

Przybliżony opis układów kwarkowo–gluonowych w chromodynamice kwantowej

Jakub Narębski

praca doktorska



Promotor: prof. dr hab. Stanisław Głazek

Warszawa, 2010

Promotorowi za inspirującą pomoc i opiekę w czasie wykonywanej pracy, oraz za cierpliwość w oczekiwaniu na jej wyniki serdecznie dziękuję.

Streszczenie

Tematem niniejszej pracy jest przybliżony opis stanów związanych kwarków i gluonów według zasad opartych na chromodynamice kwantowej (QCD). Rozważany jest najprostszy stan, w którym oprócz kwarku i antykwarku istotnym elementem struktury są gluony. Stan ten oznaczany jest symbolem $|h\rangle$ i nazwany mezonem hybrydowym, albo w skrócie hybrydą.

Punktem wyjścia do skonstruowanego tutaj opisu hybrydy była metoda renormalizacji za pomocą cząstek efektywnych, zastosowana do hamiltonianu QCD. Obliczenia prowadzono w ramach dynamiki na froncie świetlnym, umożliwiającej koncepcyjnie reprezentację stanów związanych w QCD jako stanów złożonych z minimalnej liczby cząstek efektywnych. W ramach tej reprezentacji założono, że stan hybrydy $|h\rangle$ można przybliżyć stanem $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$, w którym kwarki q_λ i \bar{q}_λ oraz gluon g_λ charakteryzują się parametrem skali λ rzędu masy hybrydy. Badano warunki jakie muszą być spełnione przez funkcje falowe stanu $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ w skonstruowanym opisie.

Uzyskane wyniki wskazały, że warunki symetrii szczególnej teorii względności dla amplitud rozpadu hybrydy na dwa mezony, poruszające się z relatywistycznymi prędkościami, mogą być spełnione gdy funkcja falowa stanu $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ przyjmuje szczególną postać. Postać ta charakteryzuje się tym, że szerokość pędowej funkcji falowej pary kwark–antykwark w hybrydzie jest rzędu szerokości pędowej czynnika kształtu f_λ w wierzchołkach oddziaływania w znormalizowanym hamiltonianie QCD, który QCD wyliczono w pierwszym rzędzie w efektywnej stałej sprzężenia $g_{\text{QCD}\lambda}$, odpowiadającej skali λ . Innymi słowy, przestrzenna funkcja falowa pary opisuje układ kwark–antykwark o rozmiarach znacznie mniejszych niż odległość między parą a gluonem. Otrzymana relatywistyczna struktura stanu $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ różni się od postaci stanów $|h\rangle$ rozważanych w typowych nierelatywistycznych modelach hybrydy, w których gluon lub struna gluonowa znajdują się między kwarkami.

W poszukiwaniu dynamicznego mechanizmu powstawania otrzymanej relatywistycznej struktury $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ zauważono, że para kwark–antykwark o rozmiarach rzędu $1/\lambda$ może powstawać ze stanu $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ w wyniku działania członu $H_{I\lambda}$ w hamiltonianie QCD, zamieniającego gluon na parę kwark–antykwark w rozpadzie hybrydy. Człon $H_{I\lambda}$ zawiera czynnik kształtu o pędowej szerokości λ i ta szerokość mogłaby dawać dużą pędową szerokość funkcji falowej ruchu względnego w parze, rzędu λ . Żeby sprawdzić racjonalność tej hipotezy, zbadane zostały uproszczone modele dynamiczne mieszania stanu $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ ze stanem $|g_\lambda g_\lambda\rangle$, uwzględniające jakościowo cechy dynamiki kwarków i gluonów w QCD. Modelowe uproszczenia pełnej dynamiki QCD były konieczne z powodu współczesnych braków w zrozumieniu wyników doświadczalnych i braku teorii niezbędnych struktur.

W szczególności, rozważano modele jednowymiarowe, gdyż liczba stanów niezbędnych do rachunków w 2 lub 3 wymiarach okazała się za duża do ich wykonania. Przejście od najprostszego, analitycznego modelu mieszania w jednym wymiarze do modeli bardziej zbliżonych swoją strukturą do struktury hamiltonianu QCD dla skali λ rzędu masy hybrydy związane jest ze znacznymi trudnościami numerycznymi. Pełna analiza QCD jest poza zasięgiem obecnie dostępnych metod analitycznych i numerycznych. Przedstawiona w pracy analiza uproszczonych modeli numerycznych pozwoliła jedynie stwierdzić, że dynamiczne mieszanie stanów $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ i $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ może prowadzić do powsta-

wania składowej $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ o strukturze zbliżonej do otrzymanej z warunków relatywistycznej symetrii dla procesów rozpadu hybrydy na dwa mezony.

Jednak otrzymane wyniki nie dają się zastosować wprost do opisu hybrydy jako stanu zdominowanego przez składową $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$. Potrzebna w tym mechanizmie stała sprzężenia g_λ musi być rzędu jedności, a wtedy prawdopodobieństwo składowej $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ jest porównywalne lub nawet większe od prawdopodobieństwa składowej $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$. Otrzymane wyniki, zakładające sprzężenie z parą gluonów efektywnych, nie stosują się do hybrydy o niezerowym izospinie, mimo, że z opisanych badań rozpadów wynika tego samego typu struktura relatywistyczna dla hybrydy o dowolnym izospinie.

Obejście tych trudności polega na założeniu, że dynamiczne mieszanie sektora $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ ze wszystkimi pozostałymi sektorami Focka kwarków i gluonów efektywnych w hybrydzie można przybliżyć za pomocą mieszania sektora $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ ze stanami $|g_\lambda G_\lambda\rangle$. Cząstka G_λ jest (hipotetycznym) rezonansowym stanem oktetowym w kolorze, odpowiadającym wewnętrznie wzbudzonemu gluonowi efektywnemu. Rozpad hybrydy za pośrednictwem $H_{I\lambda}$ zachodzić może tylko ze składowej $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$, ponieważ element macierzowy $\langle q_\lambda \bar{q}_\lambda | H_I | G_\lambda \rangle$ znika. Hipoteza powstawania rezonansów G_λ nie napotyka na trudności z jakimi nie radzi sobie hipoteza mieszania dynamicznego ze stanem $|g_\lambda g_\lambda\rangle$. Można więc powiedzieć, że hipoteza formowania G_λ wyróżnia nowy kierunek w przestrzeni stanów kwarków i gluonów efektywnych, w zupełnie nie znanym obszarze nieperturbacyjnym. Dochodzimy do wniosku, że właśnie w tym kierunku mogą iść przyszłe próby konstrukcji przybliżonych rozwiązań QCD dla hybryd, w zgodzie z zasadami szczególnej teorii względności i procedury grupy renormalizacji dla hamiltonianów w kwantowej teorii pola.

Spis treści

1	Wprowadzenie	7
2	Metoda cząstek efektywnych	13
2.1	Dynamika hamiltonowska na froncie świetlnym	13
2.2	Grupa renormalizacji dla cząstek efektywnych	14
2.2.1	Potrzeba regularyzacji i renormalizacji hamiltonianu	14
2.2.2	Procedura grupy renormalizacji za pomocą transformacji podobieństwa	15
2.3	Rola czynników podobieństwa f_λ	16
3	Rozpad hybrydy	19
3.1	Opis rozpadu skalarnej hybrydy na dwa mezony	20
3.1.1	Funkcje falowe mezonów	20
3.1.2	Funkcja falowa hybrydy	22
3.2	Obliczenia numeryczne amplitudy rozpadu hybrydy	24
3.3	Relatywistyczna niezmienniczość amplitudy rozpadu hybrydy	24
3.4	Analiza wyników badania symetrii amplitudy rozpadu hybrydy	34
4	Dynamika mieszania hybrydy z innymi sektorami Focka	39
4.1	Zagadnienie mieszania różnych sektorów Focka	40
4.2	Ścisłe rozwiązywalny model mieszania stanów o różnej liczbie cząstek	41
4.3	Hamiltoniany efektywne w sektorach $q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda$ i $g_\lambda g_\lambda$	47
4.4	Hamiltonian efektywny mieszania stanu $ q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ ze stanem $ g_\lambda g_\lambda\rangle$	49
4.5	Trudności matematyczne i numeryczne modelowania mieszania	50
4.6	Model numeryczny mieszania stanów $ q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ z $ g_\lambda g_\lambda\rangle$	52
4.6.1	Oznaczenia	52
4.6.2	Elementy macierzowe hamiltonianu	53
4.7	Obliczenia numeryczne mieszania stanu $ q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ ze stanem $ g_\lambda g_\lambda\rangle$	55
4.7.1	Analiza członu mieszania	55
4.7.2	Wyniki analizy mieszania	59
4.8	Model mieszania $ q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ z pozostałymi sektorami Focka	66
4.9	Hipoteza rezonansu oktetowego $G_{h\lambda}$	67
5	Podsumowanie i wnioski	73
6	Spis literatury	76
A	Notacja położeń i pędów na froncie świetlnym	79
B	Spinory na froncie świetlnym	79
C	Szczegóły obliczeniowe wyliczania rozpadu hybrydy	81
D	Wybrane przykłady analizy rozpadu hybrydy	84
E	Ścisłe rozwiązywalny model mieszania	90

F	Wyliczanie $h_{k,l}^{(2)}$	92
G	Szczegóły obliczeniowe mieszania $ q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ z $ g_\lambda G_{h\lambda}\rangle$	94
H	Spis treści załączonego CD-ROM	97

1 Wprowadzenie

Chromodynamika kwantowa (QCD) jest kwantową teorią pola z nieabelową grupą cechowania. Z niezmienniczości względem cechowania wynika brak członu masowego dla kwantów pola cechowania A , czyli gluonów, w lagranżjanie. Nieabelowość grupy cechowania QCD powoduje, że gluony oddziałują nie tylko z kwarkami, ale także z innymi gluonami. Fakt ten daje możliwość istnienia złożonych stanów związanych, zawierających jako istotną część składową gluonową. Przykładem takiego stanu jest stan kwarkowo–gluonowy złożony z kwarku, antykwarku i gluonu, zwany dalej hybrydowym mezonem, albo w skrócie hybrydą.

