Fizyka z matematyką

Wyboru częsci matematycznej z:

Walter Rudin "Podstawy analizy matematycznej"

(PWN 1998)

dokonał

Jan Chwedeńczuk

Spis treści

Rozdział 1

Zbiory i logika

1.1 Wstęp i zbiory uporządkowane

Zbiory liczb naturalnych, całkowitych i wymiernych. Liczby wymierne jako najszerszy z tych zbiorów, lecz nadal nie wystarczająco szeroki, gdyż nie zawierający rozwiązań wielu równań, takich choćby jak

$$p^2 = 2. \tag{1.1}$$

Wykażemy teraz, że równanie to nie ma rozwiązania w zbiorze liczb wymiernych. Gdyby tak było, to $p = \frac{m}{n}$ oraz

$$m^2 = 2n^2. \tag{1.2}$$

Załóżmy, że co najmniej jedna z tych liczb jest nieparzysta. Wtedy na przykład gdy m jest parzystam to m^2 jest podzielne przez 4, a zatem prawa strona musi być też podzielne przez 4, stąd n^2 jest liczbą parzystą, co stoi w sprzeczności z naszym założeniem. Zatem dowiedliśmy, że nie ma takiego $p \in \mathbb{Q}$, które jest rozwiązaniem równania (1.1).

Następnie zdefiniujmy dwa zbiory: A taki, który zawiera wszystkie liczby wymierne mniejsze od p będącego rozwiązaniem (1.1) oraz B, który zawiera wszystkie liczby wymierne większe od p będącego rozwiązaniem tego równania. Wykażemy teraz, że A nie ma liczby największej, zaś B najmniejszej. W tym celu wykażemy, że istnieje w dla dowolnego p z A istnieje $q > p$ i analogicznie w B. Wprowadzamy

$$q = p - \frac{p^2 - 2}{p + 2} \quad \text{oraz} \quad q^2 - 2 = \frac{2(p^2 - 2)}{(p + 2)^2}. \tag{1.3}$$

Zatem, jeżeli $p \in A$, wtedy również $q \in A$ (i analogicznie dla B). Stąd widzimy, że zbiór liczby wymiernych ma "dziury". Zbiór liczb rzeczywistych powstaje poprzez uzupełnienie tych luk.

Definicja 1.1.1. Jeżeli A jest zbiorem, to $x \in A$ oznacza, że x jest elementem A. Jeżeli x nie jest elementem A, piszemy $x \notin A$.

Zbiór, który nie posiada elementów nazywamy *zbiorem pustym*, jeżeli posiada przynajmniej jeden element to jest *zbiorem niepustym*. Jeżeli A i B są zbiorami, to A jesy *podzbiorem* B, gdy każdy element należący do A należy do B i piszemy $A \subset B$. Jeżeli $A \subset B$ oraz $B \subset A$, to piszemy $A = B$. W przeciwnym wypadku $A \neq B$.

Definicja 1.1.2. Niech S będzie zbiorem. *Porządkiem* w zbiorze S nazwiemy relację oznaczaną przez $<$ mającą następujące własności:

- dla $x, y \in S$ zachodzi tylko jedna z możliwości $x < y$, $x = y$, $y < x$.

- dla $x, y, z \in S$, jeżeli $x < y$ oraz $y < z$, to $x < z$.

Definicja 1.1.3. *Zbiorem uporządkowanym* nazywamy zbiór S wraz z określoną w nim relacją porządku. Przykład: $\mathbb{Q}$ jest zbiorem uporządkowanym, jeżeli $r < s$ określimy tak, że $r - s$ jest ujemną liczbą wymierną.

Definicja 1.1.4. Niech S będzie zbiorem uporządkowanym i $E \subset S$. Jeżeli

$$\exists\, \beta \in S : \ \forall\, x \in E \ x \leqslant \beta \tag{1.4}$$

to mówimy, że E jest *ograniczony od góry* i β jest *ograniczeniem górnym* E.

Definicja 1.1.5. Niech S będzie zbiorem uporządkowanym i niech $E \in S$ będzie podzbiorem ograniczonym z góry. Niech $\alpha \in S$ takie, że:

- α jest ograniczeniem górnym E;

- jeżeli $y < \alpha$, to y nie jest ograniczeniem górnym E.

Wtedy α nazywamy *najmniejszym ograniczeniem górnym* albo kresem górnym E. Oznaczamy $\alpha = \sup E$.

Przykład 1.1.1. Rozpatrzmy zbiory A i B rozważane na początku rozdziału, jako podzbiory $\mathbb{Q}$. Wiemy, że A jest ograniczony od góry, ale ponieważ B nie zawiera elementu najmniejszego, więc A nie posiada kresu górnego w $\mathbb{Q}$ (i analogicznie z kresem dolnym dla B).

Przykład 1.1.2. Jeżeli $\alpha = \sum E$ istnieje, to α może lub może nie być elementem E. Niech E_1 będzie zbiorem wszystkich $r \in \mathbb{Q}$, dla których $r < 0$ i niech E_2 będzie zbiorem wszystkich $r \in \mathbb{Q}$, dla których $r \leqslant 0$. Wtedy $\sup E_1 = \sup E_2 = 0$ oraz $0 \notin E_1$ i $0 \in E_2$.

Przykład 1.1.3. Niech E składa się z liczb $\frac{1}{n}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $\alpha = \sup E = 1$ i $\alpha \in E$ zaś $\beta = \inf E = 0$ i $\beta \notin E$.

1.2 Ciała

Definicja 1.2.1. *Ciałem* nazywamy zbiór F wyposażony w dwie operacje, które będziemy nazywali *dodawaniem* i *mnożeniem*. Działania te spełniają "aksjomaty ciała". Dla dodawania są to $(x, y, z \in F)$:

- $x + y \in F$.

- $x + y = y + x$
- $(x + y) + z = x + (y + z)$
- $\exists 0$: $0 + x = x + 0 = x \ \forall \ x \in F$
- $\forall \ x \in F \ \exists \ -x : \ x + (-x) = 0$

Dla mnożenia są to:

- $xy \in F$
- $xy = yx$
- $(xy)z = x(yz)$
- $\exists 1 \neq 0 : \ 1 \cdot x = x \cdot 1 = x, \ \forall x \in F$
- Jeżeli $x \neq 0 \ \exists \ 1/x \in F : \ x(1/x) = 1$

Ponadto zachodzi

- $x + (y + z) = xy + xz.$

Definicja 1.2.2. *Ciałem uporządkowanym* nazywamy ciało F będące jednocześnie zbiorem uporządkowanym w taki sposób, że dla $x, y, z \in F$ zachodzi

- $x + y < z + z$ jeżeli $y < z$
- $xy > 0$ jeżeli $x > 0$ i $y > 0$.

Jeżeli $x > 0$, to x nazywamy elementem dodatnim, zaś jeżeli $x < 0$ — elementem ujemnym.

1.3 Ciało liczb rzeczywistych

Twiedzenie 1.3.1. Istnieje ciało uporządkowane $\mathbb{R}$ posiadające własność istnienia kresów dolnych. Ciało to zawiera $\mathbb{Q}$ jako podciało. (Dowód w książce.)

Twiedzenie 1.3.2. Jeżeli $x, y \in \mathbb{R}$ i $x > 0$, to istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $nx > y$.

Dowód. Niech A oznacza zbiór wszystkich liczb rzeczywistych o postaci nx, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Jeżeli twierdzenie jest fałszywe, wtedy y było by ograniczeniem górnym A. Ale wtedy A posiadało by kres górny w $\mathbb{R}$, oznaczany jako $\alpha = \sup A$. Ponieważ $x > 0$, zatem $\alpha - x < \alpha$ stąd $\alpha - x$ nie jest ograniczeniem górnym A. Zatem $\alpha - x < mx$ dla pewnej $m \in \mathbb{N}$. Ale wtedy $\alpha < (m+1)x \in A$, co jest nie prawdą, gdyż α jest ograniczeniem górnym A.

