\chi\cos 2p\chi}{\sinh^3\chi}\right] + C_2\left[\frac{\cosh\chi\sin 2p\chi - 2p\sinh\chi\cos 2p\chi}{\sinh^3\chi}\right]. \tag{105}$$

Do obliczenia szerokokątowej perturbacji temperatury promieniowania reliktowego będziemy musieli znać rozwiązanie na amplitudę tych modów z widma fal grawitacyjnych, które powracają pod horyzont (promień Hubble'a) dopiero w epoce zdominowanej przez promieniowanie. W czasie, gdy fale te rozciągały się aż poza horyzont, amplituda tych modów nie zmieniała się. Obszar, który w momencie rekombinacji pokrywał się z horyzontem ma obecnie rozmiary kątowe θ_H rzędu [7, 8]:

$$\theta_H \approx 0.83^o\sqrt{\Omega_0}.$$

Tłumaczy to dlaczego jesteśmy zainteresowani modami, które pojawiają się pod horyzontem dopiero w epoce materii. Mody, które w momencie rekombinacji były już pod horyzontem wpływają na perturbacje w dużo mniejszych skalach.

Z powyżych powodów będziemy szukać takiego rozwiązania na funkcję $h(\chi)$, które w granicy $\chi \to 0$ dąży do wartości stałej [30] - w literaturze rozwiązanie takie nazywane jest: *growing mode solution*. Żądanie takie oznacza między innymi to, że wybraliśmy $\chi = 0$ w momencie, gdy wszystkie interesujące nas mody były poza horyzontem np. w momencie rekombinacji. Analizując zachowanie graniczne wyrażenia (105) widzimy, że stała C_1 ma być równa zeru, gdyż wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest rozbieżne w granicy $\chi \to 0$.

Tak więc z dokładnością do stałej nasze rozwiązanie przyjmuje postać:

$$h_p(\chi) = C_1\left[\frac{\cosh\chi\sin 2p\chi - 2p\sinh\chi\cos 2p\chi}{\sinh^3\chi}\right]. \tag{106}$$

Stałą C_1 dobieramy tak, by $h(\chi = 0) = h_p$, gdzie h_p określone jest zależnością (92). Dostajemy wówczas:

$$\lim_{\chi\to 0} h_p(\chi) = C_1\frac{2p\,(1+4p^2)}{3},$$

tak więc stała C_1 wynosi:

$$C_1 = \frac{3H}{2p\,(1+4p^2)\sqrt{2p(1+p^2)}}. \tag{107}$$

Dla uproszczenia zapisu wprowadźmy funkcję $G_p(\chi)$:

$$h_p(\chi) \equiv h_p G_p(\chi),$$

gdzie:

$$G_p = \frac{3\,(\cosh\chi\sin 2p\chi - 2p\sinh\chi\cos 2p\chi)}{2p(1+4p^2)\sinh^3\chi}. \tag{108}$$

mamy ponadto $G_p(\chi = 0) = 1$.

5 Wkład fal grawitacyjnych do szerokokątowej anizotropii temperatury promieniowania reliktowego

5.1 Polaryzacja fal grawitacyjnych a anizotropia temperatury promieniowania reliktowego

Fale grawitacyjne propagując się na jednorodnym i izotropowym tle zaburzają tor fotonów - wywołując tym samym anizotropię w obserwowanym obecnie mikrofalowym promieniowaniu tła. Owa anizotropia widziana w dużej skali - kilka stopni miary łukowej - pochodzi od tych fal grawitacyjnych, które weszły pod horyzont dopiero w epoce dominacji materii. Bowiem rozmiary sfery Hubble'a w momencie rekombinacji -początek epoki materii- osiągają obecnie na sferze niebieskiej rozmiar kątowy rzędu 0.5^o. Mechanizmem odpowiedzialnym za tą szerokokątową anizotropię temperatury jest tzw. efekt Sachsa Wolfe'a.

W dodatku A.5 wyprowadziliśmy jawną postać wyrażenia na anizotropię temperatury wywołaną przez fale grawitacyjne:

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_0(\theta,\phi) = \frac{1}{2}\int_0^{\eta_{\mathcal{O}}-\eta_E} \frac{\partial {h_1}^1(\eta(y),\alpha(y),\theta,\phi)}{\partial\eta}dy, \tag{109}$$

gdzie $\eta(y) = y, \alpha(y) = -y + \eta_{\mathcal{O}}$ opisują tor ruchu fotonu. Natomiast $\eta_{\mathcal{O}} - \eta_E \approx 2.34$[16].

Jak widać z powyższego wzoru anizotropia temperatury promieniowania reliktowego zależy jedynie od składowej radialno - radialnej tensora opisującego fale grawitacyjne. Biorąc także pod uwagę, że składowa radialno - radialna tensorowych funkcji harmonicznych ma tylko jeden polaryzacyjny stopień swobody (patrz dodatek A.4) dochodzimy do wniosku, że wpływ na anizotropię temperatury promieniowania reliktowego mają jedynie fale o ustalonej polaryzacji - my wybraliśmy dla niej oznaczenie K_+. Fale o polaryzacji $K_\times$ nie zaburzają toru ruchu fotonu i nie wywołują anizotropii temperatury mikrofalowego promieniowania tła.

5.2 Funkcja korelacyjna

Standardowo anizotropię temperatury promieniowania reliktowego opisuje się za pomocą momentów multipolowych kątowej funkcji korelacyjnej $C(\gamma)$ zdefiniowanej następująco:

$$C(\gamma) \equiv \left\langle \frac{\delta T}{T}(\theta,\phi)\frac{\delta T}{T}(\theta',\phi')\right\rangle, \tag{110}$$

gdzie γ jest kątem pomiędzy dwoma punktami $(\theta,\phi),(\theta',\phi')$ na sferze niebieskiej:

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi'), \tag{111}$$

[16] Patrz dodatek A.2 równanie (165).

natomiast braket oznacza wartość oczekiwaną zmiennej stochastycznej, która jest całkowicie określona przez zadanie widma mocy fal grawitacyjnych w dowolnym momencie. W rozdziale 4 otrzymaliśmy takie widmo jako wartość oczekiwaną w stanie próżni. Następnie zakładaliśmy, że mody wchodzące pod horyzont w epoce dominacji materii mają, w momencie pojawienia się pod horyzontem, takie samo widmo jak w chwili opuszczania sfery Hubble'a w epoce inflacyjnej. Dalsza ewolucja widma w epoce materii zdeterminowana jest przez ewolucję amplitud odpowiednich modów:

$$P_{\Psi} \sim |h^p(\eta)|^2 .$$

Składową radialno - radialną tensora fal grawitacyjnych w epoce materii możemy zapisać wykorzystując wyniki z rozdziału 4 (równanie 108) oraz dodatku A.4:

$$h_1{}^1(\eta, \alpha, \theta, \phi) = \int_0^{\infty} dp \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} f^{K+plm}(\eta) \Psi^{K+plm}{}_1{}^1(\alpha, \theta, \phi), \tag{112}$$

gdzie - przypomnijmy:

$$f^{K,p,l,m}(\eta) = A(K,p,l,m) h^p(\eta) + \overline{A}(K,p,l,-m) \overline{h}^p(\eta).$$

Momenty multipolowe C_l określają rozkład funkcji korelacyjnej na multipole:

$$C(\gamma) = \frac{1}{4\pi} \sum_l (2l+1) C_l P_l(\cos\gamma). \tag{113}$$

Wstawiając (112) do (109) oraz wykorzystując definicję funkcji korelacyjnej (110) otrzymujemy:

$$C(\gamma) = \frac{1}{4} \int_0^{\eta_O - \eta_E} dy \int_0^{\eta_O - \eta_E} dy' \int_0^{\infty} dp \int_0^{\infty} dp' \sum_{lm} \sum_{l'm'} \left\langle \frac{\partial \overline{f}^{K+plm}(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial f^{K+p'l'm'}(\eta)}{\partial \eta} \right\rangle \times$$

$$\times \overline{\Psi^{K+plm}{}_1}{}^1(\alpha(y), \theta, \phi) \Psi^{K+p'l'm'}{}_1{}^1(\alpha(y'), \theta', \phi').$$

Korzystając z (93,94,95) dostajemy:

$$\left\langle \frac{\partial \overline{f}^{K+plm}(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial f^{K+p'l'm'}(\eta)}{\partial \eta} \right\rangle = \frac{dG_p(\eta)}{d\eta} \frac{dG_{p'}(\eta)}{d\eta} |h^p|^2 \, \delta(p-p') \delta_{ll'} \delta_{mm'},$$

mamy zatem:

$$C(\gamma) = \frac{1}{4} \int_0^{\infty} dp \, |h^p|^2 \int_0^{\eta_O - \eta_E} dy \int_0^{\eta_O - \eta_E} dy' \frac{dG_p(\eta(y))}{d\eta} \frac{dG_p(\eta(y'))}{d\eta} \times$$

$$\times \sum_{lm} \overline{\Psi^{K+plm}{}_1}^1(\alpha(y),\theta,\phi)\Psi^{K+plm}{}_1{}^1(\alpha(y'),\theta',\phi').$$

Jawna postać radialno - radialnej składowej hiperbolicznej, tensorowej funkcji harmonicznej jest następująca (208,205,203):

$$\Psi^{K+plm}{}_1{}^1(\alpha,\theta,\phi) = \sqrt{\frac{(l-1)l(l+1)(l+2)}{2p^2(1+p^2)}} \left|\frac{\Gamma(ip+l+1)}{\Gamma(ip)}\right| \frac{P^{-l-1/2}_{-1/2+ip}(\cosh\alpha)}{\sinh^{5/2}\alpha} Y_{lm}(\theta,\phi), \tag{114}$$

gdzie $P^{-l-1/2}_{-1/2+ip}$, to stowarzyszona funkcja Lagrange'a pierwszego rodzaju:

$$P^{-l-1/2}_{-1/2+ip}(\cosh\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left|\frac{\Gamma(ip)}{\Gamma(ip+l+1)}\right|^2 (-1)^{l+1}\sinh^{l+1/2}\alpha \frac{d^{l+1}\cos p\alpha}{d(\cosh\alpha)^{l+1}}. \tag{115}$$

Sumę po m we wzorze na funkcję korelacyjną można wykonać dzięki następującej własności harmonik sferycznych :

$$\sum_{m=-l}^{l} \overline{Y}_{lm}(\theta,\phi)Y_{lm}(\theta',\phi') = \frac{2l+1}{4\pi}P_l(\cos\gamma),$$

gdzie kąt γ określony jest równaniem (111). Dopiero ta równość uwidacznia nam - zakładany z góry fakt, że funkcja korelacyjna zależy rzeczywiście tylko od odległości kątowej między punktami na sferze niebieskiej γ - czyli, że zaburzenia powodujące anizotropię są jednorodne.