Niektóre z nowych stanów ze składnikiem gluonowym mają egzotyczne liczby kwantowe, to znaczy takie jakich nie można uzyskać składając wyłącznie kwark z antykwarkiem. Precyzyjne przewidywania dotyczące cząstek zbudowanych z udziałem gluonów stanowiłyby podstawę do testu QCD za pomocą doświadczeń. Niniejsza praca dotyczy poszukiwania teoretycznego obrazu hybrydy w przestrzeni Minkowskiego, który to obraz mógłby służyć jako pierwsze przybliżenie, spełniające wymagania symetrii i zasad dynamiki.

Efektywna stała sprzężenia QCD maleje wraz ze wzrostem przekazu pędu (asymptotyczna swoboda). Za pomocą rachunku zaburzeń (w skrócie zwanego dalej “perturbacyjną QCD”) można zatem opisywać procesy charakteryzujące się dużymi przekazami pędu między kwarkami i gluonami. Podstawą opisu hadronów, biorących udział w procesach wysokoenergetycznych, w których znajduje zastosowanie rachunek zaburzeń QCD, jest model partonowy [1]. W modelu tym hadrony opisywane są za pomocą funkcji rozkładu kwarków i bezmasowych gluonów.

Z drugiej strony efektywna stała sprzężenia QCD rośnie wraz ze zmniejszaniem przekazu pędu. Fakt ten powoduje, że wiązanie kwarków i gluonów w hadrony nie jest opisywane przez perturbacyjną QCD. Opis hadronów za pomocą niewielkiej liczby składników w ramach perturbacyjnej QCD jest niemożliwy.

W modelu kwarków konstytuentnych (CQM) hadrony opisywane są natomiast jako stany związane 2 lub 3 kwarków składnikowych [2]. Model ten powstał w celu wyjaśnienia systematyki hadronów zanim powstała QCD i posługuje się minimalną liczbą cząstek potrzebnych by opisać niskoenergetyczne własności hadronów. Klasyfikacja znanych hadronów w tablicach cząstek elementarnych [3] oparta jest na liczbach kwantowych kwarków używanych w modelu konstytuentnym. Mezony opisywane są jako układy kwark–antykwark ($q\bar{q}$), a bariony jako układy trzech kwarków (qqq). Kwarki w tym modelu mają duże masy, rzędu $1/3$ masy nukleonu (rzędu 300 MeV). Oddziaływania między kwarkami opisywane są za pomocą odpowiednio dobranego potencjału. Strukturę kolorową potencjału wybiera się taką samą jak struktura kolorowa wymiany pojedynczego gluonu [4].

Gluonów jako takich nie ma w modelu kwarków konstytuentnych. Przy ich uwzględnianiu w ramach rozszerzeń modelu trzeba byłoby wyjaśnić dlaczego gluony są mało widoczne w spektrum zwykłych mezonów i barionów. Ażeby gluony można było wyeliminować, należałoby na przykład nadać im duże masy efektywne. Efekty relatywistyczne w modelu CQM uwzględniane są (między innymi) wprowadzając dodatkowe człony do potencjału wiązania [5, 6]; pozwala to opisać wszystkie mezony, od π do Υ , w ramach jednego modelu.

Nie jest znany poprawny relatywistycznie opis hadronów, który obejmowałby kwarkowo–gluonowe stany związane i ich rozpady. Nie są znane również potrzebne rozwiązania QCD, z wyjątkiem symulacji sieciowych [7, 8, 9]. Obliczenia na sieci dają bardzo dobre wyniki na masy hadronów, z dokładnością do 1%, ale nie określają ich funkcji falowych w przestrzeni Minkowskiego.

Powstaje zatem pytanie, jaki obraz fizyczny układów kwarkowo–gluonowych może spełniać żądania symetrii, których oczekuje się od rozwiązań QCD.

Niniejsza praca opisuje wyniki analizy rozpadu i dynamiki tworzenia układów typu hybryda, w postaci jak najprostszego obrazu fizycznego. Taki obraz mógłby być pomocny w odpowiedzi na aktualne pytanie jak uwzględniać gluony jako składniki hadronów (jako cząstki konstytuentne) na poziomie funkcji falowych.

Poszukiwany obraz i metoda jego wyprowadzenia powinny spełniać podstawowe warunki, których spełnienia oczekujemy od kandydatów na pierwsze przybliżenie w opisie stanów kwarkowo–gluonowych. Opis ten ma być zdefiniowany w ramach konkretnego sformułowania QCD, z jasną ścieżką możliwości rozszerzania i udoskonalania w sensie zwiększania precyzji. Ważnym wymaganiem jest aby opis stanów związanych i ich rozpadów był relatywistyczny, bowiem interesujące nas procesy fizyczne zachodzą z udziałem cząstek poruszających się z dużymi prędkościami. Użytkany obraz powinien być zgodny z fenomenologią hadronów, która opiera się na klasyfikacji hadronów w modelu konstytuentnym. Potrzebna jest więc metoda, za pomocą której będzie można powiązać chromodynamikę kwantową z modelem kwarków konstytuentnych.

Metoda, na której oparte jest rozumowanie w tej pracy to procedura grupy renormalizacji dla cząstek efektywnych (RGPEP = Renormalization Group Procedure for Effective Particles) [10, 11, 12]. Procedura RGPEP stwarza możliwość teoretycznego połączenia obrazu rozciągniętych cząstek konstytuentnych modelu kwarkowego z punktowymi kwarkami i gluonami kanonicznej QCD. Powiązanie z kanoniczną QCD daje ścieżkę udoskonalania otrzymanego opisu, a powiązanie z modelem kwarków konstytuentnych wykorzystuje jego zgodność z fenomenologią hadronów.

Aby mógł istnieć prosty opis struktury hadronów, podobny do tego w modelu kwarków konstytuentnych, musi istnieć prosty opis stanu podstawowego całej teorii, którego wzbudzenia nazwalibyśmy hadronami. Niestety nie jest znany stan podstawowy QCD, zwany „próżnią”. Z tego powodu pomocna byłaby metoda, pozwalająca odseparować problem opisu hadronu od problemu opisu próżni.

Użycie dynamiki na froncie świetlnym daje możliwość zastosowania ograniczenia (obcięcia), które powoduje, że próżnia składa się wyłącznie ze stanu zerocząstkowego. Metoda ta jest bardzo krótko przedstawiona w rozdziale 2.1.

Za zastosowaniem dynamiki na froncie świetlnym przemawia ponadto fakt, że w tym sformułowaniu pewne pchnięcia Lorentza są transformacjami kinematycznymi, tzn. nie zależą od oddziaływania. Dla modelu partonowego naturalnym układem odniesienia jest układ nieskończonego pędu, który stosujemy w rachunkach QCD. Z kolei statyczne własności hadronów rozważane są zazwyczaj w układzie ich środka masy. Układ środka masy jest naturalnym układem dla modelu kwarkowego. To, że w dynamice na froncie świetlnym operatory pchnięcia nie zależą od oddziaływania, pozwala połączyć opis w układzie środka masy (model kwarków konstytuentnych) z opisem w układzie nieskończonego pędu (model partonowy). Do opisu przejścia

od energii, dla których używa się kwarków prądowych (model partonowy), do energii w stanach związanych (model kwarków konstytuentnych) można użyć metody RGPEP.

Dotychczasowe próby teoretycznego opisu mezonów hybrydowych były wykonywane za pomocą wielu różnych metod.

Obliczeniom za pomocą modeli, na przykład poprzez próby rozszerzenia modelu kwarków konstytuentnych o gluony [13, 14, 15] brakuje często związku z QCD, w sensie drogi wyprowadzenia modelu z pierwszych zasad. Gluony konstytuentne zależą w takich modelach od tego jak traktuje się symetrię cechowania. Modele nie tłumaczą także dlaczego gluonów nie widać w zwykłych mezonach i ograniczają się zazwyczaj do przybliżenia nierelatywistycznego. Obliczenia za pomocą modeli pozwalają jednak na zasugerowanie postaci funkcji falowej hybrydy [16], oraz na obliczanie własności jej rozpadu.

W obliczeniach przeprowadzonych w niniejszej pracy postać stanu i funkcji falowej hybrydy oparta jest na modelu kwarków konstytuentnych. Niniejsza praca korzysta z metody procedury grupy renormalizacji dla cząstek efektywnych, za pomocą której można by próbować wyprowadzić obraz typu modelu kwarków konstytuentnych z gluonem konstytuentnym w QCD [17]. Sprawdzamy, czy założenie minimalnej liczby składników efektywnych jest zgodne z warunkami narzucanymi przez QCD, w szczególności z symetriami szczególnej teorii względności.

Obliczenia na sieci [18, 19, 20, 21] pozwalają na wyliczanie mas hybryd w QCD. Pozwalają one także wyliczyć bardzo dokładnie wartości elementów macierzowych, na podstawie których wyznaczyć można szerokości rozpadu i inne jego charakterystyki. Obliczenia na sieci nie pozwalają jednak na wyliczenie funkcji falowej w przestrzeni Minkowskiego, acz można w obliczeniach na sieci wyliczać funkcje Greene'a (w przestrzeni euklidesowej) i znajdować wybrane właściwości funkcji falowych na podstawie elementów macierzowych.

Na podstawie postaci hamiltonianu QCD na sieci w granicy silnego oddziaływania wyprowadza się hamiltonian modelu „flux tube”, służący do opisu stanów hybrydowych mezonów [22]. Za pomocą tego modelu można budować fenomenologię rozpadów hybrydy [23, 24, 25, 26].

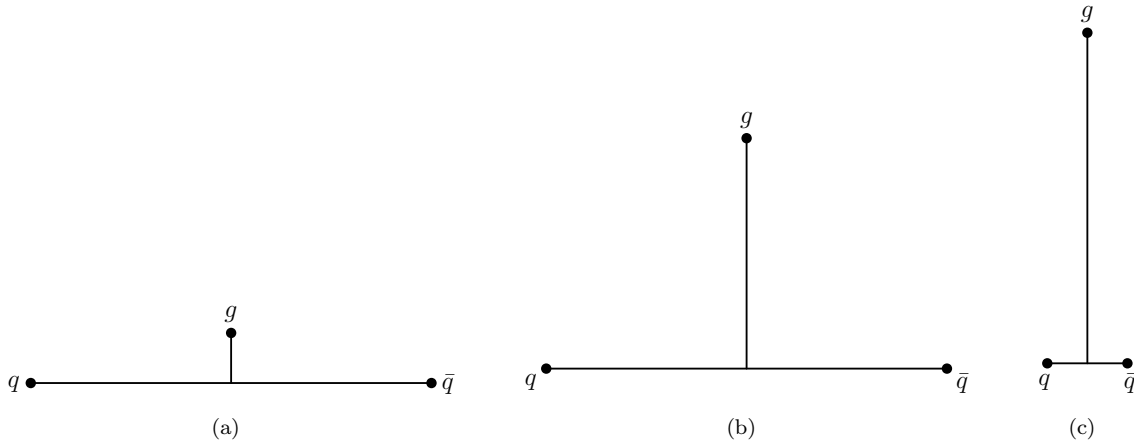
Obliczenia w niniejszej pracy nie korzystają z wielkości wyliczonych za pomocą obliczeń na sieci, acz jeden z modeli części spinowej funkcji falowej hybrydy inspirowany jest postacią operatorów używanych w obliczeniach na sieci do reprezentowania stanu hybrydy. Niniejsza praca przedstawia tylko pierwszy krok na drodze do wyprowadzenia modelu hybrydy z QCD, w przeciwieństwie do obliczeń z pierwszych zasad z QCD dla obliczeń na sieci. Nie osiągamy także tutaj, i nie zamierzamy osiągać, poziomu dokładności obliczeń na sieci [8, 9].