Twiedzenie 1.3.3. Jeżeli $x, y \in \mathbb{R}$ i $x < y$, to istnieje $p \in \mathbb{Q}$ takie, że $x < p < y$.

Dowód. Jako że $x < y$, więc $y - x > 0$ i na mocy Tw. (1.3.2) istnieje $n \in \mathbb{N}$ taka że

$$n(y - x) > 1. \tag{1.5}$$

Stosując Tw. (1.3.2) otrzymujemy $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ takie, że $m_1 > nx$ oraz $m_2 > -nx$. Wtedy

$$-m_2 < nx < m_1 \tag{1.6}$$

i istnieje m (taka że $-m_2 \leqslant m \leqslant m_1$) taka, że

$$m - 1 \leqslant nx < m. \tag{1.7}$$

Łącząc ostanie warunki otrzymujemy

$$nx < m \leqslant 1 + nx < ny, \tag{1.8}$$

a jako że $n > 0$, więc

$$x < \frac{m}{n} < y, \tag{1.9}$$

co dowodzi twierdzenia ($p = \frac{m}{n}$).

Na tej podstawie mówimy, że $\mathbb{R}$ jest zbiorem gęstym. W szczególności można wykazać następujące twierdzenie (dowód w książce).

Twiedzenie 1.3.4. Dla dowolnej $x \in \mathbb{R}$ i $x > 0$ i dowolnej $n \in N$ istnieje jedna i tylko jedna $y \in \mathbb{R}$ i $y > 0$ taka, że $y^n = x$.

1.4 Działania na zbiorach, prawa de Morgana

Definicja 1.4.1. Niech A i Ω będą zbiorami; załóżmy, że każdemu elementowi zbioru A odpowiada pewien podzbiór Ω, który będziemy oznaczali przez E_α. Zbiór, którego elementami są zbiory E_α oznaczamy $\{E_\alpha\}$ i mówimy o systemie albo rodzinie zbiorów.

Sumą zbiorów rodziny $\{E_\alpha\}$ nazywamy zbiór S taki, że $x \in S \iff x \in E_\alpha$ przynajmniej dla jednego $\alpha \in A$. Stosujemy oznaczenie

$$S = \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha. \tag{1.10}$$

Jeżeli A składa się z liczb całkowitych, to zazwyczaj piszemy

$$S = \bigcup_{m=1}^{n} E_m = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n. \tag{1.11}$$

Jeżeli A jest zbiorem wszystkich liczb naturalnych to

$$S = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m. \tag{1.12}$$

Definicja 1.4.2. Iloczynem rodziny zbiorów E_α nazywamy zbiór P taki, że $x \in P \iff x \in E_\alpha \forall \alpha \in A$. Oznaczenia

$$P = \bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha. \tag{1.13}$$

Jeżeli A składa się z liczb całkowitych, to zazwyczaj piszemy

$$P = \bigcap_{m=1}^{n} E_m = E_1 \cap E_2 \cup \ldots \cap E_n. \tag{1.14}$$

Jeżeli A jest zbiorem wszystkich liczb naturalnych to

$$P = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_m. \tag{1.15}$$

Definicja 1.4.3. Niech zbiory A i B zawierają się w Ω. *Różnicą zbiorów* A i B nazywamy zbiór $x \in A$ takich, że $x \notin B$ i oznaczamy $A \setminus B$.

Definicja 1.4.4. Niech zbiór A zawiera się w Ω. *Dopełnieniem* A w Ω nazywamy zbiór $x \in \Omega$ takich, że $x \notin A$ i oznaczamy $\bar{A}$.

Prawa de Morgana.

Twiedzenie 1.4.1. Niech zbiory A i B zawierają się w Ω. Zachodzi:

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \tag{1.16a}$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}. \tag{1.16b}$$

Dowód na przykład graficznie.

1.5 Elementy logiki

Tabelki dla koniunkcji, implikacji, alternatywy. Odpowiedniki praw de Morgana. Sformułować zasadę indukcji matematycznej.

1.6 Przestrzeń euklidesowa, wektorowa i metryczna

Definicja 1.6.1. Przy dowolnej liczbie $k \in \mathbb{N}$ niech $\mathbb{R}^k$ będzie zbiorem uporządkowanym k-wyrazowych ciągów

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k), \tag{1.17}$$

gdzie $x_1, \ldots x_k \in \mathbb{R}$ nazywamy współrzędnymi elementu $\mathbf{x}$. Elementy $\mathbb{R}^k$ sa zwane punktami lub wektorami, szczególnie w przypadku $k > 1$. Jeśli $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_k)$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$, to

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_k + y_k), \ \alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_k), \tag{1.18}$$

wtedy oczywiście $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$ i $\alpha \in \mathbb{R}^k$. Istnienie obu tych operacji, spełniających własności przemienności i łączności czyni z $\mathbb{R}^k$ przestrzeń wektorową nad ciałem liczb rzeczywistych. Zerowym elementem (nazywanym czasem początkiem układu współrzędnych lub wektorem zerowym) jest punkt 0, którego wszystkie składowe równe są 0.

Określmy teraz "iloczyn wewnętrzny" (lub iloczyn skalarny) dwu punktów za pomocą wzoru

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{k} x_i y_i \tag{1.19}$$

oraz wprowadźmy normę elementu $\mathbf{x}$

$$|\mathbf{x}| = (\mathbf{x}, \mathbf{x})^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.20}$$

Obecnie zdefiniowana struktura (przestrzeń wektorowa $\mathbb{R}^k$ wraz ze zdefiniowanym iloczynem wewnętrznym i normą) jest nazywana euklidesową k-przestrzenią.

Twiedzenie 1.6.1. Niech $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$ i niech $\alpha \in \mathbb{R}$. Wtedy

1. $|\mathbf{x}| \geqslant 1$
2. $|\mathbf{x}| = 0 \iff \mathbf{x} = 0$
3. $|\alpha \mathbf{x}| = |\alpha||\mathbf{x}|$
4. $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leqslant |\mathbf{x}||\mathbf{y}|$
5. $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leqslant |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$
6. $|\mathbf{x} - \mathbf{z}| \leqslant |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + |\mathbf{y} - \mathbf{z}|$.

Dowód. Dowód 1-3 oczywisty. 4 wynika z nierówności Schwarza. Stąd z kolei wynika

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 = (\mathbf{x} + \mathbf{y})(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{x}\mathbf{x} + 2\mathbf{x}\mathbf{y} + \mathbf{y}\mathbf{y} \leqslant |\mathbf{x}|^2 + 2|\mathbf{x}||\mathbf{y}| + |\mathbf{y}|^2 = (|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|)^2, \tag{1.21}$$

co dowodzi 5. 6 wynika z 5 przy podstawieniu $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ za $\mathbf{x}$ oraz $\mathbf{y} - \mathbf{z}$ za $\mathbf{y}$.

Definicja 1.6.2. Mówimy, że zbiór X, którego elementy będziemy nazywali punktami, jest przestrzenią metryczną, jeżeli dowolnym dwóm punktom p i q zbioru X odpowiada liczba rzeczywista $d(p, q)$ nazywana odległością od p do q taka, że

1. $d(p, q) > 0$, jeśli $p \neq q$; $d(p, p) = 0$
2. $d(p, q) = d(q, p)$
3. $d(p, q) \leqslant d(p, r) + d(r, q)$ dla dowolonego $r \in X$.

Przykładami przestrzeni metrycznych są $\mathbb{R}^k$, szczególnie $\mathbb{R}^1$ (prosta rzeczywista), $\mathbb{R}^2$ (płaszczyzna). Odległość w $\mathbb{R}^k$ definiujemy jako

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^k). \tag{1.22}$$

Rozdział 2

Funkcje i wykresy

Podstawowe pojęcia.