Dostajemy wówczas:

$$C(\gamma) = \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos\gamma) \frac{(l-1)l(l+1)(l+2)}{8} \int_0^\infty dp \frac{|h^p|^2}{1+p^2} \left|\frac{\Gamma(ip+l+1)}{\Gamma(ip+1)}\right|^2 \times$$

$$\times \left[\int_0^{\eta_O-\eta_E} dy \frac{dG_p(\eta(y)}{d\eta} \frac{P^{-1/2-l}_{-1/2+ip}(\cosh\alpha(y))}{\sinh^{5/2}\alpha(y)}\right]^2.$$

Należy zwrócić uwagę, że wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest rzeczywiste.

Porównując powyższe równanie z definicją współczynników multipolowych (113) otrzymujemy:

$$C_l = \frac{(l-1)l(l+1)(l+2)}{8} \int_0^\infty dp \frac{|h^p|^2}{1+p^2} \left|\frac{\Gamma(ip+l+1)}{\Gamma(ip+1)}\right|^2 \times$$

$$\times \left[\int_0^{\eta_O-\eta_E} dy \frac{dG_p(\eta(y))}{d\eta} \frac{P^{-1/2-l}_{-1/2+ip}(\cosh\alpha(y))}{\sinh^{5/2}\alpha(y)}\right]^2. \tag{116}$$

W powyższym wyrażeniu całka po p jest rozbieżna w ultrafiolecie ($p \to 0$).[17] Rozbieżność ta bierze się z rozbieżności samego widma, na którą po raz pierwszy zwrócili uwagę Allen i Caldwell w swojej nieopublikowanej, aczkolwiek cytowanej w literaturze pracy. Z problemem tym można poradzić sobie na różne sposoby. Najprostszy z nich to po prostu obcięcie widma na jakiejś skończonej długości fali. Widać tutaj pewne podobieństwo metody obcięcia ze stosowanym w teorii cząstek sposobem renormalizacji zwanym właśnie obcięciem (ang. *cut off*). Argumenty mogące przemawiać za słusznością tej metody to przede wszystkim skończone rozmiary bąbla inflacyjnego - co przemawia z kolei za tym, że realistyczne modele kosmologiczne powinny przewidywać istnienie wszechświata wewnątrz pojedynczego bąbla inflacyjnego. Takie też modele cieszą się obecnie największą popularnością. Model opisany przez nas w rozdziale 3 jest właśnie jednym z takich modeli. Wzięcie pod uwagę pewnych efektów związanych ze ściankami takiego bąbla - skończona grubość itp.- może także doprowadzić do rozwiązania problemu rozbieżności podczerwonej widma fal grawitacyjnych. W ostatnich 2-3 latach pojawiły się próby uwzględnienia tych efektów, które jak się okazuje powodują zniknięcie rozbieżności w widmie fal grawitacyjnych [5, 37]. Jeśli $|h^p|^2$ jest widmem uzyskanym przy zaniedbaniu efektów związanych z bąblem to widmo uwzględniające te efekty będzie postaci:

$$|h^p|^2\left(1+\delta(p)\right),$$

gdzie $\delta(p)$ jest właśnie poprawką, która odgrywa istotną rolę w granicy $p \to 0$, natomiast dla dużych p jest zaniedbywalnie mała.

Jak już wcześniej przypominaliśmy[18] przypadek $p = 0$ jest jednym z dyskretnych modów pochodzących od fluktuacji w ściankach bąbla, które też dają wkład do anizotropii promieniowania reliktowego. Jak się okazuje [30], przy uwzględnieniu efektów związanych ze ściankami, mod ten jest automatycznie włączany do ciągłego widma fal grawitacyjnych, z którego można go w odpowiedni sposób wydzielić. Odpowiadające temu podziałowi rozseparowanie momentów multipolowych na części pochodzące od ścianek i od fal grawitacyjnych wygląda następująco [37]:

$$C_l = \int_0^\infty dp|h^p|^2 C_l^S + C_l^F, \tag{117}$$

gdzie C^S to efekt ścianek a C^F to efekt fal.

W naszych rozważaniach widmo $|h^p|^2$ jest rozbieżne, więc wkład od ścianek - których nie uwzględnialiśmy - nie może być określony poprawnie. Jednak pokażemy, że nawet w naszym przypadku część pochodząca od fal grawitacyjnych C^F okaże się być skończona.

Współczynnik C^S można obliczyć biorąc we wzorze (116) - poza wyrazem $|h^p|^2$ - granicę $p \to 0$:

[17] Z falowego punktu widzenia poprawniejsza byłaby nazwa *rozbieżność w podczerwieni*, gdyż małe p odpowiada długim falom.

[18] Patrz dodatek A.4

$$C_l^S = \frac{(l-1)l(l+1)(l+2)}{8} l! \left[\int_0^{\eta_O - \eta_E} dy G_0'(\eta(y)) \frac{P_{-1/2}^{-1/2-l}(\cosh \alpha(y))}{\sinh^{5/2} \alpha(y)} \right]^2, \qquad (118)$$

gdzie oznaczyliśmy:

$$G_0'(\eta) \equiv \lim_{p \to 0} \frac{dG_p(\chi(\eta))}{d\eta} = \frac{3(-4\chi - 2\chi \cosh 2\chi + 3 \sinh 2\chi)}{8 \sinh^4 \chi}.$$

Momenty multipolowe związane z falami grawitacyjnymi można obliczyć z zależności:

$$C_l^F = C_l - \int_0^\infty dp |h^p|^2 C_l^S, \qquad (119)$$

gdzie C_l określone jest równością (113) a C_l^S równością (118). Jak łatwo zauważyć, mamy tu doczynienia ze spotykanym często we współczesnej fizyce - i nie tylko - procederem odejmowania nieskończonośći od nieskończoności w celu uzyskania skończonego wyniku. Zobaczmy jak zachowuje się wyrażenie podcałkowe w granicy małych p, czyli czy udało się nam usunąć ultrafioletową rozbieżność. Z równań (119,118,113) widzimy, że wyrażenie podcałkowe zachowuje się w granicy $p \to 0$ następująco:

$$const. \times |h^p|^2 \left(\frac{1}{1+p^2} - 1 \right) = const. \times |h^p|^2 \left(\frac{-p^2}{1+p} \right) \sim \frac{1}{p} p^2 \sim p \to 0.$$

Jak widać udało się nam usunąć rozbieżność w wyrażeniu na momenty multipolowe utworzone przez fale grawitacyjne stosując - nazwijmy to - odjęcie w zerze.

Zerowanie się momentów: monopolowego ($l = 0$) i dipolowego ($l = 1$) wynika bezpośrednio ze wzoru (116) - proporcjonalność do $l(l-1)$. Zgadza się to z cząstkową interpretacją fal grawitacyjnych - grawiton jest cząstką o spinie 2.

Oczywiście nie tylko fale grawitacyjne mają wpływ na anizotropię temperatury promieniowania reliktowego. Składają się na to jeszcze - między innymi - skalarne zaburzenia gęstości, związane z fluktuacjami kwantowymi inflatonu. Do niedawna był to jedyny rodzaj zaburzeń dyskutowany w związku z anizotropią temperatury promieniowania reliktowego. Fale grawitacyjne i dyskretne mody zaburzeń generowanych w ściankach bąbla, dopiero od niedawna zaczęły być brane pod uwagę. Okazało się, że mają one porównywalny do zaburzeń skalarnych wkład do anizotropii. Tak więc nie można o nich zapomnieć, gdy porównuje się przewidywania teorii z danymi obserwacyjnymi.

6 Podsumowanie

Na zakończenie podsumujmy najważniejsze wnioski, do których doszliśmy podczas rozważań prowadzonych w niniejszej pracy.

Po pierwsze bardzo ważne jest stwierdzenie, że inflacyjne modele kosmologiczne pozwalają nam na wyprodukowanie otwartego wszechświata. Przedstawiony przez nas w rozdziale 2 model jest na to przykładem. Jeszcze kilka lat temu uważano, że najważniejszym przewidywaniem inflacyjnych modeli kosmologicznych jest płaskość wszechświata. Nie można było wówczas pogodzić ze sobą: danych obserwacyjnych - wskazujących na to, że parametr gęstości $\Omega < 1$, z przewidywaniami modelu inflacyjnego, który jako jedyny rozwiązywał problemy standardowego modelu kosmologicznego i przewidywał, że $\Omega = 1$. Dzisiaj wiemy, że można ze sobą pogodzić te dwie - wydawałoby się - rozłączne sytuacje.

Drugim ważnym elementem, który także przemawia na korzyść inflacyjnego modelu kosmologicznego, jest możliwość wyjaśnienia mechanizmu powstawania zaburzeń gęstości a także fal grawitacyjnych. Standardowy model kosmologiczny nie radził sobie z tym problemem, natomiast model inflacyjny nie tylko wyjaśnia, ale także przewiduje widmo początkowe takich zaburzeń. W rozdziale 3 otrzymaliśmy odpowiednie widmo dla zaburzeń reprezentujących fale grawitacyjne.