Obliczenia za pomocą hamiltonianu QCD w cechowaniu Coulomba [27, 28] wymagają znajomości własności stanu próżni, które zazwyczaj przybliża się za pomocą wielkości obliczonych w QCD na sieci. Podział na gluony oddziaływania i gluony konstytuentne zależy od wyboru cechowania. Prowadzenie obliczeń za pomocą dynamiki równoczesnej zamiast dynamiki na froncie świetlnym powoduje, że pchnięcia zależą od oddziaływania; wymagane jest zatem narzucenie warunków symetrii ze względu na pchnięcia, w porównaniu do konieczności narzucenia warunku symetrii obrotowej w obliczeniach na froncie świetlnym.

Analiza stanu hybrydy za pomocą wzbudzonego potencjału adiabatycznego między ciężkimi kwarkami [29, 30] ogranicza się do przypadku nierelatywistycznego. Postać wzbudzenia potencjału, reprezentującego konstytuentny gluon, wyliczana jest za pomocą obliczeń odpowiednich elementów macierzowych na sieci.

Niniejsza praca ma na celu przedstawienie metody oraz wyników poszukiwania relatywistycznego obrazu hybrydy. Analizę rozpoczynamy od jak najprostszego przypadku, dla którego spodziewany wynik jest znany i dla którego można kontrolować wszystkie kroki analizy. Dlatego też analiza przeprowadzona jest dla skalarnej hybrydy (bez egzotycznych liczb kwantowych). Dla tego przykładu niepewność, jak wygląda (jak wyglądać może) stan podstawowy hybrydy, i jak powinna wyglądać amplituda rozpadu hybrydy na skalarne mezony, jest minimalna.

W niniejszej pracy założono, że stan hybrydy może być reprezentowany za pomocą minimalnej liczby składników efektywnych, jako stan $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$. Przeprowadzone obliczenia wskazały, że przy tym założeniu warunki spełnienia symetrii szczególnej teorii względności na amplitudy rozpadów hybrydy na dwa mezony, za pośrednictwem zrenormalizowanego hamiltonianu QCD, wymuszają specjalną strukturę tego stanu. Struktura ta różni się od struktury stanów rozważanych w typowych modelach nierelatywistycznych, w których wszystkie charakterystyczne szerokości pędowej funkcji falowej są tego samego rzędu [16, 13, 15]. Otrzymana struktura hybrydy może być zwięźle opisana następująco: ciasna (w przestrzeni położeniowej) para kwark–antykwar, o szerokości pędowej funkcji falowej pary rzędu szerokości czynnika podobieństwa λ , luźno związana z gluonem.



Rysunek 1: Różne możliwe postacie struktury hybrydy: od szerokiej (w przestrzeni położeniowej) pary kwark–antykwar, z gluonem leżącym pomiędzy kwarkami, do wąskiej pary kwark–antykwar, luźno związanej z gluonem.

W hybrydzie para kwark–antykwar jest w stanie oktetu kolorowego (aby hybryda jako całość była singletem kolorowym). Wymiana gluonu w oktecie daje oddziaływanie odpychające między kwarkiem i antykwarciem. Gdy uwzględni się natomiast efekt oddziaływania kwarków z gluonem konstytuentnym, otrzymuje się względnie słabe efektywne oddziaływanie przyciągające między kwarkiem i antykwarciem. Tym bardziej wyjaśnienia wymaga mała odległość kwark–antykwar w hybrydzie, otrzymana z analizy symetrii amplitudy rozpadu hybrydy.

Możliwym wyjaśnieniem egzotycznej struktury hybrydy jest to, że może ona powstawać w wyniku mieszania stanu $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ z innymi sektorami Focka. Pełna analiza takiego mieszania jest aktualnie poza zasięgiem znanych metod analitycznych i numerycznych. Na podstawie badań przedstawionych w niniejszej pracy można jedynie wnioskować, że uproszczone modele dynamiczne, uwzględniające jakościowe cechy dynamiki kwarków i gluonów w QCD, mogą prowadzić do takiej struktury. Do powstawania takich właśnie specjalnych struktur mogłoby dochodzić w wyniku formowania się rezonansowych oktetów kolorowych w oddziaływaniach składowej $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ z pozostałymi sektorami Focka w hybrydzie.

W rozdziale 2 została opisana krótko forma dynamiki na froncie świetlnym, oraz metoda renormalizacji za pomocą cząstek efektywnych (RGPEP). Metoda RGPEP została wybrana przede wszystkim w celu wyjaśnienia jak wyobrażamy sobie związek modeli konstytuentnych z QCD. Pozwala ona sformułować opis hybrydy i mezonów jako stanów o minimalnej liczbie cząstek efektywnych. Użyta metoda renormalizacji wprowadza do efektywnego hamiltonianu, poza efektywnymi masami kwarków i gluonów oraz efektywną siłą oddziaływania, czynniki podobieństwa f_λ . Czynniki te tłumią oddziaływania o zmianie energii dużo większej od szerokości λ skali renormalizacji. Opisane zostało także znaczenie czynnika podobieństwa f_λ .

W rozdziale 3 opisany jest rozpad hybrydy na dwa mezony. Ponieważ nie są znane ściśle rozwiązania QCD na stany związane, zwłaszcza na stan hybrydowego mezonu (który jest stanem trójcząstkowym, trudniejszym do opisu niż relatywistyczne stany mezonów), należało, na podstawie ogólnej wiedzy o stanach związanych w QCD, zbudować modele stanów cząstek biorących udział w rozpadzie.

Opisane zostały modele hybrydowego mezonu, z uwzględnieniem różnych możliwości dobrania szczegółów i przy różnych liczbach kwantowych hybrydy. Przeanalizowane zostały efekty narzucenia warunku relatywistycznie poprawnej struktury amplitudy rozpadu hybrydy na dwa mezony. Ustalono, że wymaganie minimalnej liczby cząstek jest zgodne z wymaganiem spełnienia symetrii Lorentza pod warunkiem odpowiedniego (nietypowego) dobrania parametrów modelu. Szerokość pary kwark–antykwarok β_{hq} w funkcji falowej hybrydy (w przestrzeni pędowej) musi być rzędu szerokości λ czynnika podobieństwa (w zrenormalizowanym hamiltonianie QCD), aby amplituda rozpadu była relatywistycznie symetryczna. Otrzymana postać stanu hybrydy, wymagana do spełnienia warunków symetrii, jest jakościowo taka sama dla wszystkich rozważanych przypadków.

W rozdziale 4 analizowany jest możliwy mechanizm dynamiczny jaki mógłby być odpowiedzialny za jakościową cechę badanych funkcji falowych widoczną w rozpadach. Wynik taki mógłby być naturalny, gdyby para $q\bar{q}$ powstawała w wyniku rozpadu gluonu z tym samym czynnikiem podobieństwa f_λ jak w wierzchołku oddziaływania $H_{IQCD\lambda}$.

W celu uzyskania jakościowego obrazu dynamiki mieszania, w rozdziale 4.2 przeanalizowany został prosty matematyczny model mieszania stanów o różnej liczbie cząstek z oddziaływaniem separowalnym. Jest on ściśle rozwiązywalny analitycznie. Wnioski z tego modelu matematycznego zostały następnie użyte do analizy mieszania stanu $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ ze stanem $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ w bardziej złożonych modelach za pomocą obliczeń numerycznych.

Przeprowadzone obliczenia numeryczne modelu sprzężenia stanu $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ ze sta-

nem $|g_\lambda g_\lambda\rangle$, opisane w rozdziale 4.6, dały wyniki podobne do tych otrzymanych z analizy symetrii rozpadu. Efektywna szerokość pary kwark–antykwar β_{hq} (średnia szerokość w kierunku k_{hq} stanu własnego otrzymanego w wyniku mieszania) jest proporcjonalna do szerokości czynnika podobieństwa λ , ze współczynnikiem rzędu jedności.

Uzyskany stan hybrydy zawiera jednak duży wkład składowej $|g_\lambda g_\lambda\rangle$. Składowa ta powinna być widoczna w rozpadzie hybrydy, w wyniku działania tego samego hamiltonianu oddziaływania $H_{IQCD\lambda}$ dwukrotnie na stan $|g_\lambda g_\lambda\rangle$. Model sprzężenia stanu $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ ze stanem $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ nie może także wyjaśnić wyników dla stanów hybrydy, które nie sprzęgają się do stanów czysto gluonowych, jak np. hybrydy o niezerowym izospinie.

Gdyby wynik otrzymany z analizy symetrii rozpadu hybrydy pokrywał się z rozwiązaniami równania własnego dla H_{QCD} , to postać stanu $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ mogłaby być wynikiem jego oddziaływania (mieszania) z pozostałymi sektorami Focka. Pełna analiza tego zagadnienia jest jednak poza zasięgiem niniejszej pracy. Niemniej, nasuwa się hipoteza, przedstawiona w rozdziale 4.9, że efekt pozostałych sektorów Focka da się efektywnie przybliżyć za pomocą oddziaływania ze stanem $|g_\lambda G_{h\lambda}\rangle$ złożonym z gluonu g_λ i rezonansowego oktetu kolorowego, oznaczonego $G_{h\lambda}$. Rezonansowy oktet kolorowy może mieć niezerowy izospin. Zatem hipoteza rezonansu oktetowego pozwala na wy tłumaczenie otrzymanej postaci funkcji falowej hybrydy także dla hybrydy o niezerowym izospinie. Duży wkład składowej gluon–oktet do stanu hybrydy nie stanowi problemu w opisie rozpadu hybrydy, bo stan oktetu kolorowego nie daje wkładu do rozpadu na dwa mezony za pośrednictwem $H_{IQCD\lambda}$. W analizie rozpadu hybrydy widać zatem tylko wpływ mieszania na funkcję falową składowej $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$, a składowa $|g_\lambda G_{h\lambda}\rangle$ nie daje wkładu do amplitudy rozpadu.