Definicja 2.0.1. Niech X i Y będzie dwoma zbiorami. *Funckja* to przyporządkowanie elemntom X elementów Y, prawostronnie jednoznaczne, czyli takie, że każdemu $y \in Y$ odpowiada co najwyżej jeden $x \in X$.

Element $x \in X$, któremu odpowiada $y \in Y$ nazywamy argumentem funkcji, zaś $y = f(x)$ nazywamy wartością funkcji. Zbiór $D \subset X$, dla których jest określona f nazywamy *dziedziną*, zaś zbiór $f(D) \subset Y$ nazywamy zbiorem wartości.

Definicja 2.0.2. *Wykres funkcji* to zbiór wszystkich punktów o współrzędnych $(x, f(x))$.

• Wprowadzić kartezjański układ współrzędnych.
• Przykład funkcji liniowej i kwadratowej, moduł.
• Własności funkcji kwadratowej.
Własności funkcji:
• Funkcja różnowartościowa (*iniekcja*): $\forall x \neq y,\ x \in D,\ y \in D :\ f(x) \neq f(y)$.
• *Suriekcja*: "na", czyli przeciwdziedzina pokrywa się z Y.
• *Bijekcja*: iniekcja + suriekcja.
• Funkcja parzysta $\forall x \in D - x \in D :\ f(x) = f(-x)$
• Funkcja nieparzysta $\forall x \in D - x \in D :\ f(x) = -f(-x)$
• Funkcja okresowa $\forall x \in D x + x_0 \in D :\ f(x) = f(x + x_0)$. x_0 nazywamy okresem funkcji.
• Funkcja monotonicznie rosnąca. Niech $f :\ \mathbb{R} \supset X \to Y \subset \mathbb{R}$. Funkcja jest *monotonicznie rosnąca* jeżeli dla $x_1 > x_2$ zachodzi $f(x_1) > f(x_2)$. Analogicznie *monotonicznie malejąca*.
• Odwrotność funkcjil $1/f(x)$.
• Funkcja odwrotna $f^{-1}(x)$.
• Funkcja złożona $g(f(x))$.

2.0.1 Układy współrzędnych

• kartezjański
• biegunowy
• walcowy
• sferyczny

Rozdział 3

Ciągi i szeregi

3.1 Ciągi

Definicja 3.1.1. *Ciągiem* nazywamy funkcję f określoną na zbiorze $\mathbb{N}$. Jeżeli $f(n) = x_n$ dla $n \in \mathbb{N}$, to przyjęło się oznaczać f symbolem $\{x_n\}$ lub $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Wartości funkcji, to jest elementy x_n nazywamy *wyrazami ciągu.* Jeżeli A jest pewnym zbiorem i $x_n \in A, \forall n \in \mathbb{N}$, to $\{x_n\}$ nazywamy ciągiem w A lub ciągiem elementów zbioru A.

Definicja 3.1.2. Ciąg $\{p_n\}$ w przestrzeni metrycznej X nazywamy *zbieżnym*, jeśli istnieje $p \in X$ posiadający następujące własności:
$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in N : \ n \geqslant N \to \ d(p_n, p) < \epsilon.$

Mówimy, że $\{p_n\}$ jest zbieżny do p lub że p jest granicą ciągu $\{p_n\}$ i piszemy

$$p_n \to p, \quad \text{lub} \quad \lim_{n\to\infty} p_n = p. \tag{3.1}$$

Przykłady wykazywania, że g jest granicą:
- $x_n = \frac{1}{n}$, $g = 0$
- $x_n = \frac{2n+1}{4n+5}$, $g = \frac{1}{2}$

Twierdzenia o granicy.

Twiedzenie 3.1.1. Rozważmy ciągi $\{s_n\}$ i $\{t_n\}$ o granicach odpowiednio s i t. Wówczas:
- $\lim\limits_{n\to\infty} (s_n + t_n) = s + t$
- $\lim\limits_{n\to\infty} cs_n = cs$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (c + s_n) = c + s.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (s_n t_n) = st.$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (1/s_n) = 1/s$ jeżeli $s_n \neq 0$ oraz $s \neq 0$.

Dowody w książce (str. 46).

Twiedzenie 3.1.2. Rozważmy ciągi $\{s_n\}$ i $\{t_n\}$ o granicach odpowiednio s i $t \neq 0$. Wówczas:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{t_n} = \frac{s}{t}. \tag{3.2}$$

Definicja 3.1.3. Ciąg $\{s_n\}$ nazywamy *ciągiem Cauchy'ego*, gdy

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: \ d(p_n, p_m) < \epsilon, \text{ gdy } n, m \geqslant N. \tag{3.3}$$

Twiedzenie 3.1.3. Każdy ciąg zbieżny jest ciągiem Cauchy'ego.

3.1.1 Pewne ciągi specjalne

Twiedzenie 3.1.4. Zachodzą następujące twierdzenia

- Jeżeli $p > 0$, to $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n^p = 0$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- Jeżeli $p > 0$ oraz $\alpha \in \mathbb{Q}$, to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} = 0$.
- Jeżeli $|x| < 1$, to $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$.

3.2 Szeregi

Definicja 3.2.1. Niech będzie dany ciąg $\{a_n\}$. Sumę $a_p + a_{p+1} + \ldots a_q$ $(p \leqslant q)$ będziemy oznaczali przez $\sum_{n=p}^{q} a_n$. Ciągowi $\{a_n\}$ będzie odpowiadał ciąg $\{s_n\}$, gdzie

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k. \tag{3.4}$$

Symbol $a_1 + a_2 + \ldots$ lub krócej

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{3.5}$$

będziemy nazywali *szeregiem nieskończonym* albo po prostu *szeregiem*. Liczby s_n nazywamy *sumami częściowymi* tego szeregu. Jeśli $\{s_n\}$ jest zbieżny do s, to będziemy mówili, że szereg jest zbieżny i pisali

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s. \tag{3.6}$$

Liczbę s nazywamy *sumą szeregu*, należy jednak pamiętać, że nie jest to suma nieskończonej liczby wyrazów ciągu $\{a_n\}$ lecz granica ciągu sum częściowych. Jeżeli $\{s_n\}$ jest rozbieżny, mówimy, że szereg jest rozbieżny.

Twiedzenie 3.2.1. Szereg $\sum a_n$ jest zbieżny $\iff$ $\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$:

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| \leqslant \epsilon \quad \text{dla} \quad m \geqslant n \geqslant N. \tag{3.7}$$

Twiedzenie 3.2.2. Jeżeli $\sum a_n$ jest zbieżny, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Uwaga: w drugą stronę nie zachodzi. Przykład $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Twiedzenie 3.2.3. Kryterium Cauchy'ego.

Niech dany będzie szereg $\sum a_n$ i niech $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Wtedy

1. jeśli $\alpha < 1$, to szereg jest zbieżny
2. jeśli $\alpha > 1$, to szereg jest rozbieżny
3. jeśli $\alpha = 1$, to szereg jest rozbieżny lub zbieżny.

Twiedzenie 3.2.4. Kryterium d'Alamberta.

Szereg $\sum a_n$ jest

1. zbieżny, jeżeli

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \tag{3.8}$$

2. rozbieżny, jeżeli

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geqslant 1 \tag{3.9}$$

dla $n > n_0$, gdzie $n_0 \in \mathbb{N}$.

3.2.1 Zbieżność bezwzględna

Mówimy, że szereg $\sum a_n$ jest zbieżny bezwględnie, jeżeli zbieżny jest szereg $\sum |a_n|$.

Twiedzenie 3.2.5. Jeżeli szereg jest zbieżny bezwzględnie, to jest zbieżny.

