Rachunek różniczkowy i całkowy[1]
Wydział Fizyki UW

Wyboru dokonali: J. Kamiński i J. Krupski
Wersję elektroniczną przygotował J. Kamiński

Zadania na ćwiczenia i do pracy własnej dla makrokierunku
Energetyka i Chemia Jądrowa
prowadzonego przez Wydział Chemii i Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego

Wersja z 29 stycznia 2013

Projekt nr: UDA - POKL.04.01.01-00-100/10-00
"Chemia, fizyka i biologia na potrzeby społeczeństwa XXI wieku: nowe makrokierunki studiów I, II i III stopnia"

[1]Zadania oznaczone znakiem ❍ wydają się być trudniejsze

1 Tydzień I: Funkcje i wykresy

Zadanie 1.1
Naszkicować wykresy następujących funkcji w zaznaczonych przedziałach:

1. $y = x^4$, dla $-1.5 \leqslant x \leqslant 1$,
2. $y = x(1 - x)$, dla $-1 \leqslant x \leqslant 2$,
3. $y = |x - 1|$, dla $-3 \leqslant x \leqslant 3$,
4. $y = |x| + |x - 3| + |x + 2|$, dla $-3 \leqslant x \leqslant 4$.

Zadanie 1.2
Wyznaczyć proste przechodzące przez pary następujących punktów:

1. $(1, 1)$ i $(-1, 5)$,
2. $(0, 1)$ i $(2, 1)$,
3. $(2, 1)$ i $(-1, -1)$.

Naszkicować trójkąt utworzony przez te trzy proste i wyznaczyć długości każdego z jego boków.

Zadanie 1.3
Wyznaczyć punkty przecięcia następujących okręgów i linii prostych:

1. $x^2 + y^2 = 8$ i $x = 2$,
2. $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 4 = 0$ i $y = 2x + 1$,
3. $x^2 + y^2 = 1$ i $x + y = \sqrt{2}$.

Zadanie 1.4 ❍
Wyznaczyć wszystkie wymierne wartości x, dla których $y = \sqrt{x^2 + x + 3}$ również jest liczbą wymierną. W tym celu skorzystać z faktu, że dla wymiernych x i y liczba $q = y - x$ również jest wymierna i wyznaczyć x i y poprzez q. Czy wszystkie wymierne q są dopuszczalne?

Zadanie 1.5
Rozwiąż następujące nierówności:

1. $|2x - 3| < 1$,
2. $(x - 2)^2 \geqslant 4$,
3. $x^2 + 2x - 8 \leqslant 0$.

Zadanie 1.6
Wyznaczyć x, dla którego $y = 3x^2 + 5x - 1$ osiąga minimalną wartość. Skorzystać z metody uzupełniania do pełnego kwadratu.

Zadanie 1.7
Czym jest prostokąt o zadanym obwodzie $2p$, którego pole jest maksymalne. Skorzystać z metody uzupełniania do pełnego kwadratu.

Zadanie 1.8 ❍
Pokazać, że dla każdego x funkcja $f(x) = x^3 + 3x + 5$ jest funkcją rosnącą. W tym celu wykazać, że jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) < f(x_2)$. Skorzystać z tożsamości $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

Zadanie 1.9 ❍
Przy zadanych n liczbach $a_1, a_2, \ldots, a_n$ wyznaczyć wartość x, dla którego funkcja

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (x - a_i)^2$$

osiąga minimum. Skorzystać z metody uzupełniania do pełnego kwadratu.

Zadanie 1.10
Wyznaczyć największą wartość funkcji

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x^2 - 4x + 3}}.$$

Zadanie 1.11
Na płaszczyźnie (x, t) naszkicować wykresy następujących funkcji:

1. $x(t) = \theta(t+1) - \theta(t-1)$, dla $-2 \leqslant t \leqslant 2$,
2. $x(t) = t\theta(t-1)$, dla $0 \leqslant t \leqslant 2$,
3. $x(t) = (t^2 - 1)[\operatorname{sgn}(t+1) + \operatorname{sgn}(1-t)]$, dla $-2 \leqslant t \leqslant 2$,

gdzie tzw. funkcja skoku $\theta(t)$ i funkcja znaku $\operatorname{sgn}(t)$ są zdefiniowane następująco:

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t < 0 \\ 1 & \text{dla} \quad t \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & \text{dla} \quad t < 0 \\ 0 & \text{dla} \quad t = 0 \\ 1 & \text{dla} \quad t > 0 \end{cases}$$

Zadanie 1.12
Wykazać, że

1.
$$\frac{\cos x}{\mathrm{ctg}\frac{x}{2} - \mathrm{tg}\frac{x}{2}} = \frac{1}{4}\sin(2x)$$

2.
$$\mathrm{tg}x = \sqrt{\frac{1-\cos(2x)}{1+\cos(2x)}}$$

3.
$$\sqrt{2\mathrm{ctg}x + \frac{1}{\sin^2 x}} = -1 - \mathrm{ctg}x$$

i określić zbiór wartości x, dla których ta równość zachodzi.

Zadanie 1.13
Które z poniższych funkcji są parzyste, a które nieparzyste:

1. $f(x) = 4 - 2x^4 + \sin^2 x$;
2. $f(x) = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$;
3. $f(x) = (1+a^{kx})/(1-a^{kx})$;
4. $f(x) = \sin x + \cos x$;
5. $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$;
6. $f(x) = x^2 - |x|$;
7. $f(x) = x\sin^2 x - x^3$;
8. $f(x) = (1+2^x)^2/2^x$.

Zadanie 1.14
Niech
$$f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right).$$
Wykazać, że dla dowolnych $x_1, x_2 \in (-1,1)$ spełniona jest tożsamość funkcyjna
$$f(x_1) + f(x_2) = f\left(\frac{x_1+x_2}{1+x_1x_2}\right).$$

Zadanie 1.15
Niech
$$f(x) = \begin{cases} 3^{-x} - 1, & \text{dla} \quad -1 \leqslant x < 0, \\ \mathrm{tg}(x/2), & \text{dla} \quad 0 \leqslant x < \pi, \\ x/(x^2-2), & \text{dla} \quad \pi \leqslant x \leqslant 6. \end{cases}$$
Wyznaczyć $f(-1)$, $f(\pi/2)$, $f(2\pi/3)$, $f(4)$, $f(6)$.

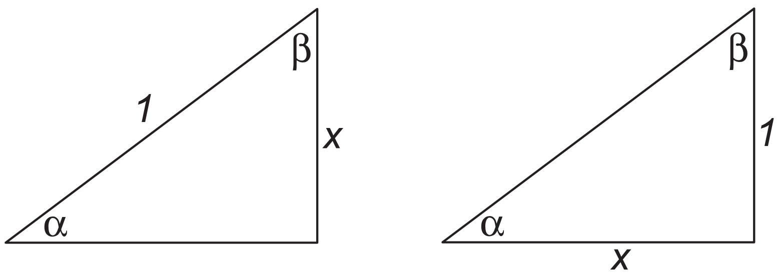
Zadanie 1.16
Niech $\varphi(x) = x^2$ i $\psi(x) = 2^x$. Określić $\varphi[\psi(x)]$ i $\psi[\varphi(x)]$.

Zadanie 1.17
Wyznaczyć okresy funkcji $\mathrm{tg}(2x)$, $\mathrm{ctg}(x/2)$, $\sin(2\pi x)$, $|\cos(x)|$ i $\sin^4 x + \cos^4 x$.

Zadanie 1.18
Udowodnić, że jeśli $f(x)$ jest funkcją okresową o okresie T, to $f(ax + b)$, $a > 0$, jest również funkcją okresową. Wyznaczyć jej okres.

Zadanie 1.19
Udowodnić, że funkcja $f(x) = \cos x^2$ nie jest funkcją okresową.

Zadanie 1.20
Wyprowadzić zależności $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$, $\mathrm{arctg}(1/x) = \mathrm{arcctg}x$ i $\mathrm{arctg}x + \mathrm{arcctg}x = \pi/2$. Posłużyć się rysunkami.



Zadanie 1.21
Wielkości $A > 0$, ω i φ występujące w funkcji $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ nazywamy odpowiednio amplitudą, częstością i fazą. Wyznaczyć je dla funkcji $f(t) = 3\sin(t/2) + 4\cos(t/2)$.

Zadanie 1.22
Naszkicować funkcje $f(x) = \sqrt{\sin x}$, $g(x) = (x+3)/(x+1)$ i $h(x) = x^{1/\ln x}$. Uwaga na dziedziny!

Zadanie 1.23
Niech A, c, t_0 i T będą dowolnymi stałymi. Zdefiniujmy funkcję $f(t) = A\mathrm{e}^{ct}$. Wykazać, że ciąg

$$f(t_0), f(t_0 + T), f(t_0 + 2T), \ldots, f(t_0 + nT), \ldots$$

jest ciągiem geometrycznym.