Rozdział 5 stanowi podsumowanie niniejszej pracy. Przedstawia on przegląd otrzymanych wyników, oraz wnioski nasuwające się autorowi. Wskazane zostały także możliwe kierunki przyszłych badań, w celu testowania hipotezy rezonansu oktetowego $G_{h\lambda}$ jako przybliżenia do QCD dla skal pędów rzędu mas hadronów.

2 Metoda cząstek efektywnych

Rozdział ten opisuje, w jaki sposób można by, wychodząc z QCD, uzyskać model w którym hybrydę można reprezentować za pomocą o minimalnej liczby składników. Cząstki, z których budować będziemy stan hybrydy, to cząstki efektywne. Opisana dalej metoda przedstawia w jaki sposób hamiltonian QCD można by zapisać za pomocą takich stopni swobody.

2.1 Dynamika hamiltonowska na froncie świetlnym

Do pełnego opisu kwarków i gluonów w hadronach potrzebna jest relatywistyczna teoria kwantowa, w ramach której możliwy jest opis stanów związanych. Metodę połączenia mechaniki kwantowej i szczególnej teorii względności zaproponował Dirac [31]. Zbudowanie relatywistycznej teorii kwantowej wymaga konstrukcji 10 generatorów grupy Poincaré. Są to cztery generatory przesunięć w czasoprzestrzeni P^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$), trzy generatory obrotów $L^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}M^{jk}$ oraz trzy generatory pchnięć $K^i = M^{0i}$ ($i = 1, 2, 3$). Generatory te muszą spełniać następujące relacje komutacyjne:

$$[P^\mu, P^\nu] = 0, \quad (2.1a)$$

$$[M^{\mu\nu}, P^\lambda] = i(P^\mu g^{\nu\lambda} - P^\nu g^{\mu\lambda}), \quad (2.1b)$$

$$[M^{\kappa\lambda}, M^{\mu\nu}] = i(g^{\lambda\mu}M^{\kappa\nu} - g^{\lambda\nu}M^{\kappa\mu} + g^{\kappa\nu}M^{\lambda\mu} - g^{\kappa\mu}M^{\lambda\nu}). \quad (2.1c)$$

Powszechnie stosowany opis stanów fizycznych zakłada kwantowanie na hiperpłaszczyźnie stałego czasu $t = x^0 = 0$. Możliwe są jednak odmienne sformułowania dynamiki hamiltonowskiej, które sklasyfikował Dirac [31, 32]. Jednym z nich jest sformułowanie teorii na froncie świetlnym (LF). Należy przez to rozumieć kwantowanie na hiperpłaszczyźnie stycznej do powierzchni stożka świetlnego, gdzie rolę czasu t pełni $x^+ = x^0 + x^3$.

Notacja używana w niniejszej pracy podana została w przypisie A.

Sformułowanie QCD na froncie świetlnym wnosi uproszczenia w opisie dynamiki. Główne zalety korzystania z tego sformułowania są według [17] następujące:

- Oddziaływania natychmiastowe w x^+ obecne w hamiltonianie nie łamią zasady przyczynowości, bo są lokalne w x^\perp i odpowiadają rozchodzeniu się oddziaływań z prędkością światła. W cechowaniu $A^+ = 0$, w wyrażeniu na potencjał natychmiastowy pojawiają się jedynie odwrotności operatora ∂^+ , a nie odwrotności laplasjanu jak to ma miejsce w wyrażeniu na potencjał Coulomba w cechowaniu $A^0 = 0$ w sformułowaniu standardowym.
- W oddziaływaniach zawierających wyłącznie operatory kreacji bądź wyłącznie operatory anihilacji w hamiltonianie na froncie świetlnym wszystkie cząstki muszą mieć indywidualne pędy $p^+ = 0$. Dzieje się tak dzięki niezmienniczości translacyjnej H_{QCD} i nieujemności zmiennej p^+ . Oznacza to, że za pomocą prostego obcięcia pędów $p^+ > \delta$ można się pozbyć członów próżniowych. Dzięki temu uzyskujemy prostą strukturę stanu próżni.

- Rolę energii w sformułowaniu na froncie świetlnym gra składowa p^- , która dla cząstek swobodnych o masie m ma postać

$$p^- = \frac{p^{\perp 2} + m^2}{p^+}. \quad (2.2)$$

Jest zatem wyrażeniem nie zawierającym pierwiastków. Fakt ten ułatwia opis procesów kreacji i anihilacji cząstek, ponieważ nie ma potrzeby identyfikacji i interpretacji stanów o ujemnych energiach. Ponadto można spełnić relacje komutacyjne (2.1) bez potrzeby konstruowania pierwiastka z operatora.

- W sformułowaniu na froncie świetlnym ruch układu zawsze można rozłożyć na ruch całości i ruch względny. Rozkład taki nie istnieje w relatywistycznym przypadku w sformułowaniu równoczesowym. Istnienie takiego rozkładu w sformułowaniu na froncie świetlnym jest istotne, ponieważ umożliwia regularyzację przez ograniczenia narzucone tylko na pędy względne.
- Równie ważne w przypadku rozważania stanów trójcząstkowych (takich jak stan hybrydy) jest to, że na froncie świetlnym można stosować rozkład klastrowy. Przez rozkład klastrowy rozumiemy tutaj, że można rozłożyć pęd cząstki na część pędu całości i pęd względny względem reszty cząstek, a następnie zastosować tę samą metodę do pozostałych cząstek. Można tego dokonać także w przypadku relatywistycznym.
- Opis na froncie świetlnym powiązany jest z opisem cząstek w układzie nieskończonego pędu. Pozwala to nawiązać do modelu partonowego.

2.2 Grupa renormalizacji dla cząstek efektywnych

2.2.1 Potrzeba regularyzacji i renormalizacji hamiltonianu

Hamiltonian kanoniczny jest operatorem źle zdefiniowanym. Działając na stany z przestrzeni Hilberta, hamiltonian wyprowadza je z tej przestrzeni. Objawia się to między innymi przy obliczaniu operatora ewolucji. Napotykamy na problem już przy wyliczaniu H^2 , które okazuje się nieskończone. Przy obliczaniu wielkości fizycznych, np. przy rozwiązywaniu zagadnienia własnego, pojawiają się nieskończoności wynikające stąd, iż stany pośrednie mogą mieć dowolnie wysoką energię. Nieskończoności pojawiają się także przy wyliczaniu efektywnego hamiltonianu. Problem jest jeszcze bardziej poważny niż ten, jaki wynika jedynie z nieskończonego zakresu energii oddziaływań. Mianowicie, w kanonicznej QCD oddziaływanie rośnie, gdy rośnie wirtualna różnica energii między stanami oddziałujących cząstek przed i po oddziaływaniu.

Potrzebne jest zatem wprowadzenie czynników regularyzujących. Aby ograniczyć oddziaływania, żądamy by przekazy pędów w wierzchołkach były ograniczone. Robimy to wprowadzając wierzchołkowe czynniki regularyzujące związane z operatorami kreacji i anihilacji [12]. Dla każdego operatora kreacji i anihilacji wprowadzamy czynnik ograniczający w danym wierzchołku energię kinetyczną cząstki związanej z tym operatorem w ruchu względem pozostałych cząstek w tym samym wierzchołku. Zamiast cząstek swobodnych posługujemy się zatem efektywnymi cząstkami, które nie

oddziałują gdy masa inwariantna stanu biorącego udział w oddziaływaniu jest dużo większa od arbitralnie ustalonej skali Δ .

Wybrany w ten sposób regulator daje ograniczenie wyłącznie na pędy względne. Dzięki temu nie jest naruszana niezmienniczość dynamiki na froncie świetlnym względem pchnięć [12, 33]. Do celów regularyzacji nadfioletowej używana jest funkcja wykładnicza tłumiąca oddziaływania dla wysokich energii.

Ponieważ QCD jest teorią z cechowaniem, zawierającą cząstki bezmasowe, pojawiają się rozbieżności dla małych pędów podłużnych. Rozbieżności te występują w wektorach polaryzacji gluonów oraz w członach oddziaływania natychmiastowego, powstałych z wyeliminowania niefizycznych stopni swobody. Potrzebny jest dodatkowy czynnik regularyzujący [17, 34].

Dzięki wprowadzeniu regularyzacji otrzymuje się wyniki skończone. Aby zregularyzowany hamiltonian opisywał tę samą teorię co hamiltonian wyjściowy, nie wystarczy jednakże samo wprowadzenie obcięć. W wyniku eliminacji stanów o energii większej niż Δ w hamiltonianie zregularyzowanym pojawiają się kontrczłony: $H_{\text{eff}} = H_{\Delta} + X_{\Delta}$. Wyznacza się je przez żądanie, by wyniki fizyczne nie zależały od regularyzacji, używając silnego warunku by niskoenergetyczne elementy macierzowe hamiltonianu nie zależały od obcięcia [12].

2.2.2 Procedura grupy renormalizacji za pomocą transformacji podobieństwa

Zależność hamiltonianu od obcięcia (regularyzacji) można przeanalizować badając co dzieje się przy zmianie parametru obcięcia Δ czynnika regularyzującego.

Metoda renormalizacji za pomocą transformacji podobieństwa polega na znalezieniu transformacji unitarnej \mathcal{U}_{λ} , która działając na hamiltonian powoduje jego częściową diagonalizację [10]. Ta częściowa diagonalizacja objawia się w postaci czynnika f_{λ} , ograniczającego przekaz pędów w oddziaływaniach między cząstkami. Wprowadzony do teorii parametr λ o wymiarze pędu lub energii ($c = 1$) opisuje szerokość takiego przekształconego hamiltonianu jako macierzy w bazie stanów własnych $H_0 = H - H_I$. Ze względu na użycie transformacji unitarnej, w metodzie tej ten sam hamiltonian wyrażany jest za pomocą innych stopni swobody.