Zaburzenia, w tym także fale grawitacyjne, wpływają na ruch fotonów wywołując tym samym anizotropię w rozkładzie temperatury promieniowania reliktowego. Potrafimy przewidzieć wielkość tej anizotropii, co daje możliwość porównania przewidywań teorii z danymi obserwacyjnymi. Dzięki satelicie *COBE* udało się taką anizotropię zmierzyć. Pomiary te dają silne ograniczenia na parametry inflacyjnego modelu kosmologicznego. W przyszłości planowane są kolejne eksperymenty, mające na celu wykorzystanie nowej generacji detektorów do pomiarów anizotropii promieniowania reliktowego. Są to eksperymeny: *PLANCK* - europejski, oraz *MAP* - amerykański [39, 40]. Jak wspominaliśmy w rozdziale 2 przewiduje się, że dane uzyskane w tych eksperymentach pozwolą odpowiedzieć na najbardziej chyba nurtujące kosmologów - i nie tylko - pytanie: "czy wszechświat jest otwarty, czy może jednak płaski?"

Bardzo ciekawy jest także fakt, że tylko fale o określonej polaryzacji zaburzają tor ruchu fotonów. Fale o przeciwnej polaryzacji nie mają żadnego wpływu na wytworzenie anizotropii promieniowania reliktowego. Interpretacja cząstkowa tego faktu mówi nam, że - nazwijmy je - "lewe" grawitony nie oddziaływują z fotonami.

Podziękowania

Pragnę serdecznie podziękować prof. Markowi Demiańskiemu za ogromną pomoc, dużo wyrozumiałości i cierpliwości oraz za bezcenne uwagi i komentarze, które w dużym stopniu ułatwiły mi napisanie niniejszej pracy.

Chciałbym także podziękować wszystkim nie wymienionym osobom, które choćby w najmniejszym stopniu przyczyniły się do powstania pracy w jej obecnym kształcie.

A Dodatki

A.1 Notacja

Wskaźniki i konwencja sumacyjna Einsteina

- Współrzędne w czterowymiarowej czasoprzestrzeni oznaczamy małymi literami ze środka alfabetu łacińskiego $(i, j, k, ...)$:

$$\left(x^i, i = 0, 1, 2, 3\right) = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right), \tag{120}$$

- współrzędne przestrzene oznaczamy małymi literami alfabetu greckiego $(\alpha, \beta, \gamma...)$:

$$\left(x^\alpha, \alpha = 1, 2, 3\right) = \left(x^1, x^2, x^3\right), \tag{121}$$

- pochodne cząstkowe oznaczamy przecinkiem:

$$A_{i,j} = \frac{\partial A_i}{\partial x^j},$$

- stosujemy konwencję sumacyjną Einsteina - sumowanie po powtarzających się indeksach górnym i dolnym:

$$A_i B^i \equiv \sum_{i=0}^{3} A_i B^i = A_0 B^0 + A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3,$$

Tensor metryczny

- Jednorodny i izotropowy wszechświat opisujemy metryką Robertsona - Walkera [16, 34, 10]:

$$ds^2 \equiv g_{ij} dx^i dx^j = c^2 dt^2 - \tilde{a}^2(t) \left[\frac{d\tilde{r}^2}{1 - k\tilde{r}^2} + \tilde{r}^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)\right], \tag{122}$$

  gdzie:

  - $x^0 \equiv t$, $x^1 \equiv \tilde{r}$, $x^2 \equiv \theta$, $x^3 \equiv \phi$,
  - c - prędkość światła w próżni, którą w naszym układzie jednostek kładziemy równą $c \equiv 1$,
  - $(\tilde{r}, \theta, \phi)$ - tradycyjne współrzędne sferyczne w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej,

- $\tilde{a}(t)$ - tzw. czynnik skali, który jest wielkością bezwymiarową,
- k - współczynnik związany z krzywizną przestrzeni o wymiarze $[k] = \frac{1}{[\mathrm{j.d\ell}]^2}$,

• we wszechświecie otwartym ($k < 0$) metryka (122) przyjmuje postać:

$$ds^2 \equiv g_{ij}dx^i dx^j = dt^2 - a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1+r^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)\right], \tag{123}$$

gdzie przedefiniowaliśmy pewne wielkości w następujący sposób:

- w trójwymiarowych podprzestrzeniach stałego t długością trójwektora położenia we współrzędnych sferycznych jest wielkość $\tilde{a}(t)\tilde{r}$, mająca wymiar długości; nowe wielkości $a(t)$ i r wiążą się ze starymi w następujący sposób:
  - $a(t) \equiv \tilde{a}(t)\cdot(-k)^{-1/2}$
  - $r \equiv \tilde{r}\cdot(-k)^{1/2}$

  tak, że teraz nowy czynnik skali ma wymiar długości, a r jest wielkością bezwymiarową; iloczyn nowych wielkości jest równy iloczynowi starych wielkości, $a(t)r = \tilde{a}(t)\tilde{r}$, i zachowuje swoją interpretację długości w trójwymiarowych podprzestrzeniach stałego czasu,
- jak widać jedynie znak współczynnika k okazał się istotny,

• wprowadzając czas konforemny η:

$$d\eta \equiv \frac{dt}{a(t)} \Longrightarrow \eta - \eta_0 = \int_{t_0}^{t}\frac{d\xi}{a(\xi)}, \tag{124}$$

otrzymujemy:

$$ds^2 = a^2(\eta)d\eta^2 - a^2(\eta)\left[\frac{dr^2}{1+r^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)\right], \tag{125}$$

gdzie $a(\eta) \equiv a\left(t\left(\eta\right)\right)$.

Współczynniki koneksji metrycznej (symbole Christoffela)

$$\Gamma^i{}_{jk} \equiv \frac{1}{2}g^{il}\left(g_{lj,k} + g_{lk,j} - g_{jk,l}\right), \tag{126}$$

$$\Gamma_{ijk} = g_{il}\Gamma^l{}_{jk} \equiv \frac{1}{2}\left(g_{ij,k} + g_{ik,j} - g_{jk,i}\right), \tag{127}$$

• symbole Christoffela, $\Gamma^i{}_{jk}$, są symetryczne w dolnych wskaźnikach:

$$\Gamma^i{}_{jk} = \Gamma^i{}_{kj},$$

- pochodna kowariantna:
  - kowariantnego pola wektorowego:
$$A_{i;j} \equiv A_{i,j} - \Gamma^{k}_{\ ij} A_k, \tag{128}$$
  - kontrawariantnego pola wektorowego:
$$B^{i}_{\ ;j} \equiv B^{i}_{\ ,j} + \Gamma^{i}_{\ kj} B^k, \tag{129}$$
  - tensora o walencji (0,2):
$$T_{ij;k} \equiv T_{ij,k} - \Gamma^{l}_{\ ik} T_{lj} - \Gamma^{l}_{\ jk} T_{il}, \tag{130}$$
  - tensora o walencji (2,0):
$$T^{ij}_{\ \ ;k} \equiv T^{ij}_{\ \ ,k} + \Gamma^{i}_{\ lk} T^{lj} + \Gamma^{j}_{\ lk} T^{il}, \tag{131}$$
  - tensora o walencji (1,1):
$$T^{i}_{\ j;k} \equiv T^{i}_{\ j,k} + \Gamma^{i}_{\ lk} T^{l}_{\ j} - \Gamma^{l}_{\ jk} T^{i}_{\ l}, \tag{132}$$

Tensor krzywizny (Riemanna)

$$R^{i}_{\ jkl} \equiv \Gamma^{i}_{\ jl,k} - \Gamma^{i}_{\ jk,l} + \Gamma^{m}_{\ jl} \Gamma^{i}_{\ mk} - \Gamma^{m}_{\ jk} \Gamma^{i}_{\ ml}, \tag{133}$$

$$R_{ijkl} = g_{im} R^{m}_{\ jkl} = \frac{1}{2} \left(g_{jk,il} + g_{il,jk} - g_{jl,ik} - g_{ik,jl} \right) + g_{mn} \left(\Gamma^{m}_{\ il} \Gamma^{n}_{\ jk} - \Gamma^{m}_{\ ik} \Gamma^{n}_{\ jl} \right), \tag{134}$$

- tensor krzywizny spełnia następujące warunki symetrii:
$$R_{ijkl} = -R_{jikl}, \tag{135}$$
$$R_{ijkl} = -R_{ijlk}, \tag{136}$$
$$R_{ijkl} = R_{klij}, \tag{137}$$
- z warunków tych wynika dodatkowo:
$$R^{i}_{\ ikl} = 0 \tag{138}$$

  oraz:
$$R_{i[jkl]} = 0, \tag{139}$$

- tensor krzywizny spełnia też tak zwaną *tożsamość Bianchiego:*

$$R^i{}_{jkl;m} + R^i{}_{jlm;k} + R^i{}_{jmk;l} = 0. \qquad (140)$$

Tensor Ricciego i tensor Einsteina

- Zwężając tensor Riemanna $R^i{}_{jkl}$ otrzymujemy tensor o walencji (0,2), z tym że zwężenie postaci (138) daje tensor tożsamościowo równy zeru, natomiast zwężenia postaci:

$$R^i{}_{jil}, \qquad R^i{}_{jki},$$

  w ogólności nie są równe zeru, a między sobą różnią się tylko znakiem. Jeden z tych tensorów nazywamy *tensorem Ricciego* i oznaczamy R_{ij}, w literaturze spotyka się obydwie konwencje (co do znaku), przyjmiemy, że:

$$R_{ij} \equiv R^k{}_{ijk}, \qquad (141)$$

- zatem:

$$R_{ij} \equiv R^k{}_{ijk} = \Gamma^k{}_{ik,j} - \Gamma^k{}_{ij,k} + \Gamma^m{}_{ik}\Gamma^k{}_{mj} - \Gamma^m{}_{ij}\Gamma^k{}_{mk}, \qquad (142)$$

- z własności (135,136,137) wynika, że tensor Ricciego jest symetryczny:

$$R_{ij} = R_{ji}, \qquad (143)$$

- zwężając z kolei tensor Ricciego otrzymujemy skalar zwany *skalarem krzywizny*:

$$R \equiv g^{ij}R_{ij} = R^k_k, \qquad (144)$$

- tensor Einsteina definjujemy w następujący sposób:

$$G_{ij} \equiv R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R, \qquad (145)$$

- jest on symetryczny i ma znikającą dywergencję:

$$G_{ij} = G_{ji}, \quad G^i{}_{j;i} = 0, \qquad (146)$$

Tensor energii - pędu płynu doskonałego

$$T^{ij} = (\rho + p)u^i u^j - pg^{ij}, \qquad (147)$$

- gdzie ρ - gęstość energii, p - ciśnienie, u^i - czteroprędkość, która we współporuszją- cym się układzie ma postać $u^i = \delta^i_0$, [14].