Zadanie 1.24
Wyznaczyć sumy następujących szeregów geometrycznych:

$$\sum_{r=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{2}\Big)^r, \quad \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\Big(\frac{1}{2}\Big)^r, \quad \sum_{r=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-r}, \quad 1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{8}{27}\ldots.$$

2 Tydzień II: Logika, zbiory i indukcja matematyczna

Zadanie 2.1

Wykazać, że poniższe zdania są tautologiami:

1.	$p \Rightarrow \sim\sim p$	(*prawo podwójnego przeczenia*)
2.	$p \vee \sim p$	(*prawo wyłączonego środka*)
3.	$\sim (p \wedge \sim p)$	(*prawo sprzeczności*)
4.	$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$	(*prawo de Morgana*)
5.	$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$	(*prawo de Morgana*)
6.	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$	(*prawo transpozycji*)
7.	$[(p \Rightarrow q) \Rightarrow p] \Rightarrow p$	(*prawo Pierce'a*)
8.	$(\sim p \Rightarrow p) \Rightarrow p$	(*prawo Claviusa*)
9.	$\sim p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$	(*prawo Dunsa-Scotusa*)

Zadanie 2.2

Zdaniu p przyporządkujmy jego wartość logiczną 0 lub 1, którą również oznaczmy symbolem p, zatem zawsze zachodzi równość $p^2 = p$. Sprawdzić następującą korespondencję pomiędzy zdaniami a operacjami algebraicznymi:

1.	$\sim p$	$1 - p$
2.	$p \wedge q$	pq
3.	$p \vee q$	$p + q - pq$
4.	$p \Rightarrow q$	$1 - p + pq$
5.	$p \Leftrightarrow q$	$1 - p - q + 2pq$

Zadanie 2.3

Metoda algebraiczna z zadania 2.2 jest wygodna, gdy sprawdzamy wartość logiczną zdań złożonych z wielu zdań prostych. Sprawdzić tą metodą tautologie z zadania 2.1 oraz sprawdzić, czy poniższe zdania także są tautologiami,

1. $(p \wedge q \Rightarrow r) \Leftrightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$
2. $[p \vee (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \vee r]$
3. $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$
4. $p \Rightarrow [(\sim p) \vee q]$
5. $[(p \vee q) \Rightarrow r] \Rightarrow [(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)]$

Zadanie 2.4

Podać elementy następujących zbiorów:

1. $\{x \in \mathbb{N} : x^2 \leqslant 7\}$
2. $\{x \in \mathbb{N} : x^2 - 8x + 1 < 0\}$
3. $\{x \in \mathbb{N} : |3 - x| < 3\}$
4. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 3\}$
5. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \geqslant 0\}$

Zadanie 2.5

Udowodnić równości zbiorów posługując się rachunkiem zdań (sugeruje się skorzystać z metody algebraicznej z zadania 2.2):

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap B)$
2. $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$
3. $[A \cup B]' = A' \cap B'$ (prawo de Morgana)
4. $[A \cap B]' = A' \cup B'$ (prawo de Morgana)
5. $A \cup (B - C) = [(A \cup B) - C] \cup (A \cap C)$

Zadanie 2.6 ❍

Dowieść indukcyjnie, że

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_3) \cup \ldots \cup (A_{n-1} - A_n) \cup (A_n - A_1) \cup (A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

Zadanie 2.7

Niech $|A|$ oznacza ilość elementów zbioru skończonego. Wykazać indukcyjnie, że

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| \leqslant |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$$

Zadanie 2.8 ❍

(Zadanie Lewisa Carrolla) W pewnej bitwie co najmniej 80% walczących straciło rękę, co najmniej 85% nogę, co najmniej 70% oko i co najmniej 75% ucho. Oszacować liczbę tych uczestników bitwy, którzy odnieśli wszystkie cztery obrażenia, jeśli w bitwie wzięło udział 300 wojowników. Skorzystać z wyniku poprzedniego zadania i praw de Morgana. [Odpowiedź: nie mniej niż 30]

Zadanie 2.9

Udowodnić indukcyjnie równości:

1. $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
4. $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
5. $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k}$. (trudniejsze).

3 Tydzień III: Funkcje odwrotne i granica ciągu

Zadanie 3.1
Zdefiniujmy funkcję $f(x) = (x+1)/(x-1)$. Wyznaczyć funkcje $f^{-1}(x)$, $g(x) = f(x^2)$ i $h(x) = f(f(x))$ oraz ich dziedziny.

Zadanie 3.2
Wyznaczyć funkcje odwrotne do funkcji hiperbolicznych

$$\mathrm{sinh}x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}, \qquad \mathrm{cosh}x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}, \qquad \mathrm{tgh}x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$$

Zadanie 3.3
Odwrócić funkcję $y = \log_a(x + \sqrt{x^2+1})$, $a > 1$, $a \neq 1$, i wyrazić ją poprzez sinus hiperboliczny.

Zadanie 3.4 ❍
Pokazać, że funkcje

$$f(x) = x^2 - x + 1 \quad \text{i} \quad \varphi(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{3}{4}}$$

są funkcjami wzajemnie do siebie odwrotnymi, tj. że zachodzą równości

$$f\Big(\varphi(x)\Big) = x \quad \text{i} \quad \varphi\Big(f(x)\Big) = x.$$

Sprawdzić dziedziny! Wykorzystując ten fakt znaleźć rozwiązania równania

$$x^2 - x + 1 = \frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{3}{4}},$$

najlepiej nie rozwiązując go, ale zastępując go prostszym!

Zadanie 3.5
Wykazać, że

1.
$$\cos(\mathrm{arcsin}x) = \sqrt{1-x^2}$$

2.
$$\cos(2\mathrm{arcsin}x) = 1 - 2x^2$$

3.
$$\sin(\mathrm{arctg}x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

4.
$$\arcsin x = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

5.
$$2\arccos\sqrt{\frac{1+x}{2}} = \arccos x$$

i określić zbiór wartości x, dla których ta równość zachodzi.

Zadanie 3.6

Rozwiązać równanie
$$\operatorname{arctg}\sqrt{x(x+1)} + \arcsin\sqrt{x^2+x+1} = \frac{\pi}{2}.$$
Wbrew pozorom jest to prosty problem, jeśli zaczniemy od wyznaczenia dziedziny.

Zadanie 3.7

Wyznaczyć funkcję odwrotną do funkcji

1. $y = 5^{\ln x}$
2. $y = 2^{x(x-1)}$
3. $y = (1-x)/(1+x)$

Zadanie 3.8

Korzystając z definicji granicy ciągu wykazać, że

1. $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ dla $x_n = (2n-1)/(2n+1)$
2. $\lim_{n\to\infty} x_n = 1/3$ dla $x_n = (3n-5)/(9n+4)$
3. $\lim_{n\to\infty} x_n = 3/5$ dla $x_n = (3n^2+1)/(5n^2-1)$
4. $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ dla $x_n = (3^n+1)/(3^n+4)$

Zadanie 3.9

Wyznaczyć granice ciągów:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+5n+4}{2+n^2}$
b) $\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2-4n+3}{2n^3+3n+4}$
c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$
d) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2+n}{4n^2+7}\right)^3$
e) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{2n+3} - \sqrt{n-1})$
f) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n^2-n^3} + n)$

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Zadanie 3.10

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach znaleźć granicę ciągu

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

Zadanie 3.11

Korzystając z twierdzenia Bolzano-Weierstrassa o ciągu monotonicznym i ograniczonym wykazać, że dla $a > 0$ ciąg

$$x_1 = \sqrt{a}, \quad x_2 = \sqrt{a+\sqrt{a}}, \ldots, x_n = \sqrt{a + x_{n-1}}, \ldots$$

ma granicę i wynosi ona $(\sqrt{4a+1}+1)/2$.

Zadanie 3.12

Wykazać, że ciąg

$$x_n = \cos\frac{n^2\pi}{n+2}$$

nie ma granicy.

Zadanie 3.13

Wykazać, że 0 jest granicą ciągów:

$$a_n = \frac{n5^n}{2^n 3^{n+1}}, \qquad b_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$$

W tym celu wykazać, że granicami

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|}$$

są liczby nieujemne miniejsze od 1, a następnie skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach.

Zadanie 3.14

Zdefiniujmy dwa ciągi dla dodatnich liczb a i b:

$$x_1 = a, \quad y_1 = b, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

Wykazać, że $x_n \leqslant y_n$ oraz, że ciąg x_n jest ciągiem monotonicznie rosnącym, a ciąg y_n monotonicznie malejącym. Zatem ciągi te mają granicę. Wykazać, że ich granicą jest ta sama liczba. Jest to tzw. średnia arytmetyczno-geometryczna, wykorzystywana w analizie numerycznej do wyznaczania niektórych funkcji specjalnych, np. funkcji eliptycznych.

4 Tydzień IV: Granica i ciągłość funkcji, asymptoty

Zadanie 4.1
Wyznaczyć granice funkcji:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{4x^5+9x+7}{3x^6+x^3+1}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x^m-1}$ dla $n, m \in \mathbb{N}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{9+5x+4x^2}-3}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x+2}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$ f) $\lim\limits_{x\to\infty} (1+1/x)^{7x}$

Zadanie 4.2
Wyznaczyć granice funkcji:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x+1}{3x+9}, \quad \lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arctg}(x), \quad \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{3x^2-4} - \frac{x^2}{3x+2}\right).$$

Zadanie 4.3
Wyznaczyć granice funkcji:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{3}\right), \quad \lim_{x\to\infty} (x - \sqrt{x^2+a^2}), \quad \lim_{x\to\infty} x(x - \sqrt{x^2+a^2}),$$

dla dowolnych rzeczywistych a.

Zadanie 4.4
Wyznaczyć granice funkcji korzystając z podstawień:

1. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x-2}{\sqrt[3]{26+x}-3}$, $\quad 26+x = z^3$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{1+x}-1}{x}$, $\quad 1+x = z^5$.
3. $\lim\limits_{x\to \pi/6} \frac{\sin(x-\pi/6)}{\sqrt{3}-2\cos x}$, $\quad x-\pi/6 = z$.

Zadanie 4.5
Funkcje

$$f(x) = \frac{(1+x)^n-1}{x}, \qquad f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}, \qquad f(x) = x\operatorname{ctg}x, \qquad f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$$

są nieokreślone dla $x = 0$. Określić $f(0)$ tak, aby funkcje te były ciągłe dla $x = 0$.

Zadanie 4.6
Dodefiniować funkcje w punkcie $x = 0$ tak, aby otrzymać funkcję ciągłą:

1. $f(x) = \frac{\operatorname{tg}x}{x}$;

2. $f(x)=\frac{5x^2-3x}{x}$;
3. $f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$;
4. $f(x)=\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$.