Kontrczłony w tym ujęciu wyznacza się z żądania, aby niskoenergetyczne elementy macierzowe hamiltonianu efektywnego H_{λ} były niezależne od obcięcia [10].

Ponieważ transformację podobieństwa wylicza się zazwyczaj w rachunku zaburzeń, nie można uczynić szerokości hamiltonianu λ dowolnie małą. Baza przestrzeni stanów zbudowana ze stanów swobodnych i baza zbudowana ze stanów będących ścisłymi rozwiązaniami zagadnienia własnego są powiązane zależnością nieperturbacyjną. Wiadomo też, że efektywna stała sprzężenia g_{λ} rośnie w QCD, gdy $\lambda \rightarrow 0$ i rachunek zaburzeń stosować można do obliczenia hamiltonianu efektywnego tylko dla λ większych niż pewna skala nieperturbacyjna.

Jeśli hamiltonian można zapisać za pomocą kombinacji iloczynów operatorów kreacji i anihilacji cząstek, działanie transformacji podobieństwa \mathcal{U}_{λ} można rozumieć jako operację zmiany bazy w przestrzeni operatorów z bazy operatorów kreacji i anihilacji q_{∞} do bazy operatorów kreacji i anihilacji q_{λ} cząstek efektywnych [11, 12],

$$q_{\lambda} = \mathcal{U}_{\lambda} q_{\infty} \mathcal{U}_{\lambda}^{\dagger}. \quad (2.3)$$

Zapisanie hamiltonianu za pomocą operatorów q_λ nie zmienia H jako operatora, więc

$$H_\lambda(q_\lambda) = H_{\text{kanon}}(q_\infty). \quad (2.4)$$

Hamiltonian zapisany w bazie cząstek efektywnych opisuje oddziaływania o przekazie pędów ograniczonym przez czynnik wierzchołkowy f_λ .

W renormalizacji za pomocą transformacji podobieństwa zakłada się zatem, że cząstki efektywne mają te same liczby kwantowe co cząstki występujące w niezrenormalizowanym hamiltonianie wyjściowym. Założenie to zgodne jest z obserwacją, że kwarki w lagranżjanie QCD i kwarki w modelu kwarków konstytuentnych opisywane są przez te same liczby kwantowe.

Przy obliczaniu transformacji podobieństwa za pomocą równania różniczkowego grupy renormalizacji czynnik wierzchołkowy f_λ powinien być funkcją gładką. Powinien on także zachowywać symetrie frontu świetlnego, co oznacza, że należy wyrazić go za pomocą niezmienników lorentzowskich. Ponadto, aby w rachunku zaburzeń nie pojawiały się małe mianowniki energetyczne, zarówno $1 - f_\lambda$, jak i $df_\lambda/d\lambda$ powinny znikać szybciej niż liniowo w funkcji zmiany energii przez oddziaływanie [33].

W niniejszej pracy przyjęty został czynnik podobieństwa f_λ dany przez funkcję wykładniczą zanikającą jak kwadrat różnicy mas inwariantnych cząstek przed i po oddziaływaniu [33], który spełnia przedstawione powyżej wymagania:

$$f_\lambda(u, v) = \exp \left[-\frac{(\mathcal{M}_{uv}^2 - \mathcal{M}_{vu}^2)^2}{\lambda^4} \right], \quad (2.5)$$

\mathcal{M}_{uv}^2 w wyrażeniu (2.5) oznacza masę niezmienniczą układu cząstek u biorących udział w oddziaływaniu z układem cząstek v :

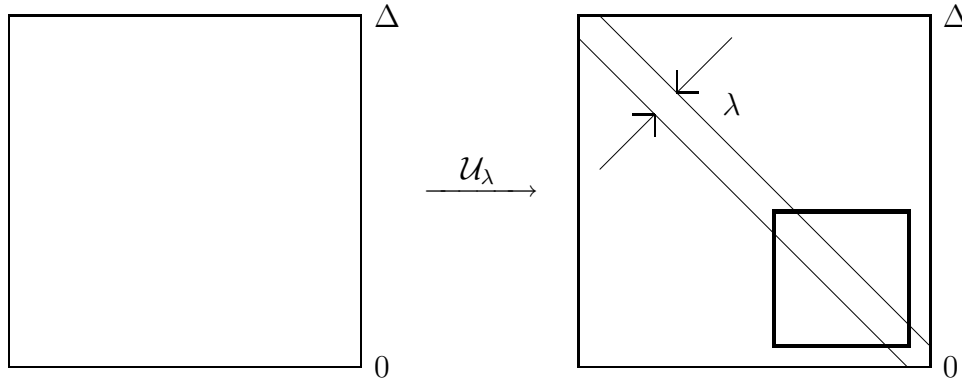
$$\mathcal{M}_{uv}^2 = \left[\sum_{i \in u(v)} k_i \right]^2. \quad (2.6)$$

2.3 Rola czynników podobieństwa f_λ

Powstaje pytanie w jaki sposób wierzchołkowy czynnik podobieństwa f_λ w hamiltonianie efektywnym pozwala na usunięcie zależności wyników od skali regularyzacji, i jaką rolę odgrywa ten czynnik w obliczeniach i analizie amplitudy rozpadu hybrydy.

Czynniki podobieństwa f_λ , występujące w zrenormalizowanym hamiltonianie, powodują, że macierz hamiltonianu w bazie cząstek efektywnych odpowiadających skali renormalizacji λ jest macierzą przydiagonalną, tzn. jej elementy macierzowe znikają między stanami, które różnią się masą inwariantną o znacznie więcej niż λ . Dla znalezienia wartości i stanów własnych takiego „wąskiego” zrenormalizowanego hamiltonianu zwykle¹ nie potrzeba diagonalizować jego pełnej, nieskończonej macierzy. Wystarczy wybrać okno (patrz rysunek 2) w macierzy hamiltonianu. Diagonalizacja takiego małego okna jest dużo prostsza niż diagonalizacja pełnej macierzy. Jeśli rozmiar okna jest odpowiednio duży w porównaniu do szerokości λ , centralne wartości

¹Z wyjątkiem sytuacji, gdy elementy macierzowe hamiltonianu rosną zbyt szybko wraz ze wzrostem energii.



Rysunek 2: Transformacja podobieństwa dla macierzy hamiltonianu w procedurze RGPEP.

własne okna zwykle zgadzają się z wartościami własnymi pełnej macierzy. W pracach [35, 36] pokazano, że dla prostego ściśle rozwiązywalnego modelu macierzowego z asymptotyczną swobodą, wartości własne okna wyliczonego w drugim rzędzie rachunku zaburzeń dla transformacji podobieństwa zgadzają się z dokładnością 10% z rozwiązaniem dla całej macierzy, z dokładnością 1% dla 6 rzędu.

Wybór okna (podhamiltonianu) otrzymuje się przez ograniczenie rozważań do wybranych sektorów Focka i ustalonego zakresu pędów. Przy założeniu, że pominięte sektory odseparowane są przerwą energetyczną (np. związaną z masą efektywną dodatkowych cząstek), ten wybór okna pozwala na wyprowadzenie przybliżenia minimalnej liczby składników. Ograniczenie to wymaga jednak odpowiednio małej szerokości λ zrenormalizowanego hamiltonianu, tak, aby przerwa energetyczna pomiędzy sektorem o minimalnej liczbie cząstek a pozostałymi sektorami Focka, które mają być ignorowane, była większa niż λ . Z drugiej jednak strony nie można za pomocą rachunku zaburzeń wyliczyć transformacji podobieństwa dla λ zbyt małych, gdyż natrafia się wtedy na obszar zagadnień nieperturbacyjnych. Zmniejszenie λ do zera oznaczałoby diagonalizację macierzy hamiltonianu, czyli rozwiązanie równania własnego (równania Schroedingera), zaś zagadnienia własnego nie można rozwiązać za pomocą rachunku zaburzeń. Istnieje zatem granica minimalnej wielkości λ , dla której można prowadzić obliczenia za pomocą transformacji podobieństwa wyliczonej w rachunku zaburzeń do określonego rzędu.

Okazuje się (patrz rozdziały 3.3 i 3.4), że czynnik f_λ odgrywa znaczącą rolę w spełnianiu symetrii relatywistycznych przez amplitudę rozpadu hybrydy na dwa mezony. Dla rozpadu hybrydy dużo powyżej proggu rozpadu, tzn. gdy produkty rozpadu poruszają się z dużymi prędkościami, niezbędną symetrię amplitudy rozpadu otrzymuje się dla λ rzędu 4 – 8 GeV. Dla hybrydy o minimalnej liczbie składników amplituda relatywistycznego rozpadu łamie symetrię obrotową również jeśli λ jest bardzo duża. Wynik ten nie jest nieoczekiwany; spodziewamy się, że przybliżenie minimalnej liczby składników łamie się gdy λ jest duże i cząstki q_λ zachowują się bardziej jak cząstki prądowe niż jak w modelu cząstek konstytuentnych.

Rozdział 4 pokazuje, że mieszanie sektora $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ z innymi sektorami przestrzeni Focka może być odpowiedzialne za otrzymaną nietypową postać stanu hybrydy. Szerokość λ czynnika podobieństwa, rzędu 5 GeV, mogłaby być odpowiedzialna za dużą szerokość pędową β_{hq} funkcji falowej ruchu względnego kwarku i antykwarku w hybrydzie ze względu na to, że para ta miesza się za pomocą oddziaływania $H_{I_{\text{QCD}\lambda}}$ z czynnikiem podobieństwa f_λ z innymi stanami w przestrzeni Focka, np. ze stanem $|g_\lambda g_\lambda\rangle$, gdy para nie ma izospinu (zapachu).

3 Rozpad hybrydy

W rozdziale tym hybrydą (mezonem hybrydowym) nazywać będziemy jedynie stany złożone z kwarku, antykwarku i gluonu. Podjęta analiza jakościowa i ilościowa mają na celu uzyskanie przybliżonego obrazu, który może stanowić jedynie punkt wyjścia do dalszych, bardziej precyzyjnych obliczeń. W podjętych badaniach szukamy pierwszego przybliżenia niezbędnego w przyszłych próbach rozwiązania teorii.

Oczekuje się, że amplitudy rozpadu wzbudzeń gluonowych w hybrydowych mezonach z egzotycznymi liczbami kwantowymi różnią się od tych charakteryzujących rozpad zwykłych rezonansów mezonowych [13, 14, 37]. Przewidywania te oparte są jednak na nierelatywistycznym obrazie kwarków konstytuentnych.