- mamy ponadto:

$$T^{ij}{}_{;j} = 0. \tag{148}$$

<u>**Równania Einsteina**</u>

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \kappa T_{ij}, \tag{149}$$

- gdzie współczynnik κ otrzymujemy z porównania równań Einsteina w przybliżeniu słabego pola grawitacyjnego do równania Poissona na potencjał grawitacyjny. Otrzymujemy $\kappa = -8\pi G$, możemy zatem napisać:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} R = -8\pi G T_{ij}. \tag{150}$$

- Obliczając ślad obu stron równania (150) otrzymujemy:

$$R = 8\pi G T,$$

gdzie $T \equiv T^k_k$. Korzystając z tej zależności możemy równania Einsteina zapisać w innej, wygodniejszej formie:

$$R^i{}_j = -8\pi G \left(T^i{}_j - \frac{1}{2} \delta^i{}_j T \right). \tag{151}$$

A.2 Rozwiązania modelu Friedmana - Robertsona - Walkera

Zapisując równania Einsteina (151) w przypadku wszechświata otwartego opisywanego elementem liniowym Robertsona - Walkera, otrzymujemy równania Friedmana:

$$\frac{8\pi G}{3}\rho = \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{1}{a^2}, \tag{152}$$

$$8\pi G p = -2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{1}{a^2}, \tag{153}$$

Równania te trzeba jeszcze uzupełnić równaniem stanu, które pozwoli nam na znalezienie rozwiązań zarówno na czynnik skali $a(t)$ jak i na gęstość energii $\rho(t)$[19]. W trakcie ewolucji wszechświata możemy wyróżnić trzy epoki, w których obowiązują następujące równania stanu:

- epoka inflacyjna
$$p(t) = -\rho(t),$$
- epoka dominacji promieniowania
$$p(t) = \frac{1}{3}\rho(t),$$
- epoka dominacji materii
$$p(t) = 0.$$

Wszystkie te równania można zapisać w jednolitej formie:

$$p(t) = (\gamma - 1)\rho(t), \tag{154}$$

gdzie $\gamma = 0$ odpowiada *epoce inflacyjnej*, $\gamma = 4/3$ odpowiada *epoce promieniowania* oraz $\gamma = 1$ odpowiada *epoce materii*.

Dalsze obliczenia będziemy prowadzić używając równania stanu w postaci (154), tak by uwzględniać jednocześnie trzy przypadki.

Używając (154) możemy równania Friedmana zapisać w następującej postaci:

$$\dot{\rho} + 3\gamma\rho\frac{\dot{a}}{a} = 0, \tag{155}$$

$$2\ddot{a}a + (3\gamma - 2)[\dot{a}^2 - 1] = 0. \tag{156}$$

Równanie (155) można otrzymać bezpośrednio z warunku bezdywergencyjności tensora energii - pędu: $T^{ij}{}_{;j}$.

[19]Dzięki równaniu stanu także na ciśnienie $p(t)$.

Rozwiązanie pierwszego z tych równan można podać od razu:

$$\rho(t) = \rho_0 \left(\frac{a(t)}{a_0}\right)^{-3\gamma}, \tag{157}$$

gdzie zadaliśmy warunki początkowe $a(t_0) \equiv a_0$ oraz $\rho(t_0) \equiv \rho_0$.

Rozwiązanie równania (156) łatwiej znaleźć zapisując je za pomocą czasu konforemnego η (patrz równanie 124), otrzymujemy wtedy równanie:

$$2\frac{a^{''}(\eta)}{a(\eta)} - (3\gamma - 4)\frac{a^{'2}(\eta)}{a^2(\eta)} + (3\gamma - 2) = 0,$$

gdzie primem oznaczyliśmy pochodną po czasie konforemnym: $' \equiv d/d\eta$.

Podstawiając:

$$a(\eta) \equiv y^{\beta}(\eta), \tag{158}$$

gdzie współczynnikiem β oznaczyliśmy wyrażenie:

$$\beta \equiv \frac{2}{3\gamma - 2}, \tag{159}$$

otrzymujemy proste[20] równanie na funkcję $y(\eta)$:

$$y^{''}(\eta) - \frac{1}{\beta^2}(\eta) = 0.$$

Rozwiązanie tego równania możemy przedstawić w postaci:

$$y(\eta) = A \sinh\left(\frac{\eta}{|\beta|} + \phi\right),$$

gdzie A i ϕ to dwie dowolne stałe. Zatem rozwiązanie na czynnik skali wygląda następująco:

$$a(\eta) = B \sinh^{\beta}\left(\frac{\eta}{|\beta|} + \phi\right),$$

Zadając warunki początkowe w postaci:

$$a(\eta_0) \equiv a_0$$

oraz

$$a^{'}(\eta_0) \equiv a_0^{'} \equiv H_0 a_0^2,$$

[20] W przypadku gdy człon kosmologiczny jest niezerowy $\Lambda \neq 0$ otrzymalibyśmy bardzo skomplikowane równanie nieliniowe.

gdzie H_0 to wartość stałej Hubble'a w czasie η_0, otrzymujemy:

$$\phi = \operatorname{artanh}\left(\frac{\beta}{|\beta| H_0 a_0}\right) - \frac{\eta_0}{|\beta|},$$

$$B = \frac{a_0}{\sinh^\beta\left(\frac{\eta_0}{|\beta|} + \phi\right)}.$$

Definiując nową zmienną:

$$\chi \equiv \frac{\eta}{|\beta|} + \phi, \tag{160}$$

czynnik skali możemy zapisać w postaci:

$$a(\chi) = a_0 \frac{\sinh^\beta \chi}{\sinh^\beta \chi_0}, \tag{161}$$

gdzie $\beta = -1$ odpowiada *epoce inflacyjnej*, $\beta = 1$ *epoce promieniowania* oraz $\beta = 2$ *epoce materii*.

Zajmijmy się dokładniej warunkami początkowymi w epoce materii. Przyjmiemy, że η_0, a_0 oraz H_0 odpowiadają obecnym wartościom tych parametrów.

Częściej warunki początkowe określa się za pomocą stałej Hubble'a oraz parametru gęstości Ω. Z równań Friedmanna otrzymujemy:

$$1 - \Omega_0 = \frac{1}{(H_0 a_0)^2}, \tag{162}$$

pozwala nam to wyrazić obecną wartość czynnika skali a_0 przez parametr gęstości Ω_0.

Czas konforemny η związany jest z czasem kosmologicznym t z dokładnością do stałej addytywnej, która nie ma znaczenia, gdy potrzebna nam jest różnica między dwoma zdarzeniami w tej samej epoce. W rozdziale 5. będzie nam potrzebna odległość czasowa do momentu rekombinacji:

$$\eta_0 - \eta_{rek} = ?. \tag{163}$$

Zakładając, że przesunięcie ku czerwieni momentu rekombinacji $z_{rek} \approx 1500$, możemy wyrazić szukaną odległość (163) przez standartowe parametry jakimi są:

- przesunięcie ku czerwieni $z_{rek} \approx 1500$
- obecna wartość parametru gęstości $\Omega_0 \approx 0.3$.

Korzystając z definicji przesuniącia ku czerwieni oraz rozwiązania (161) dostajemy:

$$z_{rek} + 1 = \frac{a(\eta_0)}{a(\eta_{rek})} = \frac{\sinh^2 \chi_0}{\sinh^2 \chi_{rek}}.$$

Wykorzystując z kolei definicję zmiennej χ (160) oraz równanie (162), możemy napisać:

$$\eta_{rek} - \eta_0 = -2\mathrm{artanh}\sqrt{1-\Omega_0} + 2\mathrm{arsinh}\left(\frac{1}{\sqrt{z_{rek}+1}}\sinh\left(\mathrm{artanh}\sqrt{1-\Omega_0}\right)\right). \quad (164)$$

Dla dodatnich argumentów ($x > 0$) funkcje cyklometryczne mają następujące własności:

$$\mathrm{artanh}x = \mathrm{arsinh}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{arcosh}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$\mathrm{arsinh}x = \mathrm{arcosh}\sqrt{1+x^2}.$$

Powyższe własności pozwalają na znaczne uproszczenie wyrażenia (164):

$$\eta_0 - \eta_{rek} = 2\mathrm{arcosh}\sqrt{\Omega_0^{-1}} - 2\mathrm{arcosh}\sqrt{1+\frac{\Omega_0^{-1}-1}{1+z_{rek}}} \approx 2.34. \quad (165)$$

A.3 Równanie fal grawitacyjnych i niezmienniki transformacji cechowania

Już w 1946 roku E.M Lifszyc [17] wyprowadził ogólną postać liniowych równań na małe zaburzenia grawitacyjne w przestrzennie jednorodych i izotropowych modelach kosmologicznych. Zaburzenia takie zapisujemy w postaci:

$$g_{ij} = g_{ij}^{(0)} + h_{ij}, \tag{166}$$

gdzie h_{ij} - małe zaburzenia ($h_{ij} \ll g_{ij}^{(0)}$), $g_{ij}^{(0)}$- metryka niezaburzona (tło na którym ewoluują zaburzenia).