Zadanie 4.7

Dookreślić funkcje w wybranych punktach tak, aby były one w tych punktach funkcjami ciągłymi. Czy zawsze można tak zrobić?

$$f(x)=\frac{1-\sqrt{1+x}}{x},\ \text{dla } x=0; \qquad f(x)=\frac{x^2-4}{\operatorname{arctg}(x+2)},\ \text{dla } x=-2;$$
$$f(x)=\frac{x^3+1}{\arcsin(x+1)},\ \text{dla } x=-1; \qquad f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1-\operatorname{tg}x}},\ \text{dla } x=0;$$
$$f(x)=\frac{x^2}{1-\cos x},\ \text{dla } x=0; \qquad f(x)=\frac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x},\ \text{dla } x=\pi;$$
$$f(x)=\sqrt[x]{1+\sin x},\ \text{dla } x=0; \qquad f(x)=\frac{\arccos x}{x-1},\ \text{dla } x=1;$$

Zadanie 4.8

Określić dziedzinę funkcji $f(x)$ i pokazać, że jest ona tam funkcją ciągłą

$$f(x)=2x^2-1; \qquad f(x)=\frac{1}{\sin x}; \qquad f(x)=\mathrm{e}^x; \qquad f(x)=\ln x$$

Zadanie 4.9

Czy funkcja $f(x)=x^3/4-\sin(\pi x)+3$ przyjmuje wartość $7/3$ na odcinku $[-2,2]$?

Zadanie 4.10

Korzystając z ciągłości funkcji $f(x)=2^x-1/x$ na odcinku $[1/4,1]$ wykazać, że równanie $x\,2^x=1$ ma przynajmniej jedno rozwiązanie mniejsze od 1.

Zadanie 4.11

Wyznaczyć stałe a i b z warunku:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$;
2. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$.

Zadanie 4.12
Wyznaczyć asymptoty następujących funkcji:

$$y = \frac{5x}{x-3}, \quad y = \frac{3x}{x-1} + 3x, \quad y = \frac{x}{x^2+1}, \quad y = \sqrt{1+x^2} + 2x$$
$$y = \frac{x^2-6x+3}{x-3}, \quad y = x\mathrm{e}^x, \quad y = \frac{\sin x}{x}, \quad y = x\mathrm{arctg}x$$
$$y = x\mathrm{arcctg}x, \quad y = \ln(4-x^2), \quad y = \sqrt[3]{x^3-6x^2}, \quad y = x + \frac{\sin x}{x^2-\pi^2}$$

5 Tydzień V: Pochodna funkcji. Styczna i normalna do krzywej płaskiej.

Zadanie 5.1

Korzystając z definicji pochodnej jako granicy ilorazu różnicowego wyznaczyć pochodne funkcji $\cos(ax)$ i $5x^2 - 2x$.

Zadanie 5.2

Wykazać, posługując się definicją pochodnej, że dla funkcji $\sqrt[5]{x^3}$ i $3|x|+1$ nie istnieją pochodne w punkcie $x = 0$.

Zadanie 5.3

Wyznaczyć pochodne funkcji:

1. $3\cos x + 2\sin x$;
2. $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$;
3. $(x^2+1)\mathrm{arctg} x$;
4. $x^3 \mathrm{arcsin} x$;
5. $1 - \sqrt[3]{x^2} + 16/x$;
6. $\sqrt{x} + 1/\sqrt{x} + 0.1x^{10}$;
7. $\frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{1 - \cos\varphi}$;
8. $\frac{2x^2+x+1}{x^2-x+1}$;
9. $2\mathrm{e}^x + \ln x$;
10. $\mathrm{e}^x(\sin x + \cos x)$;
11. $\ln(\mathrm{tg} x)$;
12. $\ln[\sin(x^3+1)]$;
13. $\ln^6[\mathrm{tg}(3x)]$;
14. $\arcsin(\sqrt{x^2-1})$;
15. $\mathrm{arctg}(\ln x) + \ln(\mathrm{arctg} x)$;
16. $\ln^2[\mathrm{arctg}(x/3)]$;
17. $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$;

18. $\arcsin\frac{2x}{x^2+1}$.

Zadanie 5.4

Korzystając z tzw. pochodnej logarytmicznej,

$$\Big(\ln|f(x)|\Big)' = \frac{f'(x)}{f(x)},$$

wyznaczyć pochodne funkcji

1. $f(x) = a^x$;
2. $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$;
3. $f(x) = \sqrt[3]{\frac{\sin(3x)}{1-\sin(3x)}}$;
4. $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\sqrt{(x+3)^3}}$.

Zadanie 5.5

Wyznaczyć pochodne funkcji $y = f(\sin^2 x) + f(\cos x)$, $y = f(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{f(x)}$, $y = \log_{\phi(x)}\psi(x)$, dla $\phi(x) > 0$ i $\psi(x) > 0$.

Zadanie 5.6

Wiedząc, że dla $x \neq 1$,

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

wyznaczyć sumy

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$$

i

$$1 + 2^2x + 3^2x^2 + \ldots + n^2x^{n-1}$$

Zadanie 5.7

Wykazać indukcyjnie, że dla $x \neq k\pi$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ zachodzi równość

$$\cos x + \cos 3x + \ldots + \cos(2n-1)x = \frac{\sin 2nx}{2\sin x}$$

a następnie wyznaczyć sumę

$$\sin x + 3\sin 3x + \ldots + (2n-1)\sin(2n-1)x$$

Zadanie 5.8
Napisać równanie stycznej do krzywej $y = f(x)$ we wskazanym punkcie x_0 jeśli

1. $f(x) = x^3 - 3x + 2$ i $x_0 = 2$;
2. $f(x) = 2x^2 - x + 5$ i $x_0 = -0.5$;
3. $f(x) = x^4 + 3x^2 - 16$ i $x_0 = \pm 2$;
4. $f(x) = \sin^2 x$ i $x_0 = \pi/6$.

Zadanie 5.9
Znaleźć punkty na krzywej $y = x^3 - 3x + 5$, w których styczna:

1. jest równoległa do linii $y = -2x$;
2. jest prostopadła do linii $y = -x/9$;
3. tworzy kąt $30°$ z dodatnią osią x.

Zadanie 5.10
Znaleźć związek łączący punkt przecięcia stycznej do hiperboli $y = c/x$, $c > 0$, z osią x, jeśli punkt styczności ma współrzędną x_0.

Zadanie 5.11
Niech $f(x) = 3x^2 - 5$. Wyznaczyć ξ z przedziału $a < \xi < b$, spełniające formułę Lagrange'a $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ jeśli $a = -2$ i $b = 0$.

To samo, gdy $a = 0$ i $b = 6$.

Zadanie 5.12
Na krzywej $y = x^3$ znaleźć punkt, w którym styczna jest równoległa do siecznej łączącej punkty $(-1, -1)$ i $(2, 8)$.

Zadanie 5.13
Testem zgodności funkcji nazywamy stwierdzenie mówiące, że jeśli dla wszystkich punktów z pewnego odcinka (a, b) pochodna $f'(x) = 0$, to na tym odcinku funkcja $f(x)$ jest stała. Korzystając z testu zgodności wykazać równości:

1. $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$ dla $x \in [-1, 1]$;
2. $\sin^2 x = (1 - \cos(2x))/2$ dla $x \in \mathbb{R}$;
3. $\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2} = 2\mathrm{arctg} x$ dla $0 \leqslant x < \infty$. Jak ta równość powinna wyglądać dla $x < 0$?

Podobnie,

$$\arcsin\frac{2x}{1+x^2} = \begin{cases} \pi - 2\operatorname{arctg}x & x \geqslant 1 \\ 2\operatorname{arctg}x & -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -\pi - 2\operatorname{arctg}x & x \leqslant -1 \end{cases}$$

Zadanie 5.14

Wyznaczyć parametry a, b i c paraboli $y = ax^2 + bx + c$ tak, aby w punkcie $x = 1$ była ona styczna do prostej $y = x$ i przechodziła przez punkt $(-1, 0)$.

Zadanie 5.15

Niech funkcja $f(x)$ jest funkcją różniczkowalną i dodatnią. Pokazać, że wykresy funkcji $y_1 = f(x)$ i $y_2 = f(x)\sin(ax)$ są styczne do siebie w każdym wspólnym punkcie.

Zadanie 5.16

Funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

jest funkcją ciągłą (sprawdzić to). Obliczyć jej pochodną i sprawdzić, czy jest ona funkcją ciągłą.

Zadanie 5.17

Wykazać, że dla $x > 0$ i $0 \leqslant p \leqslant 1$ funkcja $f(x) = 1 + x^p - (1+x)^p$ jest funkcją rosnącą. Pokazać, że z tego faktu wynika nierówność $(1+x)^p \leqslant 1 + x^p$ dla $x \geqslant 0$. Wyprowadzić stąd nierówność $(a+b)^p \leqslant a^p + b^p$ słuszną dla $a, b > 0$ i $0 \leqslant p \leqslant 1$. W szczególności otrzymujemy

$$\sqrt[n]{a+b} \leqslant \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b},$$

dla $a, b > 0$ i $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Zadanie 5.18

Wykazać, że dla $t > 0$ funkcja

$$f(z) = (t^z + 1)^{1/z}$$

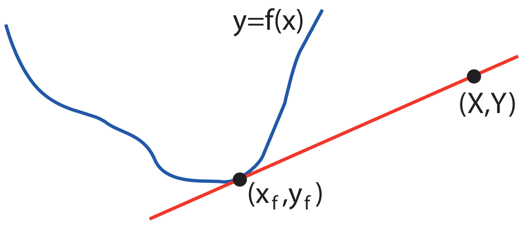
jest funkcją malejącą dla $z > 0$. Wykorzystać ten fakt przy dowodzie nierówności

$$(x^\alpha + y^\alpha)^{1/\alpha} > (x^\beta + y^\beta)^{1/\beta}$$

słusznej dla $x > 0$, $y > 0$ i $0 < \alpha < \beta$.