Obliczenia stanów podstawowych hybrydowych mezonów o liczbach kwantowych $J^{PC} = 0^{-+}, 1^{-+}, 1^{--}, 2^{-+}$ przewidują masy rzędu 1.7 do 1.9 GeV [38, 39]. Obliczenia na sieci dla hybrydy $J^{PC} = 1^{-+}$ przewidują masę 1.9 GeV [18, 19] hybrydy. Znalezione doświadczalnie stany $\pi_1(1400)$ oraz $\pi_1(1600)$ mogą być stanami egzotycznej hybrydy 1^{-+} (nie mogą być one gluonium, ale mogą być stanem cztero-kwarkowym) [40]. Zaobserwowany stan $\pi(1800)$ może być stanem hybrydy 0^{-+} , lub wzbudzonym radialnie stanem pionu [41].

Rozpad ciężkiej hybrydy produkuje lekkie mezony, poruszające się z prędkościami bliskimi prędkości światła. Fenomenologiczne modele rozpadu winny zatem przestrzegać symetrii szczególnej teorii względności.

Przy opracowywaniu modelu rozpadu hybrydy należało spełniać wymagania szczególnej teorii względności w klasie prostych modeli konstytuentnych ze spinem, skonstruowanych w zgodzie z oczekiwaniami teorii na podstawie odpowiedniego hamiltonianu efektywnego w QCD. W opracowanym modelu zachowana została symetria względem pchnięć Lorentzowskich, ponieważ został on zbudowany w zgodzie z zasadami niezmienniczej ze względu na pchnięcia procedury grupy renormalizacji dla cząstek efektywnych w QCD na froncie świetlnym.

Efektywny człon oddziaływania w hamiltonianie, odpowiedzialny za rozpad hybrydy, ma tę samą strukturę co człon kwark–antykwark–gluon otrzymany przez rozwiązanie równania grupy renormalizacji dla hamiltonianów w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń.

Należy zauważyć, że w zastosowanym tutaj podejściu symetria obrotowa w rozpadzie hybrydy nie jest zachowywana jawnie. W dynamice na froncie świetlnym operatory obrotu zawierają człon zależny od oddziaływania. Jak można będzie zobaczyć w dalszych obliczeniach, parametry modelowej funkcji falowej muszą przyjmować specjalne wartości aby symetria ta była zachowana. Nie znajduje natomiast zastosowania nierelatywistyczny obraz hybrydy jako układu złożonego z kwarku, antykwarku i ciężkiego gluonu leżącego pomiędzy kwarkami. Podkreślić jednak należy, że istnieje alternatywny obraz, który zachowuje wymagania szczególnej teorii względności w rozpadach hybryd. W obrazie tym odległość pomiędzy kwarkiem i antykwarkiem jest dużo mniejsza niż odległość pomiędzy gluonem a parą kwarków. Jest to tak jak gdyby hybryda była podobna do gluonium, w którym gluon jest zastąpiony przez parę kwark–antykwark o małych rozmiarach.

3.1 Opis rozpadu skalarnej hybrydy na dwa mezony

Opracowany w niniejszej pracy model rozpadu hybrydy, jako możliwe do rozważenia pierwsze przybliżenia, jest rozszerzeniem skalarne modelu z pracy [42]. W cytowanej pracy dla uproszczenia gluony były traktowane jako cząstki skalarne.

Nowym elementem w obecnej pracy jest uwzględnienie spinu gluonu konstytuentnego [43].

Hamiltonian oddziaływania $H_{I\lambda}$, opisujący rozpad konstytuentnego gluonu, jest wzięty bezpośrednio z LF QCD, z parametrem szerokości grupy renormalizacji λ wziętym równym skali mas hadronowych:

$$\mathcal{H}_{I\lambda} = g f_\lambda \bar{\psi}_\lambda \gamma^\mu A_{\mu,\lambda}^a t^a \psi_\lambda \quad . \quad (3.1)$$

Równanie (3.1) przedstawia składnik hamiltonianu, który kreuje parę kwark–antykwar z efektywnego konstytuentnego gluonu. Jest to jedyny człon, który daje wkład do obliczeń amplitudy rozpadu hybrydy. Człon oddziaływania zawiera wierzchołkowy czynnik kształtu f_λ [12]

$$f_\lambda = e^{-(\mathcal{M}_{q\bar{q}}^2 - m_{0g}^2)^2 / \lambda^4} \quad . \quad (3.2)$$

Niezmiennicza masa pary kwark–antykwar została oznaczona przez $\mathcal{M}_{q\bar{q}}$, zaś masa gluonu w hamiltonianie kanonicznym przez m_{0g} . W hamiltonianie kanonicznym QCD, z którego wychodzimy, gluony są bozonami cechowania i są cząstkami bezmasowymi. Przyjmuje się zatem $m_{0g} = 0$. Wyniki otrzymane w tej pracy okazują się nieczułe na wartość masy gluonu wstawioną do wzoru (3.2), w badanym zakresie λ .

3.1.1 Funkcje falowe mezonów

Funkcja falowa mezonu $q\bar{q}$ jest założona w postaci

$$|p\rangle = \sum_{12} \int [12] p^+ \tilde{\delta}(1+2-p) \Psi_{JPC}^p(1,2) b_{\lambda_1}^\dagger d_{\lambda_2}^\dagger |0\rangle \quad , \quad (3.3)$$

gdzie czynnik $\Psi_{JPC}^p(1,2)$ jest iloczynem czynników kolorowych, zapachowych (izospinowych), spinowych i zależnych od pędu

$$\Psi_{JPC}^p(1,2) = \chi_{c_1}^\dagger C_p \chi_{c_2} \chi_{i_1}^\dagger I_p \chi_{i_2} \chi_{s_1}^\dagger S_p(1,2) \chi_{s_2} \psi_p(1,2) \quad . \quad (3.4)$$

W wyrażeniu (3.4) $C_p = 1/\sqrt{3}$ (singlet kolorowy), zaś $S_p(1,2)$ jest macierzą 2 na 2 pomiędzy dwu–komponentowymi spinorami. Dla najprostszego przypadku mezonu o zerowym izospinie czynnik izospinowy I_p wynosi $I_p = 1/\sqrt{2}$ (singlet izospinowy). Dla neutralnego ładunkowo mezonu izowektorowego czynnik izospinowy I_p jest równy $I_p = \sigma^3/\sqrt{2}$, zaś dla naładowanego dodatnio (ujemnie) składnika izowektora $I_p = \sigma^\pm/\sqrt{2}$ (odpowiednio $I_p = \sigma^-/\sqrt{2}$). Symbole σ^i oznaczają macierze Pauliego. Symbol $\tilde{\delta}(k)$ oznacza $16\pi^3$ razy funkcja δ (delta Diraca) składowych prostopadłych (\perp) i podłużnych ($+$) pędu cząstek;

$$\tilde{\delta}(k) = 16\pi^3 \delta(k^+) \delta^{(2)}(k^\perp) \quad . \quad (3.5)$$

Funkcję falową $\psi_p(1, 2)$ wybieramy jako funkcję gaussowską

$$\psi_p(1, 2) = \mathcal{N}_p N_{pm}(\vec{k}_{12}) N_{ps}(\mathbf{k}_{12}) \exp\left[\frac{-\mathbf{k}_{12}^2}{2\beta_p^2}\right]. \quad (3.6)$$

Wektor \mathbf{k}_{12} jest trójpędem względnym kwarków w układzie środka masy pary kwark-antykwar. Jest on zdefiniowany za pomocą następującego warunku [44]:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{12}^\perp &= \kappa_{12}^\perp, \\ 4(\mathbf{k}_{12}^2 + m_q^2) &= \mathcal{M}_{12}^2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Szczegóły obliczeń \mathbf{k}_{12} opisano w przypisie C.

Funkcje pędów N_{pm} i N_{ps} w (3.6) są dodane arbitralnie. Jedną z możliwości jest przyjęcie ich tożsamościowo równych jedności. W tym przypadku całki po pędach zawierają pełną relatywistyczną miarę całkowania i pełną strukturę czynników spinowych. W szczególności, normalizacja stanu mezonu dana jest przez iloczyn kwadratu gaussowskiej funkcji falowej, czynnika powstałego z relatywistycznej miary całkowania w przestrzeni pędów oraz złożonego czynnika zależnego od spinu.

Alternatywnym rozwiązaniem jest przyjęcie takich funkcji N_{pm} i N_{ps} aby skasować wspomniane złożone czynniki, przynajmniej w mierze całkowania mezonu. Warunek normalizacji ma postać

$$\langle p|p' \rangle = p^+ \tilde{\delta}(p - p'). \quad (3.8)$$

Kiedy zarówno czynnik związany z miarą całkowania jak i czynnik związany ze spinem są kasowane odpowiednio przez N_{pm} (miara) i N_{ps} (spin), czynnik normalizacji sprowadza się do zwykłej całki funkcji gaussowskiej w nierelatywistycznej mechanice kwantowej.

Należało ustalić jak silnie więzy symetrii relatywistycznych nałożone na amplitudę rozpadu hybrydy zależą od postaci czynników N_{pm} i N_{ps} (wyrażenia na wszystkie czynniki N są podane w przypisie C). Przypadki, które będą rozważane, są oznaczone odpowiednio jako $N = 1$ (w pełni relatywistyczna, skomplikowana funkcja falowa modelu) oraz $N \neq 1$ (z uwzględnieniem podanych tutaj postaci czynników N , prowadzących do prostych całek w warunku normalizacji (3.8)).

Dla mezonów o liczbach kwantowych $J^{PC} = 0^{++}$ użyto następującego czynnika spinowego:

$$\chi_{s_1}^\dagger S_p(1, 2) \chi_{s_2} = \bar{u}_1 v_2, \quad (3.9)$$

gdzie u_1 i v_2 oznaczają spinory Diraca dla kwarków.

Dla mezonów pseudoskalarnych o liczbach kwantowych $J^{PC} = 0^{-+}$ czynnik spinowy ma postać:

$$\chi_{s_1}^\dagger S_p(1, 2) \chi_{s_2} = \bar{u}_1 \gamma^5 v_2. \quad (3.10)$$

Występujące w (3.9) i w (3.10) spinory frontowe opisane są w przypisie B (wzory (B.1)).