W naszych rozważaniach tło, na którym powstają i ewoluują zaburzenia stanowić będzie czasoprzestrzeń opisywana elementem liniowym Robertsona - Walkera. Z metryki tła wyodrębniamy część przestrzenną niezależną od czasu:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) d\sigma^2, \tag{167}$$

daną przez:

$$d\sigma^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = \frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\phi d\phi^2, \tag{168}$$

jest to bardzo ważna podprzestrzeń, którą za autorami pracy [15] będziemy nazywać przestrzenią niezmienniczą Σ. Tensor krzywizny, tensor Ricciego i skalar krzywizny na Σ wyglądają następująco [15]:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \gamma_{\alpha\delta}\gamma_{\beta\gamma} - \gamma_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\delta}, \tag{169}$$

$$R_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}, \tag{170}$$

$$R = -6. \tag{171}$$

Zaburzenia metryki, h_{ij}, z geometrycznego punktu widzenia możemy podzielić na trzy kategorie [26, 15]: skalarne, wektorowe i tensorowe. Podziału tego dokonujemy ze względu na właściwości transformacyjne obiektów, z których składa się zaburzenie h_{ij} podczas zmiany układu współrzędnych w przestrzeni Σ. Pierwsza kategoria obejmuje obiekty transformujące się jak skalar, druga obejmuje obiekty transformujące się jak wektor z wyłączeniem części transformującej się jak skalar. Wektor możemy bowiem rozłożyć na:

$$A_\alpha = A_\alpha^{(w)} + A_{|\alpha}^{(s)},$$

gdzie $A^{(s)}$ i $A_\alpha^{(w)}$ określone są równaniami:

$$A_{|\alpha}^{(s)|\alpha} = A_\alpha{}^{|\alpha}, \qquad A_\alpha^{(w)|\alpha} = 0,$$

natomiast | oznacza pochodną kowariantną w przestrzeni niezmienniczej Σ, i oczywiście $A^{(s)}$ transformuje się jak skalar. W końcu trzecia kategoria obejmuje obiekty transformujące się jak tensory drugiego rzędu $A_{\alpha\beta}$, lecz z wyłączeniem części transformującej się jak wektory i skalary, czyli innymi słowy bezśladowe tensory drugiego rzędu ze znikającą dywergencją:

$$A_{\alpha}{}^{\alpha} = 0, \qquad A_{\alpha\beta}{}^{|\beta} = 0.$$

Należy zauważyć, że ten sposób klasyfikacji wyczerpuje wszystkie możliwości co do postaci h_{ij}, gdyż wszystkie składniki h_{ij} można wyrazić poprzez obiekty należące do wyżej wymienionych trzech kategorii. Co do części przestrzennej $h_{\alpha\beta}$ nie mamy wątpliwości, wyraz h_{00} możemy utworzyć z obiektu, który jest na hiperpowierzchni Σ funkcją skalarną, $h_{00} = \psi$, część $h_{0\alpha}$ to po prostu dowolny wektor, który możemy rozłożyć na część transformującą się jak skalar i na część czysto wektorową: $h_{0\alpha} = A^{(s)}_{|\alpha} + A^{(w)}_{\alpha}$. Liczba dowolnych funkcji, z których możemy złożyć h_{ij} wynosi odpowiednio 4 - dla zaburzeń skalarnych, 4 - dla zaburzeń wektorowych i 2 - dla zaburzeń tensorowych, czyli łączna liczba składowych 10 zgadza się z liczbą niezależnych składowych symetrycznej metryki zaburzającej h_{ij}.

Z fizycznego punktu widzenia podział ten ma także duże znaczenie, gdyż zaburzenia poszczególnych typów ewoluują niezależnie od siebie i dlatego mogą być rozpatrywane osobno [3, 26].

Zaburzenia poszczególnych typów mogą być rozłożone w bazie odpowiednio skalarnych, wektorowych i tensorowych funkcji harmonicznych na podprzestrzeni niezmienniczej Σ, które opisujemy w osobnym dodatku.

Zauważmy, że - z matematycznego punktu widzenia - w naszych rozważaniach możemy wyróżnić dwie czasoprzestrzenie: pierwszą - fikcyjną - czasoprzestrzeń niezaburzoną (tło), którą w naszym przypadku jest otwarta czasoprzestrzeń Friedmanna - Robertsona - Walkera, oraz drugą - fizyczną - czasoprzestrzeń zaburzoną. Wzajemnie jednoznaczny związek pomiędzy punktami w czasoprzestrzeni tła a punktami w fizycznej czasoprzestrzeni nazywamy wyborem cechowania [3]. Zmiana tego związku, nie zmieniająca jednak współrzędych w czasoprzestrzeni tła, zwana jest *transformacją cechowania.* Trzeba tutaj odróżniać transformację cechowania od zwykłej transformacji współrzędnych, która zmienia oznaczenia punktów w obydwu czasoprzestrzeniach przy niezmienionej odpowiedniości pomiędzy punktami na obu czasoprzestrzeniach.

Perturbację pewnej wielkości rozumie się jako różnicę w jej wartości w punkcie czasoprzestrzeni fizycznej i w odpowiadającemu temu punktowi punkcie czasoprzestrzeni tła. Transformacja cechowania wywołuje transformację współrzędnych w czasoprzestrzeni fizycznej i co najważniejsze, zmienia punkty w czasoprzestrzeni tła odpowiadające danym punktom w czasoprzestrzeni fizycznej. Mamy bowiem:

$$t \longrightarrow t + \xi^0, \qquad x^{\alpha} \longrightarrow x^{\alpha} + \xi^{\alpha}, \tag{172}$$

gdzie ξ^i jest czterowektorem. W przypadku liniowej teorii zaburzeń możemy jedynie rozważać infinitezymalne transformacje cechowania [15]. Powyższa swoboda wyboru cechowania może pozostawić ślady w rozwiązaniach równań na zaburzenia poszczególnych typów, otrzymujemy wtedy tak zwane *fałszywe mody cechowania*, które mogą być usunięte przez transformację cechowania i nie mają żadnego fizycznego znaczenia [3]. By ustrzec się tego niepotrzebnego skomplikowania rozważań zapisuje się poszczególne równania w języku wielkości, które są niezmiennicze ze względu na transformacje cechowania. Dla konkretnego typu zaburzeń, możliwe transformacje cechowania to są takie transformacje postaci (172), które możemy utworzyć z obiektów tego samego typu co zaburzenie.

Perturbacje skalarne metryki sprzęgają się z perturbacjami gęstości $\delta\rho$ oraz z perturbacjami pola skalarnego (inflatonu) $\delta\phi$, które oczywiście także mają charakter skalarny i dopiero odpowiednia kombinacja tych wszystkich zaburzeń tworzy wielkość niezmienniczą ze względu na transformacje cechowania zachowujące skalarny charakter zaburzeń.

Z kolei zaburzenia wektorowe sprzęgają się z zaburzeniami prędkości δv^{α} - innymi słowy zaburzają prędkość ruchu cząstek. Zaburzenia tensorowe nie sprzęgają się z żadnymi innymi zaburzeniami. Takie zaburzenia - zwane falami grawitacyjnymi - dzięki swoim własnościom transformacyjnym są niezmiennikami transformacji cechowania. Nie można bowiem z obiektów transformujących się jak bezśladowe i bezdywergencyjne tensory drugiego rzędu utworzyć skalara, ani wektora - co uniemożliwia transformację typu (172). Co oznacza, że w równaniach na tensorowe zaburzenia metryki nie ma ukrytych niefizycznych modów związanych z wyborem warunków cechowania.

Zaburzenia takie reprezentują swobodne fale grawitacyjne i w najogólniejszej postaci możemy je zapisać:

$$g_{ij} = g_{ij}^{(0)} + h_{ij}, \tag{173}$$

gdzie h_{ij} spełnia dodatkowo:

$$h_{00} = h_{0i} = h_{i0} = 0, \qquad h_{\alpha}{}^{\alpha} = 0, \qquad h_{\alpha\beta}{}^{|\beta} = 0. \tag{174}$$

Należy zauważyć, że powyższe warunki zapewniają zachowanie synchroniczności w czasoprzestrzeni zaburzonej.

W przypadku takich zaburzeń zakładając dodatkowo, że:

$$\delta\rho = \delta\phi = \delta v^{i} = 0, \tag{175}$$

dostajemy:

$$\begin{aligned} \delta T^{i}_{j} &= \delta\left[(\rho+p)u^{k}u^{i}\right] g_{ki}^{(0)} + (\rho+p)u^{k}u^{i}h_{kj} - \delta^{i}{}_{j}\delta p = \\ &= (\rho+p)\delta^{k}{}_{0}\delta^{i}{}_{0}h_{kj} = (\rho+p)\delta^{i}_{0}h_{0j} = 0, \end{aligned} \tag{176}$$

w podobny sposób otrzymujemy:

$$\delta T = \delta(\rho - 3p) = 0. \tag{177}$$

Zatem korzystając z (151) otrzymujemy równanie na zaburzenie równań Einsteina:

$$\delta R^{i}{}_{j} = -8\pi G\left(\delta T^{i}_{j} - \frac{1}{2}\delta^{i}{}_{j}\delta T\right) = 0, \tag{178}$$

gdzie δR^i_j to zaburzenie tensora Ricciego.

Zajmniemy się teraz równaniem opisującym fale grawitacyjne, czyli równaniem na tensorowe zaburzenia metryki. Obliczenia będziemy prowadzić z dokładnością do wyrazów pierwszego rzędu.