Dowód. Wynika z z nierówności $|\sum a_n| \leqslant \sum |a_n|$ oraz kryterium Cauchy'ego.

Definicja 3.2.2. Weźmy dwa szeregi $\sum a_n$ i $\sum b_n$ i przyjmijmy

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \tag{3.10}$$

Szereg $\sum c_n$ nazywamy iloczynem dwóch danych szeregów.

Definicja wynika bezpośrednio z wzięcia dwóch szeregów potęgowych $\sum a_n z^n$ i $\sum b_n z^n$, wymnożenia ich wyraz po wyrazie i zebrania wyrazów o danej potędze z, czyli

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1)z + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)z^2 + \dots \tag{3.11}$$

Następnie kładziemy $z = 1$ i odzyskujemy żądane wyrażenie.

3.2.2 Szeregi o wyrazach nieujemnych

Twiedzenie 3.2.6. Jeżeli $0 \leqslant x \leqslant 1$, to

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}. \tag{3.12}$$

Jeżeli $x \geqslant 1$, szereg jest rozbieżny.

Dowód natychmiast przez wykonanie sumy częściowej i policzenie jej granicy.

Twiedzenie 3.2.7. Niech $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant 0$. Wtedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny $\Longleftrightarrow$ zbieżny jest

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots \tag{3.13}$$

Dowód. Wystarczy udowodnić ograniczonośc sum częściowych. Niech

$$s_n = a_1 + \ldots + a_n, \quad t_k = a_1 + 2a_2 + \ldots + 2^k a_{2^k}. \tag{3.14}$$

Dla $n < 2^k$ mamy

$$s_n \leqslant a_1 + (a_2 + a_3) + \ldots + (a_{2^k} + \ldots + a_{2^{k-1}-1}) \leqslant a_1 + 2a_2 + 2^k a_{2^k} = t_k. \tag{3.15}$$

Dla $n > 2^k$ mamy

$$\begin{aligned} s_n &\geqslant a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \ldots + (a_{2^{k-1}-1} + \ldots + a_{2^k}) \\ &\geqslant \frac{1}{2}a_1 + 2_2 + 2a_4 + \ldots + 2^{k-1}a_{2^k} = \frac{1}{2}t_k. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Mamy zatem

$$t_k \geqslant s_n \geqslant \frac{1}{2}t_k. \tag{3.17}$$

Stąd jeżeli t_k jest rozbieżne, to s_n jest rozbieżne. Jeżeli t_k jest zbieżne, to na mocy twierdzenia o trzech ciągach s_n też jest zbieżne. I na odwrót, co kończy dowód.

Twiedzenie 3.2.8. Szereg $\sum 1/n^p$ jest zbieżny, jeżeli $p > 1$. Jeżeli $p \leqslant 1$ jest rozbieżny.

Dowód. Jeżeli $p \geqslant 0$, oczywiste. Jeżeli $p > 0$, stosujemy twierdzenie 3.2.7 i przechodzimy do szeregu

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^{kp}} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(1-p)k}. \tag{3.18}$$

Na mocy twierdzenia 3.2.6, szereg ten jest zbieżny, gdy $p < 1$, a rozbieżny, gdy $p \geqslant 1$.

Liczba e

Definicja 3.2.3.

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}. \tag{3.19}$$

Szereg ten jest zbieżny, gdyż

$$s_n = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot n} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3, \tag{3.20}$$

zatem definicja ma sens.

Ewentualnie:
- sumowanie częściowe
- zmiana kolejności sumowania.

Rozdział 4

Ciągłość, pochodna i jej zastosowanie

4.1 Ciągłość

Definicja 4.1.1. Niech X i Y będą przestrzeniami metrycznymi. Niech $E \subset X$, f niech będzie odwzorowawniem E w Y. Będziemy pisali $f(x) \to q$ dla $x \to p$ lub

$$\lim_{x \to p} f(x) = q \tag{4.1}$$

jeśli istnieje $q \in Y$ o następujących własnościach: $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$:

$$d_Y(f(x), q) < \epsilon \quad \text{dla} \quad 0 < d_X(x, p) < \delta. \tag{4.2}$$

Jeżeli

$$\lim_{x \to p} f(x) = q \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \to p} g(x) = r \tag{4.3}$$

zachodzi ponadto:

- $\lim\limits_{x \to p}(f(x) \pm g(x)) = q \pm r$
- $\lim\limits_{x \to p}(f(x)/g(x)) = q/r\ (r \neq 0)$
- $\lim\limits_{x \to p}(f(x)g(x)) = qr$

Definicja 4.1.2. Funkcja f jest ciągła w punkcie p jeżeli $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$:

$$d_Y((f(x), f(p)) < \epsilon, \quad \text{gdy} \quad d_X(x, p) < \delta. \tag{4.4}$$

Twiedzenie 4.1.1. Funkcja f jest ciągła w punkcie $p \iff \lim\limits_{x \to p} f(x) = f(p)$.

Ewentualnie:

- ciągłość i spójność
- nieciągłości

4.2 Pochodna

Definicja 4.2.1. Niech f będzie funkcją rzeczywistą określoną na odcinku $\mathcal{I} = [a, b]$. Dla dowolnego $x \in \mathcal{I}$ rozpatrzmy wyrażenie

$$\varphi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}, \quad (a < t < b,\ t \neq x) \tag{4.5}$$

i określmy

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \varphi(t) \tag{4.6}$$

o ile granica ta istnieje. Funkcję f' nazywamy *pochodną funkcji* f.

Jeżeli pochodna f' jest określona w punkcie x, to mówimy, że funkcja f jest *różniczkowalna* w punkcie x. Jeżeli f' jest określona w każdym punkcie pewnego zbioru E, to mówimy, że f jest jest różniczkowalna w E.

Zauważmy, że we wzorze (7.27) można rozważać granice lewo- i prawostronną, co prowadzi do definicji odpowiedniej pochodnej.

Twiedzenie 4.2.1. Niech f będzie określona w przedziale domkniętym $\mathcal{I} = [a, b]$. Jeżeli f jest różniczkowalna w punkcie $x \in \mathcal{I}$, to jest ciągła w tym punkcie.

Dowód. Na podstawie twierdzenia o iloczynie granic, mamy

$$f(t) - f(x) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}(t - x) \to f'(x) \cdot 0 = 0. \ \square \tag{4.7}$$

Zauważmy, że w drugą stronę nie zachodzi. Przykład: • $f(x) = |x|$.

Twiedzenie 4.2.2. Niech f i g będą określone w $\mathcal{I} = [a, b]$ i różniczkowalne w $x \in \mathcal{I}$. Wtedy $f + g$, fg i f/g są różniczkowalne w x oraz:

- $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad \Big(g(x) \neq 0\Big)$.

Przykłady, strona 89.

Twiedzenie 4.2.3. Niech f będzie ciągła na $\mathcal{I} = [a, b]$, $f'(x)$ istnieje w $x \in \mathcal{I}$, niech g będzie określona na $\mathcal{Y}$ zawierającym zbiór wszystkich wartości przyjmowanych przez f, oraz g różniczkowalna w punkcie $f(x)$. Jeżeli

$$h(t) = g(f(t)), \quad (a \leqslant t \leqslant b), \tag{4.8}$$

to h jest różniczkowalna w punkcie x oraz

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x). \tag{4.9}$$

Dowód. Niech $y = f(x)$. Z definicji pochodznej mamy

$$f(t) - f(x) = (t - x)[f'(x) + u(t)], \tag{4.10a}$$

$$g(s) - g(y) = (s - y)[g'(y) + v(s)], \tag{4.10b}$$

$$\tag{4.10c}$$

gdzie $t \in \mathcal{I}$, $s \in \mathcal{Y}$ oraz $u(t) \to x$ przy $t \to 0$ oraz $v(s) \to 0$ przy $s \to y$. Niech $s = f(t)$y Weźmy $s = f(t)$. Wtedy na mocy równań (4.10) mamy

$$\begin{aligned} h(t) - h(x) &= g(f(t)) - g(f(x)) = [f(t) - f(x)][g'(y) + v(s)] \\ &= (t - x)[f'(x) + u(t)][g'(y) + v(s)] \end{aligned} \tag{4.11}$$

a zatem

$$\frac{h(t) - h(x)}{t - x} = [f'(x) + u(t)][g'(y) + v(s)] \tag{4.12}$$

co dla $t \to x$ na mocy ciągłości f daje $s \to y$, co dowodzi twierdzenia. □

Przykłady ze strony 90.