Opracowany tutaj model stanów mezonowych wymaga komentarzy dotyczących użytych oznaczeń i parametrów modelu. Po pierwsze, użyte określenie mezon b oznacza, że mezon jest względnie ciężki (o masie porównywalnej z masami mezonu b_1 lub

$\eta(1295)$). Spin mezonu b przyjęty został równy zero; uwzględnione zostały tylko najprostsze przypadki skalara i pseudoskalara. Nie opisywany był zatem spin prawdziwych mezonów b_1 . W rozważanym modelu parametry mezonu b nie są ograniczone przez konieczność przyjęcia parametrów jakiegokolwiek prawdziwego mezonu. Parametry te pozostawiamy swobodne (w sensownym zakresie wartości) aby zbadać jakie, jeśli w ogóle, wartości parametrów mogą dać amplitudę rozpadu zachowującą odpowiednie symetrie obrotowe.

Ta sama uwaga dotyczy stanu lekkiego mezonu, oznaczonego tutaj jako mezon p , który może mieć masę tak małą jak pion (mezon π).

3.1.2 Funkcja falowa hybrydy

W opracowywanym modelu stanu hybrydy o liczbach kwantowych $J^{PC} = 0^{++}$ przyjęto jako

$$|h\rangle = \sum_{123} \int [123] h^+ \tilde{\delta}(1+2+3-h) \Psi_{J^{PC}}^h(1,2,3) b_{\lambda_1}^\dagger d_{\lambda_2}^\dagger a_{\lambda_3}^\dagger |0\rangle. \quad (3.11)$$

Operator kreacji $a_{\lambda_3}^\dagger$ dla efektywnego (konstytuentnego) gluonu, odpowiadającego skali λ , niesie spin, a funkcja falowa $\Psi_{J^{PC}}^h(1,2,3)$ zależy od tego spinu. Gluon konstytuentny ma efektywną masę m_g . Funkcja falowa hybrydy jest iloczynem czynników kolorowych, zapachowych oraz gaussowskiej funkcji pędu względnego trzech cząstek:

$$\Psi_{J^{PC}}(1,2,3) = \chi_{c_1}^\dagger C_h^{c_3} \chi_{c_2} \chi_{i_1}^\dagger I_h \chi_{i_2} \chi_{s_1}^\dagger S_h(1,2,3) \chi_{s_2} \psi_h(1,2,3). \quad (3.12)$$

W (3.12) czynnik kolorowy wynosi $C_h^{c_3} = t^{c_3}/2$. Czynnik izospinowy dla najprostszego przypadku izoskalarnej hybrydy jest równy $I_h = 1/\sqrt{2}$ (jak dla mezonu). Dla hybrydy będącej składnikiem wektora izospinowego, czynnik izospinowy I_h w (3.12) dany jest takim wyrażeniem jak odpowiedni czynnik izospinowy I_p dla mezonu w (3.4).

Zakładamy, że czynnik zależny od pędu (funkcja falowa hybrydy) daje się przedstawić w postaci klastrowej [16]

$$\psi_h(1,2,3) = \mathcal{N}_h N_{hm}(\vec{k}_q, \vec{k}_g) N_{hs}(\vec{k}_q, \vec{k}_g) \exp\left[\frac{-\vec{k}_q^2}{2\beta_{hq}^2}\right] \exp\left[\frac{-\vec{k}_g^2}{2\beta_{hg}^2}\right], \quad (3.13)$$

z gaussowską funkcją pędów względnych. Tutaj \vec{k}_q oznacza trójpęd względny [44] kwarku względem antykwarku w układzie środka masy pary kwark–antykwark, zaś \vec{k}_g jest trójpędem względnym gluonu względem pary kwark–antykwark (zobacz przypis C). Konstrukcja użyta w niniejszej pracy opiera się na własnościach dynamiki na froncie świetlnym; na froncie świetlnym rozdział pędów na pęd całości i pęd względny oraz rozkład klastrowy pędów względnych jest dobrze zdefiniowany także w przypadku relatywistycznym.

Opcjonalne dodatkowe czynniki N_{hm} i N_{hs} mogą, jak dla mezonów, być przyjęte równe jedności lub wybrane tak, iż równanie normalizacji hybrydy przyjmuje znaną postać nierelatywistyczną. Przypadek oznaczony za pomocą symbolu $N = 1$ odnosi się do wyboru N_{pm} , N_{ps} , N_{bm} , N_{bs} w funkcjach falowych mezonów, oraz N_{hm} i N_{hs} w funkcji falowej hybrydy tożsamościowo równych jedności. Przypadek $N \neq 1$

oznacza N_{pm} , N_{ps} , N_{bm} , N_{bs} , N_{hm} i N_{hs} dobrane tak by odpowiednio równania normalizacji stanu mezonu i równanie normalizacji stanu hybrydy przyjęły znana postać nierelatywistyczną.

Najprostszy czynnik spinowy dla skalarnej hybrydy, który mógł być rozważany w teorii relatywistycznej, ma postać:

$$\chi_1^\dagger S_h(1, 2, 3) \chi_2 = \bar{u}_1 \gamma_\mu \varepsilon_3^\mu v_2, \quad (3.14)$$

gdzie ε_3 jest czterowektorem polaryzacji gluonu. Przypadek ten będzie oznaczany jako 'uev'. Dla efektywnego gluonu w cechowaniu frontowym $A^+ \equiv 0$, wektor polaryzacji przedstawia się następująco:

$$\varepsilon_{k\sigma}^\mu = \left(\varepsilon_{k\sigma}^+ = 0, \varepsilon_{k\sigma}^- = \frac{2k^\perp \varepsilon_\sigma^\perp}{k^+}, \varepsilon_{k\sigma}^\perp = \varepsilon_\sigma^\perp \right). \quad (3.15)$$

Suma po wszystkich polaryzacjach (2 stanach spinowych) gluonu jest równa:

$$\sum_\sigma \varepsilon_{k_3\sigma}^\mu \varepsilon_{k_3\sigma}^{*\nu} = -g^{\mu\nu} + \frac{k_3^\mu g^{+\nu} + g^{+\mu} k_3^\nu}{k_3^+}. \quad (3.16)$$

W powyższym wyrażeniu składowa k_3^- pędu gluonu jest taka sama jak dla gluonów bezmasowych, tzn. $k_3^- = k_3^{\perp 2}/k_3^+$.

Alternatywnym wyrażeniem na czynnik spinowy, uwzględniającym nieabelowość grupy cechowania, ale niekoniecznie lepszym z punktu widzenia teorii dynamicznej niż czynnik dany równaniem (3.14), jest

$$\chi_{s_1}^\dagger S_h(1, 2, 3) \chi_{s_2} = \bar{u}_1 \gamma_\mu v_2 G^{\mu\nu} P_\nu, \quad (3.17)$$

gdzie $G^{\mu\nu} = k_3^\mu \varepsilon_{k\sigma}^\nu - k_3^\nu \varepsilon_{k\sigma}^\mu$, zaś $P = k_1 + k_2 + k_3$. Wyrażenia takie występują przy opisie gluonu w obliczeniach na sieci dla hybrydy, zobacz np. [45, 46, 21].

Czterowektor $\varepsilon_{k\sigma}^\nu$ jest wektorem polaryzacji bezmasowego bozonu cechowania. Ale k_3^- może być wyliczana jak gdyby masa gluonu wynosiła 0, lub używając parametru m_g (efektywnej masy gluonu); nie wiemy która z tych możliwości jest bardziej realistyczna w teorii dynamicznej. Przypadek dla którego do wzoru $k_3^- = (k_3^{\perp 2} + m_g^2)/k_3^+$ została wstawiona nieznana efektywna masa gluonu m_g oznaczamy jako $\bar{u}GPv$.

Rozważane zostały także alternatywne wersje czynnika spinowego (3.17), w których obliczamy k_3^- (składową – pędu gluonu) jak gdyby masa gluonu powinna być wstawiona 0 w $G^{\mu\nu}$ i/lub w P^ν . Przypadki te zostały oznaczone odpowiednio jako $\bar{u}\tilde{G}\tilde{P}v$, $\bar{u}G\tilde{P}v$, i $\bar{u}\tilde{G}Pv$. Znak tyldy nad odpowiednim symbolem oznacza że wstawiamy $m_g = 0$ w obliczaniu k_3^- w czynniku oznaczonym za pomocą tyldy.

Należy przy tym zauważyć, że składowa $k_3^- = (k_3^{\perp 2} + m_g^2)/k_3^+$ pędu gluonu nie daje wkładu do iloczynu $k_3 \varepsilon_{k\sigma}$ dla wybranego cechowania, oraz że podgrupa transformacji Poincaré, która zachowuje hiperpłaszczyznę frontu świetlnego, zachowuje także warunek cechowania $A^+ \equiv 0$. Oznacza to, że nadanie masy efektywnemu gluonowi w stanie hybrydy nie jest sprzeczne z wyborem cechowania. Jest to ważne spostrzeżenie, gdyż inaczej rozpatrywany w niniejszej pracy model hybrydy nie miałby sensu.

3.2 Obliczenia numeryczne amplitudy rozpadu hybrydy

Zbadane zostały symetrie relatywistyczne amplitudy rozpadu hybrydy dla różnych przypadków wyboru szczegółów modelu. Obliczenia zostały przeprowadzone z uwzględnieniem różnych czynników spinowych mezonów (rozpad na skalary (3.9) lub pseudoskalary (3.10)), różnego wyboru czynnika spinowego dla hybrydy (najprostszy (3.14) albo alternatywny (3.17)), oraz dla różnego wyboru ekstra czynników N . Zbadano czy wyniki analizy symetrii rozpadu zależą od podanych szczegółów modelu i określono charakterystyki, które są uniwersalne (nie zależą od tych szczegółów). Szczegóły obliczeń są podane w przypisie C.

Postać czynników spinowych we wzorze na amplitudę rozpadu hybrydy, oraz postaci opcjonalnych dodatkowych czynników normalizujących N_{ps} , N_{bs} , N_{hs} zostały wyliczone za pomocą dwóch różnych metod: za pomocą spinorów dwuskładnikowych z przypisu B i za pomocą śladów macierzy 4×4 . Sprawdzono, że obie metody dają takie same wyniki.