Z warunku:

$$g_{ij}g^{kj} = \left(g^0_{ij} + \delta g_{ij}\right)\left(g^{(0)kj} + \delta g^{kj}\right) = \delta^k_i \tag{179}$$

otrzymujemy z dokładnością do wyrazów pierwszego rzędu w h_{ij}

$$\delta g_{ij} = h_{ij} \Longrightarrow \delta g^{ij} = -h^{ij}, \tag{180}$$

gdzie indeksy podnosimy za pomocą niezaburzonej metryki $g^{(0)}_{ij}$. Z (126) otrzymujemy:

$$\delta\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{(0)im}(h_{jm,k} + h_{km,j} - h_{jk,m}) - h^i_m\Gamma^m{}_{jk}, \tag{181}$$

korzystając następnie z definicji pochodnej kowariantnej (130-132) możemy zapisać zaburzenie współczynników koneksji w postaci zwanej nieraz równaniem Lifszyca:

$$\delta\Gamma^i{}_{jk} = \frac{1}{2}g^{(0)im}\left(h_{jm;k} + h_{km;j} - h_{jk;m}\right). \tag{182}$$

Następnie warto zauważyć, że:

$$\delta\Gamma^k{}_{jk} = \frac{1}{2}h^l_{l\ ;k} = \frac{1}{2}h_{;k} = 0. \tag{183}$$

Ze wzoru (142) dostajemy tzw. równanie Palatiniego na zaburzenie tensora Ricciego [14]:

$$\delta R_{ij} = \delta\Gamma^m{}_{jm;i} - \delta\Gamma^m{}_{ij;m}, \tag{184}$$

co w naszym przypadku dzięki (183) redukuje się do:

$$\delta R_{ij} = -\delta\Gamma^m_{ij;m}. \tag{185}$$

Ostatecznie korzystając z równania Lifszyca (182) dostajemy:

$$\delta R_{ij} = -\frac{1}{2}\left[g^{(0)mn}\left(h_{in;j} + h_{jn;i} - h_{ij;n}\right)\right]_{;m} = -\frac{1}{2}\left(h^m{}_{i;j} + h^m{}_{j;i} - h_{ij}{}^{;m}\right)_{;m}. \tag{186}$$

Zaburzenie tensora Ricciego z podniesionym wskaźnikiem $R^i{}_j$ wygląda następująco:

$$\delta R^i{}_j = \delta\left(g^{ik}R_{kj}\right) = g^{(0)ik}\delta R_{kj} - h^{ik}R^{(0)}_{kj}. \tag{187}$$

Równanie (178) przybiera postać:

$$-g^{(0)ik}\left(h^m{}_{k;j;m} + h^m{}_{j;k;m}\right) + h^i_{j;m}{}^{;m} - 2h^{ik}R^{(0)}_{kj} = 0. \tag{188}$$

Nietrywialne równanie dostajemy jedynie dla wskaźników przestrzennych $i = \alpha$, $j = \beta$:

$$- g^{(0)\alpha\delta} \left(h^{\gamma}{}_{\delta;\beta;\gamma} + h^{\gamma}{}_{\beta;\delta;\gamma} \right) + h^{\alpha}_{\beta;\gamma}{}^{;\gamma} + h^{\alpha}_{\beta;0}{}^{;0} - 2h^{\alpha\gamma} R^{(0)}_{\gamma\beta} = 0, \tag{189}$$

Następnie korzystając z tożsamości:

$$h_{ik;j;m} - h_{ik;m;j} = h_{pk} R^{p}{}_{ijm} + h_{iq} R^{q}{}_{kjm}$$

oraz:

$$h^{pm} R_{pijm} = h^{pm} R_{pjim},$$

rozpisujemy człony w nawiasie okrągłym otrzymując:

$$h_{\alpha\beta;\gamma}{}^{;\gamma} + h_{\alpha\beta;0}{}^{;0} - 2h^{\gamma\delta} R^{(0)}_{\gamma\alpha\beta\delta} = 0. \tag{190}$$

Rozpisując konsekwentnie wszystkie człony otrzymujemy ostatecznie:

$$\ddot{h}^{\alpha}_{\beta} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{h}^{\alpha}_{\beta} - \frac{2}{a^2} h^{\alpha}_{\beta} - \frac{g^{(0)\gamma\delta}}{a^2} h^{\alpha}_{\beta|\gamma|\delta} = 0, \tag{191}$$

gdzie kropka oznacza pochodną po czasie.

A.4 Funkcje harmoniczne w trójwymiarowej przestrzeni z ujemną krzywizną

W przestrzeni Σ z elementem liniowym:

$$d\sigma^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = \frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right),$$

operator Laplace'a w działaniu na funkcję skalarną Ψ przyjmuje postać:

$$\Delta\Psi = \gamma^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\Psi = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\sqrt{\gamma}\gamma^{\alpha\beta}\frac{\partial\Psi}{\partial x^\beta}\right), \tag{192}$$

gdzie γ to wyznacznik metryki $\gamma_{\alpha\beta}$, natomiast ∇_α to pochodna kowariantna w przestrzeni Σ: $\nabla_\alpha\Psi \equiv \Psi_{;\alpha}$.

Równanie na funkcje i wartości własne operatora Laplace'a można zapisać w postaci:

$$\Delta\Psi + k^2\Psi = 0, \tag{193}$$

gdzie widmo wartości własnych $-k^2$ nie jest jeszcze znane. Funkcje własne odpowiadające wartościom własnym mniejszym od -1 nazywamy *modami podkrzywiznowymi.*[21] Wiadomo ponadto [23, 12], że mody podkrzywiznowe ($k^2 > 1$) tworzą w przestrzeni Σ kompletną ortogonalną (ortonormalną) bazę funkcji całkowalnych z kwadratem (L^2), dlatego też w naszych rozważaniach ograniczymy się do modów podkrzywiznowych, które pozwolą na konstrukcję odpowiednich zaburzeń powstałych z pierwotnych kwantowych fluktuacji próżni. Jednak należy przynajmniej wspomnieć, że z matematycznego punktu widzenia do konstrukcji najbardziej ogólnego, jednorodnego, gaussowskiego pola skalarnego potrzebne są jeszcze tak zwane mody nadkrzywiznowe[22] z $0 < k^2 < 1$, których kosmologiczne implikacje dyskutowane są min. w pracach[12, 23, 37]. Są one oczywiście nienormowalne oraz w ograniczonym obszarze stają się liniowo zależne od modów podkrzywiznowych.

Zaburzenia tensorowe konstruujemy przez odpowiednie kowariantne różniczkowanie pól skalarnych, przy czym ważne jest to, że różniczkowanie jednorodnych pól skalarnych zawsze prowadzi do powstania jednorodnych pól tensorowych, lecz nie wyczerpuje to wszystkich możliwych przypadków tworzenia jednorodnych pól tensorowych, ponieważ zróżniczkowanie niejednorodnych modów skalarnych odpowiadających wartościom własnym $k^2 = 1 - n^2$, gdzie n jest liczbą całkowitą, też prowadzi [12] do powstania jednorodnych modów tensorowych. Fizycznym przykładem takich modów są przypadki $k^2 = 0$ oraz $k^2 = -3$ odpowiadające za fluktuacje powstałe w ściankach bąbla inflacyjnego [23].

[21]Ang. *sub-curvature modes.*
[22]Ang. *super-curvature modes.*
[23]Ang. *bubble-wall modes.*

Od tej chwili mówiąc o *falach grawitacyjnych* będziemy mieli na myśli zaburzenia powstałe z superpozycji modów podkrzywiznowych. W takim przypadku wygodnie jest przeskalować widmo fal grawitacyjnych w następujący sposób:

$$k^2 = p^2 + 1, \tag{194}$$

gdzie $p^2 > 0$, jak się okaże, tworzy ciągłe widmo fal grawitacyjnych.

Po tym wstępie możemy wrócić do szukania funkcji własnych operatora Laplace'a. Równanie (193) pozwala na rozseparowanie zmiennych $\Psi(r,\theta,\phi) = R(r)Y_{lm}(\theta,\phi)$, gdzie funkcje $Y_{lm}(\theta,\phi)$ okażą się być zwykłymi harmonikami sferycznymi z trójwymiarowej przestrzeni Euklidesowej [24]. Otrzymujemy bowiem:

$$\Delta\Psi = \frac{\sqrt{1+r^2}}{r^2}Y_{lm}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sqrt{1+r^2}\frac{\partial R}{\partial r}\right)\right] + \frac{R}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y_{lm}}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial^2\phi}\right].$$

Możemy teraz wykorzystać równanie definiujące harmoniki sferyczne:

$$\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y_{lm}}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial^2\phi}\right] + l(l+1)Y_{lm} = 0,$$

gdzie $l = 0, 1, 2, ...$, wówczas otrzymamy:

$$\Delta\Psi = \frac{\sqrt{1+r^2}}{r^2}Y_{lm}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sqrt{1+r^2}\frac{\partial R}{\partial r}\right)\right] + \frac{1}{r^2}l(l+1)RY_{lm}. \tag{195}$$

Z równań (193,195) dostajemy równanie na ostatnią nieznaną funkcję $R(r)$:

$$\frac{\sqrt{1+r^2}}{r^2}\left[\frac{d}{dr}\left(r^2\sqrt{1+r^2}\frac{dR}{dr}\right)\right] + \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + k^2\right]R = 0. \tag{196}$$

Następnie wprowadzając nową zmienną α:

$$r \equiv \sinh\alpha, \tag{197}$$

oraz nową funkcję Π

$$\Pi(\alpha) \equiv R(\sinh\alpha)\sqrt{\sinh\alpha}, \tag{198}$$

otrzymujemy równanie na funkcje Π:

$$\frac{1}{\sinh\alpha}\frac{d}{d\alpha}\left(\sinh\alpha\frac{d\Pi}{d\alpha}\right) + \left[k^2 - \frac{3}{4} - \frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2}{\sinh^2\alpha}\right]\Pi = 0. \tag{199}$$

.

[24] Dlatego też od razu użyliśmy odpowiednich oznaczeń.