4.2.1 Twierdzenia o wartości średniej

Definicja 4.2.2. Niech f będzie funckją rzeczywistą określoną w przestrzeni metrycznej X. Powiemy, że f ma maksimum lokalne w punkcjie $p \in X$, jeśli istnieje $\delta > 0$ taka, że $f(q) \leqslant f(p)$ $\forall q \in X$ takich, że $d(p, q) < \delta$. Analogicznie definiujemy minimum lokalne.

Twiedzenie 4.2.4. Niech f będzie określona na $\mathcal{I} = [a, b]$. Jeżeli f ma w punkcie $x \in \mathcal{I}$ maksimum lokalne i istnieje $f'(x)$, to $f'(x) = 0$.

Dowód. Weźmy δ takie, że $a < x - \delta < x < x + \delta < b$. W przypadku gdy $x - \delta < t < x$, mamy

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \geqslant 0. \tag{4.13}$$

Zaś gdy $x < t < x + \delta$, mamy

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \leqslant 0. \tag{4.14}$$

Zatem $f'(x) = 0$. Analogiczne twierdzenie zachodzi dla miminum lokalnego.

Twiedzenie 4.2.5. Jeżeli f i g ciągłe na $\mathcal{I} = [a, b]$ i różniczkowalne na $]a, b[$. to istnieje punkt $x \in \mathcal{I}$, w którym

$$[f(b) - f(a)]g'(x) = [g(b) - g(a)]f'(x). \tag{4.15}$$

Dowód. Zdefiniumy następującą funkcję:

$$h(t) = [f(b) - f(a)]g(t) - [g(b) - g(a)]f(t), \quad \text{dla} \quad a \leqslant t \leqslant b. \tag{4.16}$$

Funkcja h jest ciągła w $\mathcal{I}$, różniczkowalna w $]a, b[$ oraz

$$h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b) = h(b). \tag{4.17}$$

Dla dowodu, wystarczy wykazać, że $h'(x)$ dla pewnego $x \in]a, b[$. Jeżeli $h(x)$ jest stała dla $x \in \mathcal{I}$, to $h'(x) = 0$. Jeżeli $h(t) > h(a)$, to z ciągłości wynika, że musi istnieć lokalne maksimum, dla którego $h'(x) = 0$. Analogicznie dla $h(t) < h(a)$. □

Twierdzenie to nazywane jest uogólnionym twierdzeniem o wartości średniej. W szczególności dla $g(x) = x$, mamy

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(x) \tag{4.18}$$

znane jako twierdzenie o wartości średniej.

Twiedzenie 4.2.6. Niech f będzie funkcją różniczkowalną na przedziale $\mathcal{R} =]a, b[$.

- Jeżeli $f'(x) > 0$ dla wszystkich $x \in]a, b[$, to f rośnie monotonicznie.
- Jeżeli $f'(x) = 0$ dla wszystkich $x \in]a, b[$, to f jest stała.
- Jeżeli $f'(x) < 0$ dla wszystkich $x \in]a, b[$, to f maleje monotonicznie.

Dowód bezpośrednio z twierdzenia o wartości średniej

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(x) \tag{4.19}$$

dla pary liczb $x_1, x_2 \in \mathcal{R}$ przy pewnym x między x_1 a x_2.

4.2.2 Reguła l'Hospitala

Twiedzenie 4.2.7. Niech f i g będą funkcjami rzeczywistymi, różniczkowalnymi na $\mathcal{R} =]a, b[$ i niech $g'(x) \neq 0$ przy dowolnym $x \in \mathcal{R}$, gdzie $\infty \leqslant a < \leqslant +\infty$. Niech

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A. \tag{4.20}$$

Jeżeli

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0 \tag{4.21}$$

lub jeżeli

$$\lim_{x \to a} g(x) = +\infty, \tag{4.22}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A. \tag{4.23}$$

Dowód w książce.

4.2.3 Twierdzenie Taylora

Twiedzenie 4.2.8. Przypuśćmy, że f jest funkcją rzeczywistą na $\mathcal{I} = [a, b]$, $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ jest ciągła na $\mathcal{I}$, a $f^{(n)}$ istnieje wszędzie wewnątrz $]a, b[$. Niech α i β będą dwoma różnymi punktami w $\mathcal{I}$. Określmy

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(t - \alpha)^k. \tag{4.24}$$

Istnieje punkt x leżący między α i β taki, że

$$f(\beta) = P(\beta) + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(\beta - \alpha)^n. \tag{4.25}$$

Rozdział 5

Całka nieoznaczona i oznaczona

Definicja 5.0.1. Niech $\mathcal{I} = [a, b]$ będzie pewnym przedziałem. Przez *podział* P przedziału $\mathcal{I}$ rozumieć będziemy skończony zbiór punktów $x_0, \ldots x_n$ taki, że

$$a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n = b. \tag{5.1}$$

Będziemy ponadto pisać

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad (i = 1 \ldots n). \tag{5.2}$$

Niech f będzie ograniczoną rzeczywistą liczbą określoną na $\mathcal{I}$. Każdemu podziałowi P przedziału $\mathcal{I}$ przyporządkowujemy liczby

$$M_i = \sup f(x), \;\; m_i = \inf f(x), \quad (x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i) \tag{5.3}$$

$$U(P, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \quad L(P, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \tag{5.4}$$

oraz związane z nimi wielkości

$$\overline{\int_a^b f dx} = \inf U(P, f) \tag{5.5}$$

$$\underline{\int_a^b f dx} = \sup L(P, f), \tag{5.6}$$

gdzie kres górny i dolny brane są ze względu na wszystkie możliwe podziały $\mathcal{I}$. Lewe strony równań (5.5) oraz (5.6) nazywają się odpowiednio górną i dolną całką Riemanna funckji f na przedziale $\mathcal{I}$.

Jeżeli całka górna równa jest dolnej, to mówimy, że funkcja f jest *całkowalna w sensie Riemanna na przedziale* $\mathcal{I}$ i będziemy pisać $f \in \mathcal{R}$ (czyli $\mathcal{R}$ oznacza zbiór wszystkich funkcji całkowalnych w sensie Riemanna). Wspólną wartośc tych dwóch wielkości oznaczamy

$$\int_a^b f dx \quad \text{lub} \quad \int_a^b f(x) dx. \tag{5.7}$$

Teraz zdefiniujemy uogólnienie całki Riemanna — tak zwaną całkę Riemanna–Stieltjesa.