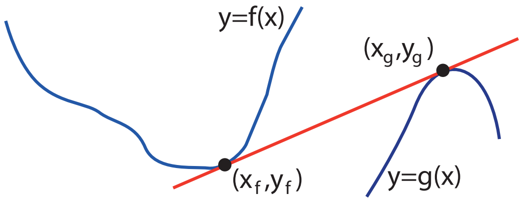
Zadanie 5.19

Podać równanie wyznaczające punkty styczności prostych przechodzących przez punkt (X, Y) i stycznych do wykresu funkcji $y = f(x)$ (rysunek). Obliczyć punkty styczności, gdy $f(x) = x^2$, a punkt (X, Y) ma współrzędne a) $(1, -3)$, b) $(1, 3)$.



Zadanie 5.20

Podać równania wyznaczające punkty styczności prostych stycznych do wykresów funkcji $y = f(x)$ i $y = g(x)$ (rysunek). Określić te styczne, gdy $f(x) = x^2 - 2x + 2$ i $g(x) = -x^2 - 2x - 2$.



Zadanie 5.21

Zadanie ilustruje metodę Newtona przybliżonego wyznaczania miejsc zerowych funkcji $f(x)$ wykorzystującą styczne do wykresu. Niech x_0 będzie miejscem zerowym funkcji, $f(x_0) = 0$. Wybierzmy jakikolwiek punkt x_1 blisko leżący x_0. Wyznaczyć styczną do wykresu w punkcie $(x_1, f(x_1))$, a następnie miejsce przecięcia tej stycznej z osią x. Oznaczmy odciętą tego punktu jako x_2 i powtórzmy powyższą procedurę dla punktu x_2. Otrzymujemy w ten sposób ciąg liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. Wykazać, że ciąg ten zadany jest rekurencją

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

i że jego granicą jest miejsce zerowe funkcji $f(x)$. Jakie są ograniczenia tej metody?

Zadanie 5.22

Zastosować metodę z zadania 5.21 do wyznaczenia $\sqrt{2}$. W tym celu wybieramy $f(x) = x^2 - 2$ i wyznaczamy rekurencję. Niech początkowym punktem będzie $x_1 = 1$. Wyznaczyć x_2, x_3, x_4 i sprawdzić jak dobrze liczby te przybliżają $\sqrt{2}$. Co otrzymamy jeśli za punkt początkowy wybierzemy $x_1 = -1$? Powtórzyć rachunki dla $x_0 = 10$.

6 Tydzień VI: Reguła de L'Hospitala. Ekstrema i badanie funkcji.

Zadanie 6.1
Korzystając z reguł L'Hospitala wyznaczyć granice:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{ax}-e^{-2ax}}{\ln(1+x)}$;
2. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\cos(3x)-e^{-x}}$;
5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(3x^2)}{\ln\cos(2x^2-x)}$;
6. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{e^{1/x^2}-1}{2\operatorname{arctg}(x^2)-\pi}$.

Zadanie 6.2
Wyznaczyć ekstrema i punkty przegięcia funkcji:

1. $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - x^3 - 9x^2 + 7$;
2. $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$;
3. $f(x) = x(x+1)^3(x-3)^2$;
4. $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1}$.

Zadanie 6.3
Przez zbadanie funkcji rozumie się na ogół wykonanie następujących czynności:

- Określenie dziedziny.
- Sprawdzenie, czy funkcja jest parzysta, nieparzysta lub okresowa.
- Wyznaczenie asymptot wykresu tej funkcji.
- Wyznaczenie punktów ekstremalnych.
- Wyznaczenie punktów przegięcia.
- Naszkicowanie wykresu.

Zbadać funkcje:

$a)\ f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ $\quad b)\ f(x) = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 5$ $\quad c)\ f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$

$d)\ f(x) = x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ $\quad e)\ f(x) = \arcsin\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)$ $\quad f)\ f(x) = x + \ln(x^2-1)$

$g)\ f(x) = x^2 e^{1/x}$ $\quad h)\ f(x) = (1+x)^{1/x}$ $\quad i)\ f(x) = \dfrac{1}{2}\sin(2x) + \cos x$

Zadanie 6.4

Zbadać funkcję i naszkicować jej wykres, jeśli:

1. $y = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 9$;
2. $y = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1}$;
3. $y = \frac{2x^3}{x^2-4}$;
4. $y = \frac{1-x^3}{x^2}$;
5. $y = x + \ln(x^2-1)$;
6. $y = \arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$;
7. $y = \exp(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$;
8. $y = |1+x|^{3/2}/\sqrt{x}$.

Zadanie 6.5

Pokazać, że istnieje funkcja $y = y(x)$ zdefiniowana równaniem $y^3 + 3y = x$ i wyznaczyć jej pochodną $y'(x)$.

Zadanie 6.6

Niech $y = 2x^2 - x^4$. Określić obszary, na których funkcja ta jest funkcją monotoniczną i wyznaczyć dla nich funkcję odwrotną $x = x(y)$ a następnie obliczyć jej pochodną $x'(y)$.

Zadanie 6.7

Niech

$$u(v) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+v}{1-v}$$

Określić obszary monotoniczności i wyznaczyć funkcję odwrotną $v(u)$. Sprawdzić relację

$$u'(v)v'(u) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = 1$$

Zadanie 6.8 ❍

Niech funkcja $f(x)$ jest określona na odcinku $[a, b]$. Wybierzmy jakiekolwiek dwa punkty z tego odcinka $x_1 < x_2$. Funkcję $f(x)$ nazywamy funkcją wklęsłą na odcinku $[a, b]$ jeśli wykres prostej przechodzącej przez punkty $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$ nie leży na odcinku $[x_1, x_2]$ powyżej wykresu funkcji $f(x)$. Wykazać, że tę właściwość można zapisać nierównością

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geqslant \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2), \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

Jak w podobny sposób zdefiniować funkcję wypukłą? Definicje te są ogólniejsze od tych wykorzystujących drugie pochodne funkcji, gdyż nie zakładają różniczkowalności funkcji.

Wiemy, że funkcja $\ln x$ jest funkcją wklęsłą dla dodatnich x (tj. w całej swojej dziedzinie). Wykazać, że implikuje to nierówność

$$\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \geqslant x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}, \quad x_1, x_2 > 0, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1,$$

której konsekwencją jest nierówność

$$\frac{n}{n+1}\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} + \frac{a_{n+1}}{n+1} \geqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}} a_{n+1}^{\frac{1}{n+1}},$$

dla naturalnych n i dodatnich a_i. Wykorzystać ten wynik, aby pokazać indukcyjnie, że średnia arystmetyczna liczb dodatnich jest nie mniejsza od ich średniej geometrycznej, tj.

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \left(a_1 a_2 \ldots a_n\right)^{\frac{1}{n}}.$$

---

7 Tydzień VII: Wzór Taylora

Zadanie 7.1
Korzystając ze wzoru Lagrange'a dla funkcji $f(x) = \ln x$ dla odcinka $[b, a]$, $b > 0$, wykazać nierówności

$$\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$$

Zadanie 7.2
Korzystając ze wzoru Lagrange'a dla funkcji $f(x) = x^p$ $(p > 1)$ dla odcinka $[b, a]$, $b > 0$, wykazać nierówności

$$pb^{p-1}(a-b) < a^p - b^p < pa^{p-1}(a-b)$$

Czy nierówność ta zostanie zmodyfikowana, gdy $p \leqslant 1$?

Zadanie 7.3
Udowodnić, że jeśli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są różniczkowalne i pierwsze pochodne są ciągłe, $f(x_0) = g(x_0)$ i dla $x > x_0$ zachodzi nierówność $f'(x) > g'(x)$, to $f(x) > g(x)$ dla $x > x_0$. Skorzystać ze wzoru Lagrange'a.

Zadanie 7.4
Udowodnić, że jeśli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są różniczkowalne n-krotnie i pochodne są ciągłe, $f^k(x_0) = g^k(x_0)$ dla $k = 0, 1, \ldots, n-1$ i dla $x > x_0$ zachodzi nierówność $f^n(x) > g^n(x)$, to $f(x) > g(x)$ dla $x > x_0$. Skorzystać ze wzoru Lagrange'a.

Zadanie 7.5
Wykorzystując zadanie 7.4 udowodnić nierówności:

$$\mathrm{e}^x > 1 + x \quad \text{dla} \quad x \neq 0$$

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x \quad \text{dla} \quad x > 0$$

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x \quad \text{dla} \quad x > 0$$

$$\mathrm{tg} x > x + \frac{x^3}{3} \quad \text{dla} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

Podać geometryczną ilustrację tych nierówności.