Korzystając z następujących własności funkcji hiperbolicznych:

$$\sinh(iz) = i\sin z, \qquad \cosh(iz) = \cos z,$$

i wprowadzając zmienną $\xi = i\alpha$, widzimy, że równanie (199) ma rozwiązanie w postaci stowarzyszonych funkcji Legendre'a pierwszego rodzaju [14]:

$$\Pi(\alpha) = P_\lambda{}^{-l-1/2}(\cosh\alpha), \tag{200}$$

gdzie λ jest dowolnym pierwiastkiem równania:

$$\lambda(\lambda+1) = \frac{3}{4} - k^2 = -\frac{1}{4} - p^2,$$

wybieramy jedno rozwiązanie:

$$\lambda = -\frac{1}{2} + \sqrt{1-k^2} = -\frac{1}{2} + ip. \tag{201}$$

Podane wyżej rozwiązanie jest jednym z dwóch liniowo niezależnych rozwiązań równania (199), drugie rozwiązanie odrzuciliśmy, ponieważ nie jest ono regularne dla $\alpha \to 0$ [14]. Korzystając z definicjii funkcji hipergeometrycznej:

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z) \equiv 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}\frac{z^n}{n!},$$

oraz jej związku ze stowarzyszonymi funkcjami Legendre'a [14]:

$$P_{-1/2+ip}{}^{-l-1/2}(\cosh\alpha) = \frac{(\coth\frac{\alpha}{2})^{-l-1/2}}{\Gamma(3/2+l)} F(\frac{1}{2}-ip, \frac{1}{2}+ip; \frac{3}{2}+l; -\sinh^2\frac{\alpha}{2}), \tag{202}$$

widać, że funkcja radialna Π (200) jest funkcją rzeczywistą, mimo występowania zespolonego indeksu w funkcji Lagrange'a. Dla całkowitych wartości l, a z takimi mamy doczynienia, wyrażenie na funkcję R (198) znacznie się upraszcza [14, 23, 12]:

$$R(\alpha) = R_{pl}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(-1)^{l+1}\sinh^l\alpha}{\sqrt{p^2(p^2+1)\cdots(p^2+l^2)}} \frac{d^{l+1}(\cos p\alpha)}{d(\cosh\alpha)^{l+1}}, \tag{203}$$

gdzie uwzględniliśmy także czynnik normalizacyjny zgodnie z żądaniem:

$$\int_0^\infty R_{pl}(\alpha)R_{p'l'}(\alpha)\sinh^2\alpha d\alpha = \delta_{ll'}\delta(p-p'). \tag{204}$$

Skalarne funkcje harmoniczne

$$\Psi_{plm}(\alpha,\theta,\phi) = R_{pl}(\alpha)Y_{lm}(\theta,\psi), \tag{205}$$

tworzą ortonormalną bazę funkcji z przestrzeni $L^2(\Sigma \to \Sigma)$. Spełniają zatem:

$$\int \Psi_{plm} \bar{\Psi}_{p'l'm'} \sinh^2\alpha \, \sin\theta \, d\alpha \, d\theta \, d\phi = \delta_{mm'}\delta_{ll'}\delta(p-p'), \tag{206}$$

gdzie kreska nad funkcją oznacza sprzężenie zespolone.

Mając skalarne funkcje harmoniczne możemy skonstruować tensorowe funkcje harmoniczne ${\Psi_\alpha}^\beta$, [25] które spełniają warunki:

$$ {\Psi_\alpha}^\alpha = 0, \qquad {\Psi_\alpha}^\beta{}_{;\beta} = 0. \tag{207}$$

Niezależnych składowych symetrycznego tensora 3×3 jest 6, równania (207) narzucają dodatkowo 4 warunki - pozostają zatem jeszcze dwie niezależne składowe. Te dodatkowe stopnie swobody [26] numerujemy liczbą K:

$$K = K_+, K_\times,$$

którą - w nawiązaniu do fal grawitacyjny - nazywamy polaryzacją.

Już Lifszyc w pracy [17] podał sposób konstrukcji tensorowych funkcji harmonicznych zarówno w przypadku powierzchni o stałej ujemnej jak i dodatniej krzywiźnie. Można podać także jawne wyrażenia na funkcje ${\Psi_\alpha}^\beta$, poniżej podamy wyrażenie na składową ${\Psi_1}^1$, gdzie oczywiście $x^1 = \alpha$. Składowa ta będzie nam potrzebna do obliczenia wkładu fal grawitacyjnych do anizotropii temperatury promieniowania reliktowego. Jawna postać pozostałych składowych tensorowych funkcji harmonicznych nie będzie nam potrzebna i nie będziemy ich w tej pracy zamieszczać - można ją znaleźć w literaturze np. [37, 38].

$$\Psi^{K_+ plm}{}_1{}^1(\alpha, \theta\phi) = \sqrt{\frac{(l-1)l(l+1)(l+2)}{2p^2(1+p^2)}} \frac{\Psi^{plm}(\alpha,\theta,\phi)}{\sinh^2\alpha}, \tag{208}$$

$$\Psi^{K_\times plm}{}_1{}^1(\alpha,\theta,\phi) = 0, \tag{209}$$

gdzie indeksy numerujące mody umieściliśmy na górze. Jak widać powyższa składowa ma tylko jeden możliwy stan polaryzacji - K_+.

W odróżnieniu od widma skalarnych funkcji harmonicznych, widmo tensorowych funkcji harmonicznych $-k^2$ przybiera następującą postać:

$$k^2 = p^2 + 3, \tag{210}$$

gdzie jak zwykle $p^2 > 0$. A co za tym idzie tensorowe funkcje harmoniczne spełniają równanie:

$$\Delta {\Psi_\alpha}^\beta + \left(p^2+3\right) {\Psi_\alpha}^\beta = 0. \tag{211}$$

[25] Nie należy tutaj mylić indeksów lorenzowskich z indeksami numerującymi funkcje własne.
[26] W porównaniu ze skalarnymi funkcjami harmonicznymi.

Należy też zwrócić uwagę, że nie istnieją funkcje harmoniczne z $l = 0$ (monopole) oraz z $l = 1$ (dipole) - fizycznie oznacza to, że grawiton jest cząstką o spinie 2.

Ortonormalność tensorowych funkcji harmonicznych o polaryzacji K_+:

$$\int \Psi^{K_+ plm}{}_{\mu}{}^{\nu}(\alpha,\theta,\phi)\overline{\Psi^{K_+ p'l'm'}}{}_{\nu}{}^{\mu}(\alpha,\theta,\phi)\sinh^2\!\alpha\, \sin\theta\, d\alpha\, d\theta\, d\phi = \delta_{mm'}\delta_{ll'}\delta(p-p'). \quad (212)$$

A.5 Efekt Sachsa - Wolfe'a

Anizotropia temperatury mikrofalowego promieniowania tła może być wywołana między innymi dzięki oddziaływaniu fotonów reliktowych ze zmiennym polem grawitacyjnym. Fotony dzięki temu tracą albo zyskują energię - innymi słowy mówiąc - ulegają przesunięciu ku czerwieni lub ku fioletowi. W ten sposób temperatura promieniowania reliktowego dochodzącego z różnych miejsc na sferze niebieskiej zależy od wielkości tego poczerwienienia, czyli od rozkładu i ewolucji czasowej zaburzeń pola grawitacyjnego. W roku 1967 Sachs i Wolfe jako pierwsi podali ilościowy opis tego zjawiska wyprowadzając wyrażenie na anizotropię temperatury promieniowania reliktowego w płaskim modelu Friedmana - Robertsona - Walkera [31]. W roku 1976 Anile i Motta uogólnili rozważania Sachsa i Wolfe'a na przypadek modeli hiperbolicznych i eliptycznych (otwarty i zamknięty wszechświat) [2].

Metryka tła w naszym modelu (125) po wprowadzeniu nowej wpółrzędnej α:

$$r \equiv \sinh \alpha,$$

przybiera postać:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j = a^2(\eta) \left[d\eta^2 - d\alpha^2 - \sinh^2 \alpha \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \right]. \tag{213}$$

Fotony poruszają się po geodezyjnych zerowych:

$$k^i{}_{;j} k^j = k^i{}_{,j} k^j + \Gamma^i{}_{jk} k^j k^k = 0, \tag{214}$$

gdzie:

$$k^i \equiv \frac{dx^i}{du},$$

jest wektorem zerowym:

$$k^i k_i = 0,$$

a u jest parametrem afinicznym parametryzującym geodezyjną po której porusza się foton.

Będzie nam potrzebne rozwiązanie, równania (214) zapisanego w metryce niezaburzonej (213), odpowiadające ruchowi radialnemu fotonów, gdyż zmiana współrzędnych θ i ϕ wzdłuż geodezyjnej przeczyłaby przestrzennej izotropowości wszechświata - zatem byłaby niezgodna ze słabą zasadą kosmologiczną. Rozwiązanie takie jest dobrze znane[38]:

$$k^i = \left(\frac{1}{a^2(\eta)}, -\frac{1}{a^2(\eta)}, 0, 0 \right). \tag{215}$$

Niech

$$K^i = k^i + \delta k^i, \tag{216}$$

oznacza wektor falowy w zaburzonej czasoprzestrzeni:

$$ds^2 = \left(g_{ij} + h_{ij} \right) dx^i dx^j, \tag{217}$$

gdzie g_{ij} opisane jest równaniem (213) a zaburzenia h_{ij} reprezentują fale grawitacyjne, które spełniają warunki (174). Równanie geodezyjnej z dokładnością do wyrazów pierwszego rzędu w δk^i oraz h_{ij} wygląda następująco:

$$\left(\delta k^i{}_{,j} + \Gamma^i{}_{jk}\delta k^k + \delta\Gamma^i{}_{jk}k^k\right)k^j + \left(k^i{}_{,j} + \Gamma^i{}_{jk}k^k\right)\delta k^j = 0, \tag{218}$$

gdzie $\Gamma^i{}_{jk}$ to współczynniki koneksji w przestrzeni niezaburzonej (213), natomiast $\delta\Gamma^i{}_{jk}$ to poprawki pierwszego rzędu do współczynników Christoffela, które opisane są tzw. równaniem Lifszyca (182):

$$\delta\Gamma^i{}_{jk} = \frac{1}{2}g^{im}\left(h_{jm;k} + h_{km;j} - h_{jk;m}\right). \tag{219}$$