Definicja 5.0.2. Niech α będzie monotonicznie rosną funkcją określoną na przedziale $\mathcal{I} = [a, b]$. Jeżeli P jest jakimś podziałem I, to określimy $\Delta\alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})$. Dla dowolnej funkcji rzeczywistej ograniczonej na $\mathcal{I}$ napiszmy

$$U(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\alpha_i, \quad L(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\alpha_i, \tag{5.8}$$

gdzie m_i oraz M_i mają to samo znaczenie co w definicji 5.0.1. Ponadto wpradźmy

$$\overline{\int_a^b} f d\alpha = \inf U(P, f, \alpha) \tag{5.9}$$

$$\underline{\int_a^b} f d\alpha = \sup L(P, f, \alpha). \tag{5.10}$$

Jeżeli lewe części równości są sobie równe, ich wspólną wartośc oznaczamy

$$\int_a^b f d\alpha \quad \text{lub czasami} \quad \int_a^b f(x) d\alpha(x). \tag{5.11}$$

Jest to całka Riemanna-Stieltjesa lub po prostu całka Stieltjesa funcki f względem α na $\mathcal{I}$. Jeżeli całka ta istnieje, to mówimy, że f jest całkowalna względem α w sensie Riemanna i piszemy $f \in \mathcal{R}(\alpha)$.

5.0.1 Własności całki

Twiedzenie 5.0.1.

- Jeżeli $f_1 \in \mathcal{R}(\alpha)$ oraz $f_2 \in \mathcal{R}(\alpha)$ na $\mathcal{I} = [a, b]$, to $f_1 + f_2 \in \mathcal{R}(\alpha)$, $cf \in \mathcal{R}(\alpha)$ ($c \in \mathbb{R}$) oraz

$$\int_a^b (f_1 + f_2) d\alpha = \int_a^b f_1 d\alpha + \int_a^b f_2 d\alpha \quad \text{oraz} \quad \int_a^b cf d\alpha = c \int_a^b f d\alpha. \tag{5.12}$$

- Jeżeli $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ na $\mathcal{I}$, to

$$\int_a^b f_1 d\alpha \leqslant \int_a^b f_2 d\alpha. \tag{5.13}$$

- Jeżeli $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ na $\mathcal{I}$ i jeśli $a < c < b$, to $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ na $[a, c]$ oraz $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ na $[c, b]$ oraz

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^c f d\alpha + \int_c^b f d\alpha. \tag{5.14}$$

- Jeżeli $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ na $\mathcal{I}$ i $f(x) \leqslant M$ na $\mathcal{I}$, to

$$\left| \int_a^b f_1 d\alpha \right| \leqslant M[\alpha(b) - \alpha(a)]. \tag{5.15}$$

- Jeżeli $f \in \mathcal{R}(\alpha_1)$ oraz $f \in \mathcal{R}(\alpha_2)$, to $f \in \mathcal{R}(\alpha_1 + \alpha_2)$ i
$$\int_a^b f d(\alpha_1 + \alpha_2) = \int_a^b f d\alpha_1 + \int_a^b f d\alpha_2, \tag{5.16}$$
w szczególności, jeżeli $c > 0$, to
$$\int_a^b f d(c\alpha) = c \int_a^b f d\alpha. \tag{5.17}$$

Dowód. Jeżeli $f = f_1 + f_2$, a P jest dowolnym podziałem $\mathcal{I}$, to zachodzi
$$L(P, f_1, \alpha) + L(P, f_2, \alpha) \leqslant L(P, f, \alpha) \leqslant U(P, f, \alpha) \leqslant U(P, f_1, \alpha) + U(P, f_2, \alpha) \tag{5.18}$$
Jeśli $f_1 \in \mathcal{R}(\alpha)$ oraz $f_2 \in \mathcal{R}(\alpha)$, to dla $\varepsilon > 0$ istnieją takie podziały, że
$$U(P_j, f_j, \alpha) - L(P_j, f_j, \alpha) < \epsilon, \quad j = 1, 2. \tag{5.19}$$
Nierówność ta pozostanie spełniona, jeżeli zastąpimy je ich wspólnym zagęszczeniem P. Wtedy z równania (5.18) wynika, że
$$U(P, f, \alpha) - L(P, f, \alpha) < 2\epsilon. \tag{5.20}$$
Stąd wynika, że $f \in \mathcal{R}(\alpha)$. Dla tego samego podziału P mamy
$$U(P, f_j, \alpha) \leqslant \int f_j d\alpha + \epsilon \tag{5.21}$$
a zatem z (5.18) wynika
$$\int f d\alpha \leqslant U(P, f, \alpha) \leqslant \int f_1 d\alpha + \int f_1 d\alpha + 2\epsilon. \tag{5.22}$$
Ponieważ ϵ jest dowolne, dostajemy
$$\int f d\alpha \leqslant \int f_1 d\alpha + \int f_1 d\alpha. \tag{5.23}$$
Zamieniając f_1 i f_2 z $-f_1$ i $-f_2$ otrzymujemy przeciwną nierówność, co kończy dowód. Pozostałe punkty dowodzi się analogicznie.

- Powiedzieć o
$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx \tag{5.24}$$

Twiedzenie 5.0.2. (O zamianie zmiennych)

Niech φ będzie funkcją ściśle rosnącą odworozującą $\mathcal{I}' = [A, B]$ na $I = [a, b]$. Niech α będzie też funkcją rosnącą na $\mathcal{I}$ i niech $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ na $\mathcal{I}$. Określmy β i g na $\mathcal{I}'$ wzorem
$$\beta(y) = \alpha(\varphi(y)), \quad g(y) = f(\varphi(y)). \tag{5.25}$$
Wtedy $g \in \mathcal{R}(\beta)$ oraz
$$\int_A^B g d\beta = \int_a^b f d\alpha. \tag{5.26}$$
Dowód strona 113, podać przykłady.

5.0.2 Całkowanie a różniczkowanie

Twiedzenie 5.0.3. Niech $f \in \mathcal{R}$ na $\mathcal{I} = [a, b]$. Dla $a \leqslant x \leqslant b$ określmy

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt. \tag{5.27}$$

Funkcja F jest ciągła na $\mathcal{I}$; ponadto jeśli f jest ciągła w $x_0 \in \mathcal{I}$, to funkcja F jest różniczkowalna w punkcie x_0 oraz

$$F'(x_0) = f(x_0). \tag{5.28}$$

Dowód. Funkcja f jest ograniczona, ponieważ $f \in \mathcal{R}$. Niech $f|(t)| \leqslant M$ przy $a \leqslant t \leqslant b$. Przy $a \leqslant x \leqslant y \leqslant b$ mamy

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t)dt \right| \leqslant M(y - x). \tag{5.29}$$

Stąd widać, że dla $\epsilon > 0$ zachodzi $|F(y) - F(x)|$ o ile tylko $|y - x| < \epsilon/M$. W ten sposób dowiedliśmy, że F jest jednostajnie ciągła. Załóżmy, że f jest ciągła w punkcie x_0. Dla danego $\epsilon > 0$ dobieramy $\delta > 0$ tak aby

$$|f(t) - f(x_0)| < \epsilon, \quad \text{jeżeli} \quad |t - x_0| < \delta. \tag{5.30}$$

Wtedy mamy

$$\left| \frac{F(t) - F(s)}{t - s} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{t - s} \int_s^t [f(u) - f(x_0)]du \right| < \epsilon, \tag{5.31}$$

co kończy dowód.

Twiedzenie 5.0.4. (Podstawowe twierdzenie rachunku całkowego)
Jeśli $f \in \mathcal{R}$ na $\mathcal{I} = [a, b]$ i istnieje różniczkowalna na $\mathcal{I}$ funkcja taka, że $F' = f$, to

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{5.32}$$

Dowód. Niech $P = \{x_0, \dots x_n\}$ będzie podziałem P. Na mocy twierdzenia o wartości średniej istnieją punkty $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ takie, że

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(t_i)\Delta x_i. \tag{5.33}$$

Wtedy

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i = F(b) - F(a), \tag{5.34}$$

skąd

$$\left| F(b) - F(a) - \int_a^b f(x)dx \right| < \epsilon, \tag{5.35}$$

co kończy dowów.