Zadanie 7.6
Podać pięć pierwszych wyrazów z rozwinięcia w szereg Taylora woków punktu $x = 0$ funkcji

$$\sqrt{1+x}, \quad (1+x)^\alpha, \quad \ln(1+x), \quad \arcsin x, \quad \mathrm{arctg} x$$

Zadanie 7.7
Posługując się wzorem Taylora wykazać, że

$$\lim_{x\to\infty}\Big[\Big(x^3-x^2+\frac{x}{2}\Big)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\Big]=\frac{1}{6}$$

Zadanie 7.8
Posługując się wzorem Taylora wykazać, że

$$\lim_{x\to\infty}\Big[x-x^2\ln\Big(1+\frac{1}{x}\Big)\Big]=\frac{1}{2}$$

Zadanie 7.9
Posługując się wzorem Taylora wykazać, że

$$\lim_{x\to 0}x^{-5}[\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}]=\frac{19}{90}$$

Zadanie 7.10
Posługując się wzorem Taylora wykazać, że

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\Big(\frac{1}{x}-\mathrm{ctg}x\Big)=\frac{1}{3}$$

8 Tydzień VIII: Całki nieoznaczone

Zadanie 8.1
Wyznaczyć funkcje pierwotne (całki nieoznaczone):

$$\int dx\, \sqrt[3]{1-3x}, \quad \int dx\, \frac{1}{2-3x^2}, \quad \int dx\, \frac{1}{\sqrt{2-3x^2}}, \quad \int dx\, \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}},$$

$$\int dx\, \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}, \quad \int dx\, \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad \int dx\, (1+x^2)^{-3/2}, \quad \int dx\, \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}},$$

$$\int dx\, \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}, \quad \int dx\, \frac{1}{e^x + e^{-x}}, \quad \int dx\, \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}, \quad \int dx\, \frac{1}{x\ln x \cdot \ln(\ln x)},$$

$$\int dx\, \frac{x}{4+x^4}, \quad \int dx\, \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}, \quad \int dx\, \frac{\sinh x}{\sqrt{\cosh 2x}}, \quad \int dx\, \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}}.$$

Zadanie 8.2 ❍

Wyznaczyć całkę

$$\int \sqrt{1-\sin 2x}\, dx$$

tak, aby funkcja pierwotna była funkcją ciągłą dla wszystkich x.

Zadanie 8.3
Rozłożyć na funkcje podcałkowe ułamki proste i wyznaczyć całki:

$$\int dx\, \frac{1}{x^2+x-2}, \quad \int dx\, \frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)}, \quad \int dx\, \frac{x}{x^4+3x^2+2},$$

$$\int dx\, \frac{1}{3x^2-2x-1}, \quad \int dx\, \frac{x}{x^4-2x^2-1}, \quad \int dx\, \frac{x+1}{x^2+x+1},$$

$$\int dx\, \frac{x^5}{x^6-x^3-2}, \quad \int dx\, \frac{1}{x(x^2+2)}, \quad \int dx\, \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

Zadanie 8.4
Całkując przez części wyznaczyć całki:

$$\int dx\, x^2 \arccos x, \quad \int dx\, \frac{\arcsin x}{x^2}, \quad \int dx\, \mathrm{arctg}(\sqrt{x}),$$

$$\int dx\, (\arcsin x)^2, \quad \int dx\, \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \int dx\, x^2\sqrt{1+x^2},$$

$$\int dx\, \sin(\ln x), \quad \int dx\, \frac{\mathrm{arctg}(e^x)}{e^x}, \quad \int dx\, \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}.$$

Zadanie 8.5

Niech

$$I_n = \int \mathrm{d}x \, \frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

Znaleźć liniową rekurencję wyrażającą I_n poprzez I_{n-1}, a następnie wyznaczyć całkę

$$\int \mathrm{d}x \, \frac{x^2+x}{(1+x^2)^3}.$$

Zadanie 8.6

Wyznaczyć całki z funkcji trygonometrycznych:

$$\int \mathrm{d}x \, \sin^4 x, \qquad \int \mathrm{d}x \, \mathrm{ctg}^2 x, \qquad \int \mathrm{d}x \, \mathrm{tg}^3 x,$$

$$\int \mathrm{d}x \, \frac{1}{\sin x \cos^2 x}, \qquad \int \mathrm{d}x \, \frac{\cos^3 x}{\sin x}, \qquad \int \mathrm{d}x \, \frac{1}{\sin^4 x}.$$

Zadanie 8.7

Wykazać, że jeżeli $y = ax^2 + bx + c$ i $a \neq 0$, to dla $a > 0$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\Big(\frac{y'}{2} + \sqrt{ay}\Big) + C,$$

a dla $a < 0$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{-y'}{\sqrt{b^2 - 4ac}} + C.$$

Najprościej jest zróżniczkować prawą stronę. Zachęcamy jednak do wybrania "drogi pod prąd".

Zadanie 8.8

Wyznaczyć całkę

$$\int \mathrm{d}x \, \frac{1}{x + \sqrt{x^2+x+1}}$$

korzystając z dwóch podstawień $\sqrt{x^2+x+1} = x + u$ lub $\sqrt{x^2+x+1} = xv + 1$ i porównać wyniki.

9 Tydzień IX: Całki oznaczone i ich zastosowania

Zadanie 9.1
Korzystając z definicji całki Riemanna wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int\limits_0^1 \mathrm{d}x\, x = \frac{1}{2}$$

gdzie

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n}.$$

Zadanie 9.2
Korzystając z definicji całki Riemanna wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int\limits_0^1 \mathrm{d}x\,\frac{1}{1+x} = \ln 2$$

gdzie

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}.$$

Zadanie 9.3
Korzystając z definicji całki Riemanna wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int\limits_0^1 \mathrm{d}x\,\frac{1}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$$

gdzie

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}.$$

Zadanie 9.4 ❍
Wykazać, że dla bardzo dużych x funkcja $f(x)$ określona całką

$$f(x) = \int\limits_0^x \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{t^2}$$

zachowuje się jak

$$f(x) \sim \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x}.$$

W tym celu zbadać granicę

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\frac{e^{x^2}}{2x}}$$

i wykazać, że jest ona równa 1.

Zadanie 9.5

Wykazać, że dla $a > 0$

$$\int_0^a dx\, x^3 f(x^2) = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} dx\, x f(x).$$

Zadanie 9.6

Wykazać, że całka

$$I_n = \int_0^{\pi/2} dx\, \sin^n x$$

spełnia związek rekurencyjny

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Wykazać, że

$$I_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{\pi}{2}$$

lub

$$I_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$$

gdzie

$$n!! = \begin{cases} 1\cdot 3\cdot 5\ldots n, & \text{dla nieparzystych } n \\ 2\cdot 4\cdot 6\ldots n, & \text{dla parzystych } n \end{cases}$$

Powtórzyć rachunki dla całki

$$J_n = \int_0^{\pi/2} dx\, \cos^n x.$$

Zadanie 9.7

Niech

$$I_n = \int_0^{\pi/4} dx\, \mathrm{tg}^{2n} x.$$

Wykazać rekurencję

$$I_n = \frac{1}{2n-1} - I_{n-1}.$$

ZADANIE 9.8

Korzystając z wyników zadania 9.7 obliczyć całki

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\,(1-x^2)^n, \qquad \int_0^1 \mathrm{d}x\,\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}.$$

ZADANIE 9.9

Niech

$$J(2m,2n)=\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x\, \sin^{2m} x \cos^{2n} x.$$

Udowodnić rekurencję

$$J(2m,2n)=\frac{2n-1}{2m+1}J(2m+2,2n-2)$$

a następnie, korzystając z zadania 9.7 wykazać, że

$$J(2m,2n)=\frac{\pi(2n)!(2m)!}{2^{2m+2n+1}m!n!(m+n)!}.$$

ZADANIE 9.10

Niech dla naturalnych n i m

$$B(m,n)=\int_0^1 \mathrm{d}x\, x^{m-1}(1-x)^{n-1}$$

Wykazać rekurencję

$$B(m,n)=\frac{n-1}{m}B(m+1,n-1)$$

a następnie równość

$$B(m,n)=\frac{(n-1)!(m-1)!}{(n+m-1)!}$$

Funkcja $B(p,q)$ dla dodatnich argumentów nazywana jest funkcją Eulera drugiego rodzaju.

Zadanie 9.11
Stosując zamianę zmiennych (czasami również zamianę granic) wyznaczyć całki

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \mathrm{d}x\,\sqrt{4-x^2}, \quad x = 2\sin t$$

$$\int_{2}^{4} \mathrm{d}x\,\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}, \quad x = \frac{2}{\cos t}$$

$$\int_{0}^{\pi/2} \mathrm{d}x\,\frac{\cos x}{6-5\sin x+\sin^2 x}, \quad t = \sin x$$

$$\int_{\pi}^{5\pi/4} \mathrm{d}x\,\frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}, \quad t = \mathrm{tg}x$$

$$\int_{0}^{\pi/2} \mathrm{d}x\,\frac{1}{2+\cos x}, \quad x = 2\mathrm{arctg}t$$

Zadanie 9.12
Wyznaczyć pole ograniczone krzywymi

$$y = 2^x, \quad y = 2x - x^2$$

oraz prostymi $x = 0$ i $x = 2$.

Zadanie 9.13
Wyznaczyć pole ograniczone krzywymi

$$y = \frac{1}{4}x^2, \quad y = \frac{8}{x^2+4}$$

Zadanie 9.14
Wyznaczyć pole ograniczone krzywymi

$$y = -\sqrt{x}(x-1), \quad y = \sqrt{x}(x-1)$$

Zadanie 9.15
W jakim stosunku parabola $y^2 = 2x$ dzieli powierzchnię koła $x^2 + y^2 = 8$?

Zadanie 9.16
Obliczyć długość górnej części okręgu o równaniu $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

Zadanie 9.17
Wyznaczyć długość linii dla $b \leqslant x \leqslant a$ jeśli

1. $y = c\ln(c^2/(c^2 - x^2))$, $b = 0$, $a < c$.
2. $y = \ln\cos x$, $b = 0$, $a < \pi/2$.
3. $y = a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \sqrt{a^2 - x^2}$, $0 < b < a$.

Zadanie 9.18
Wyznaczyć objętość figury powstałej w wyniku obrotu krzywej $y = a\arcsin(x/a)$, $0 \leqslant x \leqslant a$ wokół osi x.

Zadanie 9.19
Wyznaczyć objętość figury powstałej w wyniku obrotu krzywej $y = a\cosh(x/a)$, $0 \leqslant x \leqslant b$ wokół osi x.

Zadanie 9.20
Wyznaczyć objętość elipsoidy osiowo-symetrycznej powstałej w wyniku obrotu krzywej $y = a\sqrt{1-(x/b)^2}$, $-b \leqslant x \leqslant b$ wokół osi x.