Do dalszych rozważań będzie na potrzebne wyrażenie na δk^0, przyjmując w równaniu (218) $i = 0$ oraz wyliczając:

$$\delta\Gamma^0{}_{jk}k^k k^j = -\frac{1}{2a^4}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{h_{11}}{a^2}\right),$$

$$\delta k^0{}_{,j}k^j + 2\Gamma^0{}_{0k}\delta k^k k^0 + 2\Gamma^0{}_{1k}\delta k^k k^1 + k^0{}_{,0}\delta k^0 = \frac{1}{a^2}\frac{d}{du}\left(a^2\delta k^0\right),$$

otrzymujemy:

$$\frac{d}{du}\left(\delta k_0\right) = \frac{1}{2a^2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{h_{11}}{a^2}\right). \tag{220}$$

Zmiana δk_0 wzdłuż geodezyjnej, od punktu emisji fotonu (E) do momentu zarejestrowania go w punkcie obserwacji $(\mathcal{O})$, wynosi zatem:

$$\delta k_0(\mathcal{O}) - \delta k_0(E) = \frac{1}{2}\int_{u_E}^{u_\mathcal{O}}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{h_{11}}{a^2}\right)\frac{du}{a^2}. \tag{221}$$

Jak pokazaliśmy w rozdziale 1.3 temperatuta promieniowania reliktowego od momentu rekombinacji do obecnej chwili obniża się w sposób adiabatyczny, zgodnie z prawem (2):

$$T(t) = T_0\frac{a_0}{a(t)} = T_0(1+z), \tag{222}$$

gdzie indeks zero odnosi się do chwili obecnej, natomiast poczerwienienie z daje się wyrazić następująco [31, 2, 38]:

$$1 + z = \frac{\left(u^i k_i\right)(E)}{\left(u^i k_i\right)(\mathcal{O})}, \tag{223}$$

gdzie u^i są to czteroprędkości współpruszających się z materią, odpowiednio: emitera i obserwatora oraz k_i to czterowektor falowy fotonu w momencie emisji (E) i rejestracji $(\mathcal{O})$.

W przestrzeni zaburzonej przez fale grawitacyjne wektor falowy fotonu to oczywiście wektor K^i określony równaniem (216), natomiast czteroprędkość przenosi się bez zmian z przestrzeni niezaburzonej ($u^i = 1/a\delta_0^i$), gdyż fale grawitacyjne nie powodują zaburzeń prędkości.

Ze wzoru (223) dostajemy - z dokładnością do wyrazów liniowych w δk^i - wyrażenie na poczerwienienie:

$$1 + z + \delta z = \frac{a(\mathcal{O})}{a(E)} \left(1 + \delta k_0(E) - \delta k_0(\mathcal{O})\right). \tag{224}$$

Obliczymy teraz zaburzenie temperatury promieniowania reliktowego. Niech T_* będzie temperaturą promieniowania reliktowego tuż po rekombinacji , która -zakładamy- jest stała na całej powierzchni ostatniego rozpraszania, natomiast T_0 temperaturą zerowego rzędu rejestrowaną obecnie przez obserwatora, oraz $T = T_0 + \delta T_0$, gdzie δT_0 oznacza liniowe zaburzenie temperatury rejestrowanej przez obserwatora.

Z zależności (222) możemy wyznaczyć związki między tymi temperaturami:

$$T_0 = T_* \frac{a(E)}{a(\mathcal{O})}, \tag{225}$$

$$T = T_0 + \delta T_0 = \frac{T_0}{1 + z + \delta z}, \tag{226}$$

które prowadzą do:

$$\frac{\delta T_0}{T_0} = \frac{1}{1 + z + \delta z} \frac{a(\mathcal{O})}{a(E)} - 1. \tag{227}$$

Wykorzystując równania (224) i (221) otrzymujemy ostatecznie:

$$\frac{\delta T_0}{T_0} = \frac{1}{2} \int_{y_E}^{y_{\mathcal{O}}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{h_{11}}{a^2}\right) dy, \tag{228}$$

gdzie wprowadziliśmy nową zmienną całkowania:

$$dy \equiv \frac{dv}{a^2}. \tag{229}$$

Rozwiązanie (215) mówi nam jak zmieniają się współrzędne wzdłuż geodezyjnej wraz z parametrem y:

$$\eta = y + \eta(y = 0),$$
$$\alpha = -y + \alpha(y = 0),$$
$$\theta = const, \quad \phi = const.$$

Przyjmując $y_E = 0$ oraz $\alpha_{\mathcal{O}} = 0$[27], otrzymujemy:

$$\eta(y) = y + \eta_E, \tag{230}$$

[27] Oznacza to, że obserwator znajduje się w środku przestrzennego układu współrzędnych.

$$\alpha(y) = -y + \eta_{\mathcal{O}} - \eta_E. \tag{231}$$

Wypisując jawną zależność współrzędnych od parametru y dostajemy:

$$\frac{\delta T_0}{T_0}(\theta, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^{\eta_{\mathcal{O}} - \eta_E} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{h_{11}(\eta(y), \alpha(y), \theta, \phi)}{a^2(\eta(y))} \right) dy, \tag{232}$$

lub równoważnie:

$$\frac{\delta T_0}{T_0}(\theta, \phi) = \frac{1}{2} \int_0^{\eta_{\mathcal{O}} - \eta_E} \frac{\partial \, {h_1}^1(\eta(y), \alpha(y), \theta, \phi)}{\partial \eta} dy. \tag{233}$$

Literatura

[1] L.F Abbott, M.B. Wise, Nucl. Phys. **B244** (1984)

[2] A.M.Anile, S.Motta, Astrophys. J. **207**, 685 (1976)

[3] J.M.Bardeen, Phys.Rev D**22**, 1882 (1980)

[4] H.Bateman, A.Erdèlyi, **Higher tradscendental functions** (tłum. ros.) (Nauka, Moskwa 1965)

[5] M.Bucher, J.D.Cohn, Phys. Rev. D**55**, 7461 (1997)

[6] P.Coles, G.Ellis, Nature, **370**, 609 (1994)

[7] M.Demiański, **Astrofizyka relatywistyczna** (PWN, Warszawa, 1991)

[8] M.Demiański, *prywatna konsultacja*

[9] L.H.Ford, L.Parker, Phys. Rev. D**16**, 1601 (1977)

[10] J.Foster, J.D.Nightingale **Ogólna teoria względności** (PWN, Warszawa, 1985)

[11] J.Garcia-Bellido, A.Linde, *Open Hybrid Inflation*, `astro-ph/9701173` (1997)

[12] J.Garcia-Bellido, A.R.Liddle, D.H.Lyth, D.Wands, Phys. Rev. D**55**, 4596 (1997)

[13] A.H.Guth, Phys. Rev. D**23**, 347 (1981)

[14] E.R. Harrison, Rev.Mod.Phys. **39**, 862 (1967)

[15] H.Kodama, M.Sasaki, Prog. Theor. Phys. Suppl. **78**, (1984)

[16] L.D.Landau, E.M.Lifszyc, **Teoria Pola** (PWN, Warszawa, 1977)

[17] E.M Lifshitz, J. Phys. *USSR* **10**, 116 (1946)

[18] A.D.Linde, Phys. Lett B**129**, 177 (1983)

[19] A.D.Linde, **Particle Physics and Inflationary Cosmology** (Harwood, Chur, Switzerland, 1990).

[20] A.D.Linde, *Inflation with Variable* Ω, `hep-th/9503097` (1995)

[21] A.D.Linde, *Recent Progress in Inflationary Cosmology*, `astro-ph/9601004` (1996)

[22] A.D.Linde, A.Mezhlumian, Phys. Rev. D**52**, 6789 (1995)

[23] D.H.Lyth, A.Woszczyna, *Large scale perturbations in the open universe*, astro-ph/9501044 (1995)

[24] D.H.Lyth, E.D.Stewart, Phys. Lett B**252**, 336 (1990)

[25] M.R. de Garcia Maia, J.A.S Lima, Phys. Rev. D**54**, 6111 (1996), gr-qc/9606032

[26] V.F.Mukhanov, H.A.Feldman, R.H.Branderberger, Phys.Rep. **215**, 203 (1992)

[27] I.Novikov, *Cosmology then and now*, referat wygłoszony podczas *The Infeld Centennial Meeting* (23 June 1998)

[28] P.J.E. Peebles, **Principles of Physical Cosmology** (Princeton Univ. Press, New Jersey, 1993)

[29] P.J.E. Peebles, B.Ratra, Phys. Rev. D**52**, 1837 (1995)

[30] M.Sasaki, T.Tanaka, Y.Yakushige Phys. Rev D**56**, 616 (1997)

[31] R.K.Sachs, A.M.Wolfe, Astrophys. J. **147**, 73 (1967)

[32] D.N.Schram, Sky & Telescope, **10**, 28 (1994)

[33] E.Schrödinger, **Expanding universes**, (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1956)

[34] B.F.Schutz **Wstęp do Ogólnej Teorii Względności** (PWN, Warszawa, 1995)

[35] D.W.Sciama **Modern Cosmology** (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1971)

[36] E.D.Stewart, D.H.Lyth, Phys. Lett B**302**, 171 (1993)

[37] T.Tanaka, M.Sasaki, Prog. Theor. Phys. **97**, 243 (1997), astro-ph/9701053 (1997)

[38] K.Tomita, K.Tanabe, Prog. Theor. Phys. **69**, 828 (1982)

[39] *PLANCK*, strona internetowa: http://astro.estec.esa.nl/SA-general/Projects/Planck/

[40] *MAP*, strona internetowa: http://map.gsfc.nasa.gov/