Twiedzenie 5.0.5. (Twierdzenie o całkowaniu przez części)
Niech F i G będą funkcjami różniczkowalnymi na $\mathcal{I} \in [a, b]$ i niech $F' = f \in \mathcal{R}$ oraz $G' = g \in \mathcal{R}$. Wtedy

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x)dx. \tag{5.36}$$

Rozdział 6

Liczby zespolone

Definicja 6.0.1. Liczbą zespoloną nazywamy parę uporządkowaną (a, b) liczb rzeczywistych. "Uporządkowaną" znaczy, że traktujemy pary (a, b) i (b, a) jako różne, o ile $a \neq b$.

Niech $x = (a, b)$, $y = (c, d)$ będą dwoma liczbami zespolonymi. Napiszemy $x = y \iff a = c,\ b = d$. Zauważmy na marginesie, że definicja ta nie jest oczywista — porównaj z definicją liczby wymiernej. Ponadto określamy działania

$$x + y = (a + c, b + d), \quad xy = (ac - bd, ad + bc). \tag{6.1}$$

Na mocy tych własności możemy sformułować następujące twierdzenie.

Twiedzenie 6.0.1. Przy powyżej określonych działaniach dodawania i mnożenia zbiór liczb zespolonych, oznaczany przez $\mathbb{C}$ staje się ciałem z elementami $(0, 0)$ oraz $(1, 0)$ w roli odpowiednio 0 i 1.

Dowód. Sprawdźmy, że spełnione są aksjomaty ciała.

- $x + y \in \mathbb{C}$ oczywiste
- $x + y = y + x$ oczywiste
- $(x + y) + z = x + (y + z)$ oczywiste
- $x + 0 = (a, b) + (0, 0) = (a + 0, b + 0) = (a, b) = x$
- Niech $-x = (-a, -b)$. Wtedy $x + (-x) = (0, 0) = 0$
- $xy \in \mathbb{C}$ oczywiste
- $xy = yx$ oczywiste
- $(xy)z = x(yz)$ sprawdzić
- $1 \cdot x = (1, 0) \cdot (a, b) = (a, b) = x$

- Jeżeli $x \neq 0$, to $(a, b) \neq (0, 0)$. Wtedy co najmniej jedna z liczb a lub b jest niezerowa. Zatem $a^2 + b^2 > 0$ i możemy wprowadzić liczbę

$$\frac{1}{x} \equiv \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right), \tag{6.2}$$

  która spełnia $x \cdot \frac{1}{x} = (1, 0) = 1$.

- $x(y + z) = xy + xz$ oczywiste.

Twierdzenie 6.0.2. Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b mamy $(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$ oraz $(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0)$.

Dowód jest trywialny, ale twierdzenie to pokazuje, że liczby zespolone postaci $(a, 0)$ mają te same własności arytmetyczne, co odpowiadające im liczby rzeczywiste a. Możemy więc identyfikować $(a, 0)$ z a. Identyfikacja ta pozwala nam traktować ciało liczb rzeczywistych jako podciało ciała liczb zespolonych.

Definicja 6.0.2.

$$i \equiv (0, 1). \tag{6.3}$$

Twierdzenie 6.0.3.

$$i^2 = -1. \tag{6.4}$$

Dowód.

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1. \tag{6.5}$$

Twierdzenie 6.0.4. Jeżeli $a, b \in \mathbb{R}$, to $(a, b) = a + ib$.

Dowód.

$$a + ib = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = (a, 0) + (0, b) = (a, b). \tag{6.6}$$

Definicja 6.0.3. Jeżeli $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $z = a + ib$, to $\overline{z} \equiv a - ib$ będziemy nazywali liczbą sprzężoną do z. Liczby a i b odpowiednio stanowią część rzeczywistą i urojoną liczby z. Stosuje się zapis

$$a = \mathrm{Re}\, z, \quad b = \mathrm{Im}\, z \tag{6.7}$$

Twierdzenie 6.0.5. Jeżeli z i w są liczbami zespolonymi, to

1. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
2. $\overline{zw} = \overline{zw}$
3. $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}\, z, \ z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}\, z$
4. $z\overline{z} \in \mathbb{R}_+$.

Wszystkie oczywiste, w (4) należy wykazać $z\overline{z} = a^2 + b^2$.

Definicja 6.0.4. Wartością bezwzględną liczby $z \in \mathbb{C}$, którą oznaczamy $|z|$ nazywamy nieujemny pierwiastek kwadratowy $z\overline{z}$, czyli $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$.

Twiedzenie 6.0.6. Niech $z \in \mathbb{C}$ i $w \in \mathbb{C}$. Wtedy

1. $|z| > 0$ o ile $z \neq 0$; $|0| = 0$;
2. $|\overline{z}| = |z|$;
3. $|zw| = |z||w|$;
4. $|\mathrm{Re}\, z| \leqslant |z|$;
5. $|z + w| \leqslant |z| + |w|$.

Dowód. Dowód 1-4 jest oczywisty. Dowód 5:

$$\begin{aligned}|z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) = z\overline{z} + z\overline{w} + \overline{z}w + w\overline{w} = \\ &= |z|^2 + 2\mathrm{Re}\,(z\overline{w}) + |w|^2 \leqslant |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 = \\ &= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2.\end{aligned} \tag{6.8}$$

Twiedzenie 6.0.7. Jeżeli $a_1 \ldots a_n \in \mathbb{C}$ oraz $b_1 \ldots b_n \in \mathbb{C}$, to

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_j \bar{b}_j\right|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2. \tag{6.9}$$

Dowód. Niech $A =\leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2$, $B = \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2$, $C = \sum_{j=1}^{n} a_j \bar{b}_j$. Zakładamy, że $B > 0$ (inaczej — oczywiste). Wtedy

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} |Ba_j - Vb_j|^2 &= \sum_{j=1}^{n} (Ba_j - Cb_j)(B\overline{a}_j - \overline{C}\overline{b}_j) = \\ &= B^2A^2 - B\overline{C} \cdot C - BC \cdot \overline{C} + |C|^2 B = B(AB - |C|^2) \geqslant 0.\end{aligned} \tag{6.10}$$

Ponieważ $B > 0$, więc $AB - |C|^2 \geqslant 0$, co kończy dowód.

- interpretacja geometryczna
- związek z funkcjami trygonometrycznymi

Rozdział 7

Funckja wykładnicza, logarytmiczna i funkcje trygonometryczne

7.1 Szeregi potęgowe

Funkcje, które można przedstawić w postaci

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, \quad a \in \mathbb{R} \tag{7.1}$$

nazywamy funckjami analitycznymi. Jeżeli szereg (7.1) jest zbieżny $\forall x \in]-R, R[$ przy pewnym $R > 0$, to mówimy, że f da się rozwinąć w szereg potęgowy w otoczeniu $x = 0$.

Zdefiniujmy

$$E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \tag{7.2}$$

Kryterium d'Alamberta, zastosowane do szeregu (7.2) daje

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|z|}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \tag{7.3}$$

zatem ten potęgowy jest zbieżny dla każdego $z \in \mathbb{C}$.

Następnie, wymnóżmy dwa takie szeregi. Mamy mianowicie

$$\begin{aligned} E(z)E(w) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z+w)^n = E(z+w). \end{aligned} \tag{7.4}$$

W szczególności zachodzi

$$E(z)E(-z) = E(0) = 1. \tag{7.5}$$

Wynika stąd, że dla wszystkich z zachodzi $E(z) \neq 0$. Ponadto bezpośrednio z (7.2) wynika, że dla $x \to \infty$, $E(x) \to \infty$, a zatem $E(x) \to 0$ dla $x \to -\infty$ oraz $E(x) > 0$ dla $x > 0$. Z własności (7.5) wynika, że dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$, $E(x) > 0$. Porównanie wyraz po wyrazie $E(x)$ i $E(y)$ dla $x > 0$ pokazuje, że funkcja jest monotona rostąca, a zatem jest ściśle rosnąca na $x \in \mathbb{R}$.