Zadanie 9.21
Wyznaczyć pole powierzchni bocznej powstałej w wyniku obrotu krzywej $y = x\sqrt{x/a}$, $0 \leqslant x \leqslant a$ wokół osi x.

Zadanie 9.22
Wyznaczyć pole powierzchni bocznej powstałej w wyniku obrotu krzywej $y = a\cos(\pi x/2b)$, $0 \leqslant x \leqslant b$ wokół osi x.

Zadanie 9.23
Wyznaczyć pole powierzchni bocznej powstałej w wyniku obrotu krzywej $y = \mathrm{tg}x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$ wokół osi x.

Zadanie 9.24
Wyznaczyć pole powierzchni bocznej powstałej w wyniku obrotu krzywej $y = a\cosh(x/a)$, $-b \leqslant x \leqslant b$ wokół osi x lub osi y.

Zadanie 9.25
Wyznaczyć pole powierzchni bocznej powstałej w wyniku obrotu krzywej $y^{2/3} + x^{2/3} = a^{2/3}$, $-a \leqslant x \leqslant a$ wokół osi x.

Zadanie 9.26
Wyznaczyć całkę

$$\int \sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t$$

stosując np. podstawienie $\sqrt{1+t^2} = t + u$, gdzie u jest nową zmienną.

Korzystając z powyższego wyniku wyznaczyć pole powierzchni bocznej powstałej w wyniku obrotu krzywej $y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$ wokół osi x.

Zadanie 9.27

Obliczyć całki niewłaściwe

$$\int_2^\infty dx\, \frac{1}{x^2+x-2}, \quad \int_{-\infty}^\infty dx\, \frac{1}{(x^2+x+1)^2}, \quad \int_0^\infty dx\, \frac{1}{1+x^3},$$

$$\int_0^\infty dx\, \frac{x^2+1}{x^4+1}, \quad \int_0^1 dx\, \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}, \quad \int_1^\infty dx\, \frac{1}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}},$$

$$\int_0^\infty dx\, \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}, \quad \int_0^\infty dx\, \frac{\mathrm{arctg} x}{(1+x^2)^{3/2}}, \quad \int_0^{\pi/2} dx\, \ln\sin x.$$

Zadanie 9.28

Wykazać dla $a, b > 0$ równość

$$\int_0^\infty dx\, f\Big(ax + \frac{b}{x}\Big) = \frac{1}{a}\int_0^\infty dx\, f(\sqrt{x^2+4ab}).$$

Zadanie 9.29

Wyznaczyć granice:

$$\lim_{x\to 0} x \int_x^1 dt\, \frac{\cos t}{t^2}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x dt\, \sqrt{1+t^4}}{x^3},$$

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha \int_x^1 dt\, \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}}, \quad \lim_{x\to 0_+} \frac{\int_x^\infty dt\, t^{-1}e^{-t}}{\ln\frac{1}{x}},$$

gdzie $\alpha > 0$ a $f(t)$ jest funkcją ciągłą na odcinku $[0, 1]$.

Zadanie 9.30

Zbadać zbieżność całek niewłaściwych:

$$\int_0^\infty dx\, \frac{x^2}{x^4-x^2+1}, \quad \int_1^\infty dx\, \frac{1}{x\sqrt[3]{x^2+1}}, \quad \int_0^2 dx\, \frac{1}{\ln x},$$

$$\int_0^\infty dx\, \frac{\mathrm{arctg} x}{x}, \quad \int_0^\infty dx\, \frac{\sin^2 x}{x}, \quad \int_0^1 dx\, \frac{\ln x}{1-x^2},$$

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}, \quad \int_0^1 \mathrm{d}x\, x^p \ln^q \frac{1}{x}, \quad \int_0^\infty \mathrm{d}x\, \frac{x^m}{1+x^n}.$$

10 Tydzień X: Dalsze zastosowania całek oznaczonych. Szeregi liczbowe i potęgowe

Zadanie 10.1
Wyznaczyć pole powierzchni ograniczonej elipsą

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Użyć parametryzacji $x(t) = a\cos t$, $y(t) = b\sin t$.

Zadanie 10.2
Wyznaczyć pole powierzchni ograniczonej asteroidą

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, \quad a > 0$$

Użyć parametryzacji $x(t) = a\cos^3 t$, $y(t) = a\sin^3 t$.

Zadanie 10.3
Wyznaczyć pole powierzchni ograniczonej krzywą zadaną parametrycznie

$$x(t) = a\sin t, \quad y(t) = b\sin 2t$$

Zadanie 10.4
Wyznaczyć pole powierzchni ograniczonej pętlą liścia Kartezjusza

$$x^3 + y^3 = 3axy, \quad a > 0$$

Użyć parametryzacji $x(t) = \rho(t)\cos t$, $y(t) = \rho(t)\sin t$ i wyznaczyć zależność $\rho(t)$.

Zadanie 10.5
Wyznaczyć długość linii zadanej parametrycznie

$$x = \cos^4 t, \quad y = \sin^4 t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Zadanie 10.6
Wyznaczyć długość linii zadanej parametrycznie

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

Zadanie 10.7
Wyznaczyć długość linii zadanej parametrycznie

$$x = \cosh^3 t, \quad y = \sinh^3 t, \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

Zadanie 10.8
Wyznaczyć objętość figury powstałej w wyniku obrotu krzywej zadanej parametrycznie

$$x = a \sin^3 t, \quad y = b \cos^3 t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

wokół osi x lub osi y.

Zadanie 10.9
Wyznaczyć objętość figury powstałej w wyniku obrotu krzywej zadanej parametrycznie

$$x = 2t - t^2, \quad y = 4t - t^2, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2$$

wokół osi x lub osi y.

Zadanie 10.10
Wyznaczyć objętość figury powstałej w wyniku obrotu wokół osi x obszaru płaskiego ograniczonego krzywymi

$$x^2 + y^2 = 1, \quad y^2 = \frac{3}{2}x$$

Zadanie 10.11
Wyznaczyć pole powierzchni bocznej figury powstałej w wyniku obrotu wokół osi x cykloidy zadanej parametrycznie

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

Zadanie 10.12
Wyznaczyć pole powierzchni bocznej figury powstałej w wyniku obrotu wokół osi x kardioidy zadanej parametrycznie

$$x = a(2\cos t - \cos 2t), \quad y = a(2\sin t - \sin 2t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi$$

Zadanie 10.13
Wykazać, że jeżeli wyraz szeregu a_n da się przedstawić w postaci $a_n = x_n - x_{n+1}$, gdzie x_n jest n-tym wyrazem ciągu zbieżnego do g, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = x_1 - g$$

Uogólnić ten wynik, gdy $a_n = x_n - x_{n+k}$, gdzie $k > 1$ jest pewną liczbą naturalną.

Zadanie 10.14

Wykorzystać wyniki z zadania 10.13 i wyznaczyć wartości szeregów:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+n)(a+n+1)}.$$

Zadanie 10.15

Wykazać, że dla α różnych od zera i ujemnych liczb całkowitych

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)}=\frac{1}{\alpha}$$

Zadanie 10.16

Wykazać, że dla α różnych od zera i ujemnych liczb całkowitych

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)}=\frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$$

Jak dobrać α aby otrzymać równość

$$\frac{1}{1\cdot 4\cdot 7}+\frac{1}{4\cdot 7\cdot 10}+\ldots=\frac{1}{24}$$

Zadanie 10.17

Stosując kryterium d'Alamberta zbadać zbieżność szeregów:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n!},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{2^n+3^n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2\mathrm{e}^n},$$

Zadanie 10.18

Stosując kryterium Cauchy'ego zbadać zbieżność szeregów:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\operatorname{arctg}(n^2+1))^n,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+1/n}}{\left(2n\frac{1}{n}\right)^n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}2^n,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^n}{n^{n^2}}.$$

Zadanie 10.19

Stosując kryteria d'Alamberta lub Cauchy'ego zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{(-1)^n - n}$$

Zadanie 10.20

Stosując kryterium całkowe zbadać zbieżność szeregów:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+s}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{1+s} n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\Big(\frac{n+1}{n-1}\Big), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}.$$

Zadanie 10.21

Zbadać zbieżność szeregu naprzemiennego (kryterium Leibnitza)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \Big(\frac{2n+100}{3n+1}\Big)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \sin\frac{(2n+1)\pi}{2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n}}.$$

Zadanie 10.22

Zbadać zbieżność szeregu potęgowego (jego promień zbieżności i zbieżność szeregu liczbowego na brzegu)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

oraz szeregu utworzonego z pochodnych jego wyrazów.

Zadanie 10.23

Znaleźć promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n} x^n$$

Zadanie 10.24

Obliczyć promień zbieżności szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 5^n} x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n+1} x^n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n \cdot 4^{n+1}} x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{10^n} x^n, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{3n-1} \cdot n^3}{(n^2-1) \cdot 5^n} x^n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+n) \cdot 2^{2n}}{3^{3n}} x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} x^n,$$

ZADANIE 10.25

Wykazać, że rozwinięcie Taylora prowadzi do następującego szeregu potęgowego

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2! \cdot 2^2}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3! \cdot 2^3}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{4! \cdot 2^4}x^4 - \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{n! \cdot 2^n} x^n$$

Określić jego promień zbieżności a następnie, korzystając z całki

$$\arcsin x = \int_0^x \mathrm{d}t \, \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

podać rozwinięcie w szereg potęgowy funkcji $\arcsin x$.

ZADANIE 10.26

Korzystając z całki

$$\mathrm{arctg} x = \int_0^x \mathrm{d}t \, \frac{1}{1+t^2}$$

podać rozwinięcie w szereg potęgowy funkcji $\mathrm{arctg} x$.

ZADANIE 10.27

Rozwinąć w szereg potęgowy funkcję

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x}{x^2 - 2}$$

i określić jego promień zbieżności.

11 Tydzień XI: Równania różniczkowe zwyczajne

Zadanie 11.1
Rozwiązać równanie różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu (typ: o rozdzielonych zmiennych):

$$2x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y, \quad x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y - a = 0, \quad xy = (a+x)(b+y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \quad x(1+\mathrm{e}^y) - \mathrm{e}^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

$$x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \quad x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 1 = x^3 - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \quad (x^2+1)y^3 + (1-y^2)x^3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0.$$

Zadanie 11.2
Rozwiązać równanie różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu (typ: jednorodne względem x i y):

$$x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 + xy + y^2, \quad x^2 + y^2 = 2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \quad x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x + y, \quad x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y\ln\frac{y}{x}.$$

Zadanie 11.3
Rozwiązać równanie różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu (typ: liniowe jednorodne pierwszego rzędu):

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y}{x^2}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2x-1}{x^2}y, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y\mathrm{tg}x, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y(x\sin x - \cos x).$$

Zadanie 11.4
Rozwiązać równanie różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu (typ: liniowe niejednorodne pierwszego rzędu):

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy + x\mathrm{e}^{x^2}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\sin x = -y\cos x + \sin 2x, \quad x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y + 2x^2, \quad 2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y + \frac{3}{2}x^2.$$

Zadanie 11.5
Rozwiązać równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu (typ: $F(y, y', y'') = 0$):

$$2y'' = 3\mathrm{e}^y, \quad y^4 - y^3y'' = 1, \quad 2y'^2 = (y-1)y'', \quad y''(1+yy') = y'(1+y'^2), \quad (1+y^2)y'' = y'^2y.$$

Zadanie 11.6
Rozwiązać równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu (typ: liniowe jednorodne):

$$y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0, \quad y'' + 2y' + 5y = 0, \quad y'' = 9y, \quad y'' + 2y' + y = 0.$$

Zadanie 11.7

Rozwiązać równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu (typ: liniowe niejednorodne):

$$y'' + 4y = \sin(mx), \quad y'' - y = 2x\cos x + \mathrm{e}^x, \quad y'' + y = \mathrm{tg}x, \quad y'' - 4y' + 4y = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}.$$

12 Tydzień XII: Układy równań różniczkowych zwyczajnych.

Zadanie 12.1
Rozwiązać układ równań różniczkowych zwyczajnych jednorodnych z zadanymi warunkami początkowymi:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}x(0)\\y(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}x(0)\\y(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}x(0)\\y(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Zadanie 12.2
Rozwiązać układ równań różniczkowych zwyczajnych jednorodnych z zadanymi warunkami początkowymi:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&1\\-1&3&-1\\-3&3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}x(0)\\y(0)\\z(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}x(0)\\y(0)\\z(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1&2\\-3&0&3\\-2&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}x(0)\\y(0)\\z(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$$

Zadanie 12.3
Rozwiązać układ równań różniczkowych zwyczajnych niejednorodnych:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\mathrm{e}^t\\t^2\end{pmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\-2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1-t\\1+t\end{pmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}t\sin t\\0\end{pmatrix}$$

Zadanie 12.4

Rozwiązać układ równań różniczkowych zwyczajnych niejednorodnych:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ \mathrm{e}^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zadanie 12.5

Układ równań opisujący schemat kinetyczny przemian chemicznych

$$A \underset{k_1}{\overset{k_2}{\leftrightarrows}} B \xrightarrow{k_3} C$$

ma postać

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = -k_1 A + k_2 B,$$
$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = k_1 A - (k_2 + k_3) B,$$
$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} = k_3 B.$$

Rozwiązać ten układ równań dla $k_1 = k_3 = 2$ i $k_2 = 1$ z warunkiem początkowym $A(0) = A_0$, $B(0) = C(0) = 0$.

13 Tydzień XIII: Ciągłość funkcji wielu zmiennych. Pochodne cząstkowe i ekstrema.

Zadanie 13.1 ❍

Korzystając z definicji otoczeniowej Cauchy'ego wykazać, że granicą funkcji

$$f(x,y,z)=\frac{\sin(xyz)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

w początku układu współrzędnych jest liczba 0. Wykorzystać fakt, że średnia arytmetyczna trzech liczb dodatnich jest nie mniejsza niż ich średnia geometryczna.

Zadanie 13.2

Wykazać, że funkcja

$$f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

nie ma granicy w zerze.

Zadanie 13.3

Wykazać, że choć dla funkcji

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

granice iterowane są równe

$$\lim_{x\to0}(\lim_{y\to0}f(x,y))=\lim_{y\to0}(\lim_{x\to0}f(x,y))=0$$

to mimo tego funkcja nie ma granicy w zerze.

Zadanie 13.4

Wykazać, że dla funkcji

$$f(x,y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

granice iterowane nie istnieją, ale mimo to funkcja ma granicę w zerze.

Zadanie 13.5

Wyznaczyć granice iterowane

$$\lim_{x\to a}(\lim_{y\to b}f(x,y)),\quad \text{oraz}\quad \lim_{y\to b}(\lim_{x\to a}f(x,y))$$

jeśli

1. $$f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^4},\quad a=\infty,\quad b=\infty;$$

2.
$$f(x,y) = \sin\frac{\pi x}{2x+y}, \quad a=\infty, \quad b=\infty;$$

3.
$$f(x,y) = \frac{x^y}{1+x^y}, \quad a=+\infty, \quad b=+0;$$

4.
$$f(x,y) = \frac{1}{xy}\operatorname{tg}\frac{xy}{1+xy}, \quad a=0, \quad b=\infty;$$

5.
$$f(x,y) = \log_x(x+y), \quad a=1, \quad b=0.$$

Zadanie 13.6

Wyznaczyć granicę podwójną
$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$$
dowodząc nierówności
$$0 \leqslant \Big|\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\Big| \leqslant \frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|}$$

Zadanie 13.7

Wyznaczyć granicę podwójną
$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$$
dowodząc nierówności
$$0 < \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} \leqslant \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}$$

Zadanie 13.8

Wyznaczyć granicę podwójną
$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \Big(\frac{xy}{x^2+y^2}\Big)^{x^2}$$
dowodząc nierówności
$$0 < \Big(\frac{xy}{x^2+y^2}\Big)^{x^2} \leqslant \Big(\frac{1}{2}\Big)^{x^2}$$

Zadanie 13.9 ❍

Wykazać, że dla dostatecznie wiele razy różniczkowalnych funkcji zachodzi

1.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} - \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} - 2\alpha\frac{\partial u}{\partial y} = \alpha^2 u, \quad \text{dla} \quad u = \mathrm{e}^{-\alpha x} f(x-y)$$

2.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} - \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = -2f'', \quad \text{dla} \quad u = f(y-x) - xf'(y-x)$$

3.
$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \quad \text{dla} \quad u = xf(y/x)$$

Zadanie 13.10
Wyznaczyć punkty krytyczne funkcji

$$f(x,y,z) = x^2 - 2x - y^3 + 3y + 5z^2$$

i określić ich charakter.

Zadanie 13.11
Wyznaczyć punkty krytyczne funkcji

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$$

i określić ich charakter.

Zadanie 13.12
Wyznaczyć punkty krytyczne funkcji

$$f(x,y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$$

i określić ich charakter.

Zadanie 13.13
Wyznaczyć ekstremum funkcji

$$f(x,y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$$

Zadanie 13.14
Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x,y) = x^3 + y^2 - 3x - 2y - 1$$

na trójkącie (razem z jego brzegiem), którego wierzchołkami są punkty $(0,0)$, $(0,3)$ i $(3,0)$.

Zadanie 13.15
Wyznaczyć punkty krytyczne i określić ich charakter dla funkcji

1.
$$f(x,y) = x^2y^3(6-x-y)$$

2.
$$f(x,y) = x^3+y^3-3xy$$

3.
$$f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}, \quad x,y>0$$

4.
$$f(x,y) = xy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$

5.
$$f(x,y) = \frac{ax+by+c}{\sqrt{x^2+y^2+1}}, \quad a^2+b^2+c^2 \neq 0$$

6.
$$f(x,y) = x+y+4\sin x\sin y$$

7.
$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z$$

8.
$$f(x,y,z) = x^3+y^2+z^2+12xy+2z$$

Zadanie 13.16
Znaleźć wszystkie punkty krytyczne funkcji $f(x,y) = xy^2(3x+6y-2)$ oraz $g(x,y) = x^4+y^4-2(x-y)^2$ i określić ich charakter.

Zadanie 13.17
Znaleźć wszystkie punkty krytyczne funkcji $f(x,y) = x^3-4x^2-xy-y^2$ oraz $g(x,y) = (y-x^2)(2-x-y)$ i określić ich charakter.

14 Tydzień XIV: Ekstrema z więzami

Zadanie 14.1
Stosując metodę czynników Lagrange'a znaleźć punkt na płaszczyźnie $x + y + z = 1$ leżący najbliżej początku układu współrzędnych. W tym celu określić punkty stacjonarne funkcji $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ z warunkiem wiążącym zadanym przez równanie płaszczyzny. Jak sformułować ten problem (a następnie rozwiązać go), gdy szukamy punktu na płaszczyźnie najbliższego punktowi $(2, 1, 1)$?

Zadanie 14.2
Wyznaczyć ekstrema funkcji $f(x, y) = x + y$ i określić ich charakter z warunkiem wiążącym

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$$

Zadanie rozwiązać metodą Lagrange'a i metodą eliminacji warunku wiążącego, wprowadzając jego parametryzację

$$x = \frac{a}{\cos\varphi}, \quad y = \frac{a}{\sin\varphi}, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Zadanie 14.3
Metodą Lagrange'a wyznaczyć ekstrema funkcji $f(x, y, z) = x + z - 2$ z warunkiem wiążącym $x + y^2 - z^2 = 1$. Określić charakter tych ekstremów.