Ze wzoru na iloczy wynika też

$$\lim_{h\to 0} \frac{E(z+h) - E(z)}{h} = E(z) \lim_{h\to 0} \frac{E(h) - 1}{h} = E(z), \tag{7.6}$$

gdzie ostatnia równość wynika bezpośrednio z (7.2).

Zauważamy następnie, że iterując wzór (7.7) otrzymujemy

$$E(z_1 + \ldots + z_n) = E(z_1) \ldots E(z_n). \tag{7.7}$$

Podstawiając $z_1 = \ldots = z_n$ mamy

$$E(n) = e^n \tag{7.8}$$

na mocy definicji (3.2.3). Jeżeli ponadto $p = n/m$, gdzie $n, m \in \mathbb{N}$, to

$$[E(p)]^m = e^n, \tag{7.9}$$

zatem

$$E(p) = e^p. \tag{7.10}$$

Jako że

$$x^y = \sup y^p, \tag{7.11}$$

gdzie kres górny wzięty jest dla wszystkich $p \in \mathbb{Q}$ takich, że $p < y$. Jeżeli określimy dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$

$$e^x = \sup e^p, \tag{7.12}$$

to z ciągłości i monotoniczności E otrzymamy

$$E(x) = e^x. \tag{7.13}$$

Podsumowując, mamy następujące własności funkcji wykładniczej:

1. funkcja e^x jest ciągła i różniczkowalna w dowolnym $x \in \mathbb{R}$
2. $(e^x)' = e^x$
3. e^x jest funckją rosnącą i $e^x > 0$
4. $e^{x+y} = e^x e^y$
5. $e^x \to \infty$ przy $x \to \infty$, $e^x \to 0$ przy $x \to -\infty$
6. $\lim\limits_{x\infty} x^n e^{-x} = 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Ostatnia własność wynika z

$$e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \tag{7.14}$$

dla dodatnich x, stąd

$$x^n e^{-x} > \frac{(n+1)!}{x}, \tag{7.15}$$

co kończy dowód.

7.1.1 Funkcja logarytmiczna

Ponieważ funkcja E jest różnowartościowa, istnieje funckja odwrotna L, która także jest różnowartościowa. Jej obszarem określoności jest $E(\mathbb{R})$, zatem $\mathbb{R}_+$. Funkcja L określona jest przez

$$E(L(y)) = y \quad (y > 0) \quad \text{lub} \quad L(E(x)) = x \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{7.16}$$

Różniczkując drugą z tych równości dostajemy

$$L'(y) = \frac{1}{y}. \tag{7.17}$$

Jako że $L(1) = 0$, mamy

$$L(y) = \int_1^y \frac{dx}{x}. \tag{7.18}$$

Równość ta jest powszechnie używaną definicją funkcji logarytmicznej.

Zauważmy, że dla $u = E(x)$ oraz $v = E(y)$ zachodzi

$$L(uv) = L(E(x) \cdot E(y)) = L(E(x+y)) = x + y, \tag{7.19}$$

zatem mamy

$$L(uv) = L(u) + L(v) \tag{7.20}$$

i oznaczamy $L(x) = \log(x)$ lub $\ln(x)$. Oczywiście, jako że jest to funckja odwrotna od wykładnicznej, zachodzi

$$\log(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty \quad \text{oraz} \quad \log(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty. \tag{7.21}$$

Łatwo wykazać, że

$$x^\alpha = e^{\alpha \log x}, \tag{7.22}$$

zatem

$$(x^\alpha)' = \alpha e^{(\alpha-1)\log x}. \tag{7.23}$$

7.1.2 Funkcje trygonometryczne

Określmy

$$C(x) = \frac{1}{2}\left[E(ix) + E(-ix)\right], \quad S(x) = \frac{1}{2i}\left[E(ix) - E(-ix)\right]. \tag{7.24}$$

Wykażemy, że dla $x \in \mathbb{R}$ funkcje te są tożsame z $\cos x$ oraz $\sin x$. Po pierwsze, zauważmy, że z $E(\overline{z}) = \overline{E(z)}$ wynika, że C i S są rzeczywiste. Ponadto, ze związku

$$E(ix) = C(x) + iS(x) \tag{7.25}$$

wynika, że C i S są odpowiednio rzeczywistą i urojoną częścią funkcji zespolonej E. Zauważmy też, że

$$|E(xi)|^2 = E(ix)\overline{E(ix)} = E(ix)E(-ix) = 1 \to |E(ix)| = 1. \tag{7.26}$$

Ponadto widać, że $C(0) = 1$ i $S(0) = 0$ oraz

$$C'(x) = -S(x), \quad S'(x) = C(x). \tag{7.27}$$

Wykażemy następnie, że istnieją dodatnie liczby x, dla których $C(x) = 0$. Gdyby tak nie było, to z równości $C(0) = 1$ wynikałoby, że $C(x) > 0$ dla dowolnego $x > 0$. Zatem na podstawie (7.27), $S'(x) > 0$, co oznacza, że S byłaby ściśle rosnąca. Ponieważ $S(0) = 0$, więc z tego wynikałoby, że $S(x) > 0$ dla $x > 0$, zatem dla $0 < x < y$ zachodziłoby

$$S(x)(y-x) < \int_x^y S(t)dt = C(x) - C(y) \leqslant 2. \tag{7.28}$$

Ale to nie może być spełnione dla odpowiedniu dużych y, bo $S(x) > 0$, więc $C(x) = 0$ dla pewnych x dodatnich.

Niech x_0 będzie najmniejszą z dodatnich liczb x, dla których $C(x) = 0$. Określmy π jako

$$\pi \equiv 2x_0. \tag{7.29}$$

Wtedy $C(\frac{1}{2}\pi) = 0$ oraz na mocy (7.26) $S(\frac{1}{2}\pi) = \pm 1$. Ponieważ $C(x) > 0$ na przedziale $]0, \frac{1}{2}\pi[$, zatem $S(\frac{1}{2}pi) = 1$. Wobec tego $E(i\frac{\pi}{2}) = i$ oraz $E(i\pi) = -1$, $E(i2\pi) = 1$. Zatem

$$E(z + 2\pi i) = E(z). \tag{7.30}$$

Twiedzenie 7.1.1.

1. Funckja E jest ciągłą funkcją okresową o okresie $2\pi i$.
2. Funkcje C i S są okresowe o okresie 2π.
3. Jeżeli $0 < t < 2\pi$, to $E(ti) \neq 1$.
4. Jeżeli z jest liczbą zespoloną i $|z| = 1$, to istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista $t \in [0, 2\pi]$ taka, że $E(ti) = z$.

Dowód. 1. Już udowodniliśmy. 2. wynika z 1. oraz ze wzoru (7.24). Niech $0 < t < \frac{1}{2}\pi$, a $E(ti) = x + iy$, gdzie $0 < x < 1$ i $0 < y < 1$. Mamy

$$E(4ti) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 4xyi(x^2 - y^2). \tag{7.31}$$

Jeżeli $E(4ti)$ jest rzeczywiste, to $x^2 - y^2 = 0$, a na podstawie $x^2 + y^2 = 1$ wynika $x^2 = y^2 = \frac{1}{2}$, a zatem $E(4ti) = -1$, co daje 3.

Jeżeli $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant 2\pi 0$, to $E(t_2 i)[E(t_1 i)]^{-1} = E(t_2 i - t_1 i) \neq 1$ na podstawie 3. Wynika stąd część 4. dotycząca jednoznaczności. Część o istnieniu w książce (str. 156).

Z części 4 oraz własności (7.26) wynika, że $E(ix)$ tworzy krzywą zamkniętą - jest nią okrąg o promieniu 1. Stąd zasadne jest utożsamienie $C(x)$ i $S(x)$ jako $\sin(x)$ i $\cos(x)$.