Zadanie 14.4 ❍
Udowodnić nierówność

$$\frac{x^n + y^n}{2} \geqslant \left(\frac{x + y}{2}\right)^n, \quad n \geqslant 1, \quad x, y \geqslant 0.$$

W tym celu wyznaczyć minimum funkcji

$$f(x, y) = \frac{x^n + y^n}{2}$$

z warunkiem wiążącym $x + y = s$.

Zadanie 14.5
Wśród trójkątów o obwodzie ℓ znaleźć ten o maksymalnym polu. W tym celu skorzystać ze wzoru Herona na pole trójkąta o bokach a, b i c,

$$P = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)},$$

gdzie $s = (a+b+c)/2$. Tym trójkątem jest oczywiście trójkąt równoboczny. Zastosować metodę czynników Lagrange'a.

Zadanie 14.6

Na sferze $x^2+y^2+z^2=1$ wyznaczyć punkty najbliższy i najdalszy punktowi $(1,3,4)$. Zastosować metodę czynników Lagrange'a.

Zadanie 14.7

Powierzchnia zadana jest równaniem $x^3+yz-2xyz^2=0$. Wykazać, że równanie płaszczyzny stycznej do niej w punkcie $(1,1,1)$ ma postać $x-y-3z=-3$, a jej odległość od początku układu współrzędnych wynosi $3/\sqrt{11}$. Wykazać, że punkt $(-3/11,3/11,9/11)$ jest punktem płaszczyzny stycznej najbliższym początkowi układu współrzędnych. W tym celu, posługując się metodą czynników Lagrange'a, wyznaczyć minimum funkcji $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ z warunkiem wiążącym zadanym przez równanie płaszczyzny stycznej.

Zadanie 14.8

Wykazać, że

$$\frac{x+y+z}{3} \geqslant (xyz)^{1/3}$$

W tym celu wyznaczyć maksimum funkcji $f(x,y,z)=xyz$ z warunkiem wiążącym $x+y+z=s$.

Zadanie 14.9

Udowodnić nierówność Höldera

$$x_1y_1+x_2y_2 \leqslant (x_1^p+x_2^p)^{1/p}(y_1^q+y_2^q)^{1/q}, \quad x_i, y_i>0, \quad p,q>1, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Jest ona uogólnieniem nierówności Schwartza dla $p=q=2$.

W tym celu, przy zadanych y_i rozważyć funkcję dwóch zmiennych

$$f(x_1,x_2)=(x_1^p+x_2^p)^{1/p}(y_1^q+y_2^q)^{1/q}$$

z warunkiem wiążącym $x_1y_1+x_2y_2=s$ i wykazać, że osiąga ona minimum dla

$$y_1x_2^{p-1}=y_2x_1^{p-1}$$

czyli, że zachodzi

$$f(x_1,x_2) \geqslant f\Big(x_1, x_1\Big(\frac{y_2}{y_1}\Big)^{\frac{1}{p-1}}\Big)$$

co sprowadza się do szukanej nierówności.

Uogólnić tę nierówność na przypadek n par liczb dodatnich,

$$\sum_{i=1}^n x_iy_i \leqslant \Big(\sum_{i=1}^n x_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\sum_{i=1}^n y_i^q\Big)^{\frac{1}{q}}$$

postępując analogicznie jak powyżej.

ZADANIE 14.10

Wyznaczyć ekstrema funkcji $f(x, y) = x^2 + (y-1)^2$ z warunkiem wiążącym $x^2 - y^2 = 1$. Podać interpretację geometryczną tego zagadnienia zauważając, że warunek wiążący jest dany równaniem hiperboli a funkcję $f(x, y)$ można interpretować jako kwadrat odległości dwóch punktów.

ZADANIE 14.11

Rozkład kanoniczny: Znaleźć ekstremum funkcji

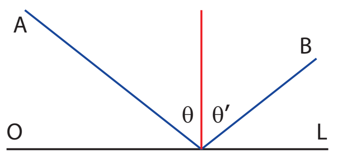
$$f(N_1, N_2) = \ln \frac{N!}{N_1! N_2!}$$

z więzami $N_1 + N_2 = N$ i $E_1 N_1 + E_2 N_2 = E$, gdzie N, E_1, E_2 i E są zadane. Problem rozwiązać w sytuacji, gdy dodatnie liczby N_1 i N_2 są znacznie większe od jedności, zatem można skorzystać z przybliżonego wzoru (wzór Stirlinga)

$$\ln N! = N \ln N - N.$$

ZADANIE 14.12

Prawo odbicia:



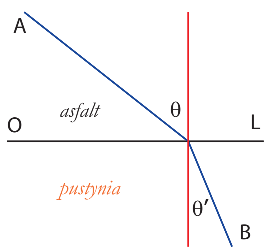
RYSUNEK 1: Ilustracja do zadania 14.12

Kolarz jedzie ze stałą prędkością v z punktu A do punktu B w ogromnym upale. Musi zatem w międzyczasie znaleźć się w jakimkolwiek punkcie znajdującym się na odcinku OL, gdzie gęsto rozmieszczone są stoiska z napojami. W którym miejscu musi to zrobić, aby jak najszybciej dotrzeć do celu?

W jakiej relacji są kąty padania θ i odbicia θ'?

ZADANIE 14.13

Prawo załamania:



RYSUNEK 2: Ilustracja do zadania 14.13

Kolarz jedzie z punktu A do punktu B, zmieniając na odcinku OL nawierzchnię asfaltową na pustynną. Po nawierzchni asfaltowej może jechać z prędkością nie większą niż v_1, a po piaszczystej z prędkością nie większą niż v_2, $v_1 > v_2$. W którym punkcie musi przejechać przez odcinek OL, aby jak najszybciej dotrzeć do celu.

W jakiej relacji są kąty padania θ i załamania θ'?

15 Tydzień XV: Całki wielokrotne

Zadanie 15.1
Prostopadłościan, którego dolną podstawą jest prostokąt D położony w płaszczyźnie OXY i ograniczony prostymi $x = 1$, $y = 2$, $x = -1$ i $y = -2$, został ścięty od góry powierzchnią $z = 6 - x^2 - y^2$. Obliczyć objętość powstałej bryły.

Zadanie 15.2
Znaleźć objętość bryły ograniczonej paraboloidą $2az = x^2 + y^2$ i sferą $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$. Bierzemy pod uwagę tę część bryły, która leży wewnątrz paraboloidy.

Zadanie 15.3
Obliczyć całkę

$$\int \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(x+y+z+1)^3}$$

po obszarze zawartym pomiędzy płaszczyznami współrzędnych i płaszczyzną $x + y + z = 1$.

Zadanie 15.4
Obliczyć całkę potrójną

$$\int \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

po obszarze ograniczonym powierzchniami $x^2 + y^2 = z^2$ i $z = 1$.

Zadanie 15.5
Wykazać, że

$$\int_D (2x+y+1)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{136}{3}$$

gdzie D jest trójkątem o wierzchołkach $A(1,1)$, $B(5,3)$ i $C(5,5)$. Obliczyć tę całkę wykonując obie całki iteracyjne.

Zadanie 15.6
Wykazać, że

$$\int_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{10+2x+y}} = 9\ln 3 - \frac{4}{3}(17 - 8\sqrt{2})$$

gdzie D jest obszarem pod wykresem funkcji $y = x^2$ ograniczonym prostymi $y = 0$, $x = -1$ i $x = 3$.

Zadanie 15.7
Udowodnić tzw. formułę Dirichleta

$$\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{d}y\, f(x,y) = \int_0^a \mathrm{d}y \int_y^a \mathrm{d}x\, f(x,y)$$

Zadanie 15.8
Wyznaczyć obszar D w całce

$$\int_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\, f(x,y) = \int_1^2 \mathrm{d}x \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} \mathrm{d}y\, f(x,y)$$

a następnie zamienić kolejność całkowania.

Zadanie 15.9
Wyznaczyć obszar D w całce

$$\int_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\, f(x,y) = \int_0^{2a} \mathrm{d}x \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} \mathrm{d}y\, f(x,y)$$

a następnie zamienić kolejność całkowania.

Zadanie 15.10
Wyznaczyć obszar D w całce

$$\int_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\, f(x,y) = \int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{d}x \int_0^{\ln x} \mathrm{d}y\, f(x,y)$$

a następnie zamienić kolejność całkowania.

Zadanie 15.11
W całce

$$\int_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\, f(x,y)$$

przejść do współrzędnych biegunowych, jeśli

1. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant a^2\}$
2. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant ax\}$
3. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-a)^2 + y^2 \leqslant b^2\}$
4. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1-x\}$

Zadanie 15.12
Wykazać, że

$$\int_{x^2+y^2 \leqslant a^2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\, \sqrt{x^2+y^2} = \frac{2}{3}\pi a^3$$

Zadanie 15.13
Wykazać, że

$$\int\limits_{\pi^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant (2\pi)^2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\, \sin\sqrt{x^2+y^2} = -6\pi^2$$

Zadanie 15.14
W całce

$$I = \int\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(ax+by+c)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,; \quad a^2+b^2 \neq 0,$$

dokonać zamiany zmiennych

$$x = \frac{au}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{bv}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad y = \frac{bu}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{av}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

i wykazać, że

$$I = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2} f(\sqrt{a^2+b^2}\,u + c)\mathrm{d}u\,.$$

Zadanie 15.15
Obliczyć całkę

$$\int\limits_D xy\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

gdzie obszar D ograniczony jest dwoma hiperbolami $xy = 1$ i $xy = 4$, oraz dwiema prostymi $y = x$ i $y = 4x$ dla $x, y > 0$. W tym celu dokonać zamiany zmiennych $xy = u$ i $y = vx$.

Zadanie 15.16
Wykazać, że

$$\int\limits_{x^4+y^4\leqslant 1} (x^2+y^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

przechodząc do współrzędnych biegunowych.