Sześciorozmiarowe całkowanie, potrzebne do wyliczenia amplitudy rozpadu, zostało wyliczone za pomocą całkowania Monte Carlo (używając procedury *vegas* [47, 48]). Obliczenia amplitudy rozpadu zostały wykonane za pomocą dwu osobnych programów: jeden w Fortranie, drugi w C korzystający z GNU Scientific Library (GSL) [49]. Dają one takie same wyniki, z dokładnością do oszacowania błędu obliczeń metody *vegas* (odchylenia standardowego podawanego przez tą metodę), które jest rzędu 10^{-3} .

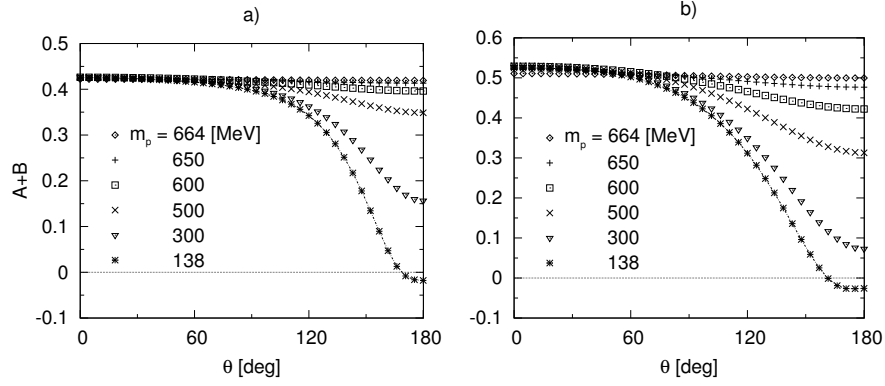
Minimalizacja zależności amplitudy rozpadu od kąta θ została wykonana za pomocą procedury lokalnej minimalizacji wielowymiarowej Powella [50], lub za pomocą metody globalnej minimalizacji wielowymiarowej za pomocą procedury adaptacyjnego symulowanego wyżarzania (Adaptive Simulated Annealing – ASA) [51, 52].

3.3 Relatywistyczna niezmienniczość amplitudy rozpadu hybrydy

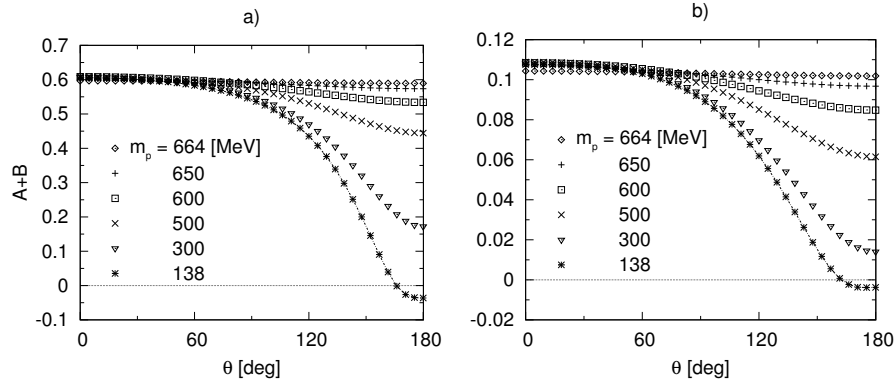
Amplituda rozpadu skalarnej hybrydy, o liczbach kwantowych $J^{PC} = 0^{++}$ na dwa (pseudo)skalarne mezony (o liczbach kwantowych $J^{PC} = 0^{++}$ lub $J^{PC} = 0^{-+}$) powinna być sferycznie symetryczna. Model konstytuentny na froncie świetlnym wprowadza jednakże zależność amplitudy rozpadu od kąta θ (kąta pomiędzy osią z a kierunkiem ruchu lekkiego mezonu). Ten efekt jest ceną jaką płaci się za niezmienniczość ze względu na pchnięcia Lorentza. Został on odkryty i zbadany dla skalarnych gluonów w [42].

Rysunek 3 ilustruje jak silnie łamana jest symetria obrotowa w obliczeniach rozpadu na dwa skalarnie mezony (czynniki spinowe $\bar{u}v$), gdy masa lekkiego mezonu zmienia się od 664 MeV do 138 MeV. Na tym rysunku, występujące w funkcjach falowych czynniki N_{hm} , N_{hs} , N_{bm} , N_{bs} , N_{pm} , i N_{ps} są dobrane tak, aby dać nierelatywistyczną postać całek w warunkach normalizacji. W przypadku gdy masa lekkiego mezonu jest równa 664 MeV, masa hybrydy m_h jest tuż powyżej progu $m_b + m_p$ i produkty rozpadu prawie nie poruszają się. Model konstytuentny na froncie świetlnym daje wtedy amplitudę, która nie zależy od kąta θ .

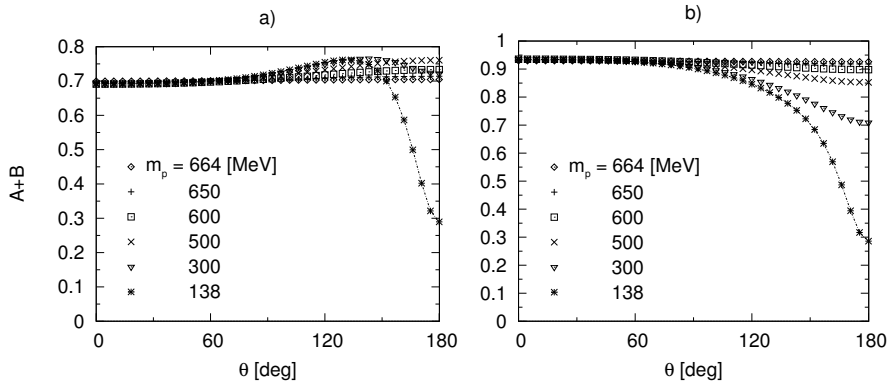
W przypadku gdy masa lekkiego mezonu równa jest 138 MeV, co odpowiada



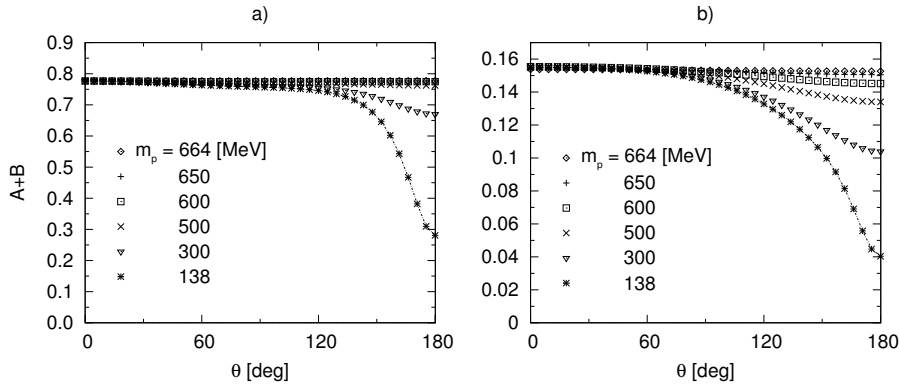
Rysunek 3: Zależność amplitudy rozpadu hybrydy z uwzględnieniem różnych mas lekkiego mezonu m_p . Na wykresie a) czynnik spinowy jest równy $\bar{u}\gamma^\mu v \varepsilon_\mu$ (ozn. $\bar{u}\not{\varepsilon}v$), zaś na wykresie b) czynnik spinowy jest dany wzorem $\bar{u}\gamma^\mu v G_{\mu\nu} P_{123}^\nu$ (ozn. $\bar{u}G\not{P}v$). W obydwu przypadkach hybryda rozpada się na dwa skalarne mezony o liczbach kwantowych $J^{PC} = 0^{++}$ (o czynnikach spinowych $\bar{u}v$). Funkcja falowa modelu zawiera czynniki N_{ps} , N_{pm} , N_{bs} , N_{bm} i N_{hs} , N_{hm} które zapewniają iż funkcje podcałkowe, pojawiające się w warunkach normalizacji, mają nierelatywistyczną postać prostych funkcji gaussowskich (przypadek $N \neq 1$). Parametry funkcji falowych są podane w pierwszej kolumnie tabeli 1 na stronie 28.



Rysunek 4: Jak na rysunku 3; wartość czynnika $N = 1$.



Rysunek 5: Jak na rysunku 3, przy założeniu rozpadu hybrydy na dwa pseudoskalarne mezony o $J^{PC} = 0^{-+}$ (o czynnikach spinowych $\bar{u}\gamma^5 v$).



Rysunek 6: Jak na rysunku 3, z uwzględnieniem łącznego efektu zmian z wykresu 4 i 5, tzn. $N = 1$ i przy założeniu rozpadu hybrydy na dwa mezony pseudoskalarne.

masie mezonów π , masa hybrydy jest wysoko powyżej progu, i lekki mezon osiąga prędkości relatywistyczne. W tym przypadku wyliczona amplituda zależy od kąta θ w nieakceptowalnym stopniu. Efekt ten jest spowodowany faktem, że kiedy wylatujący lekki mezon leci wzdłuż osi z z prędkością bliską prędkości światła, musi on być zbudowany z kwarków, które mają bardzo mały pęd podłużny k^+ , a takie kwarki są tłumione w przypadku funkcji falowych hybrydy przyjętych w obliczeniach.

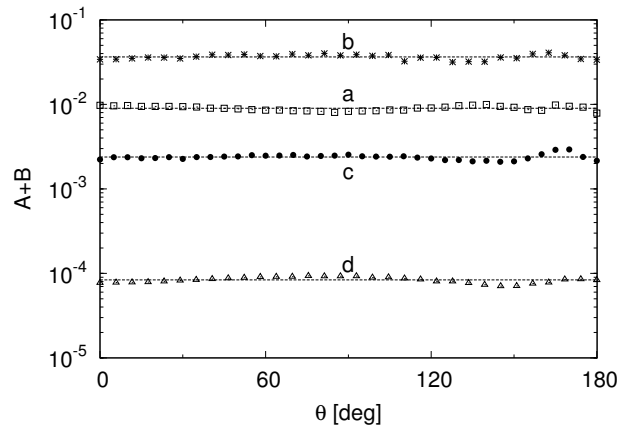
Wartości użytych do obliczeń parametrów są podane w pierwszej kolumnie tabeli 1 na stronie 28. Rysunki 4 do 6 ilustrują ten sam efekt co rysunek 3, lecz z wszystkimi czynnikami N_{hm} , N_{hs} , N_{bm} , N_{bs} , N_{pm} , i N_{ps} równymi 1, lub dla rozpadu na dwa mezony pseudoskalarne ($J^{PC} = 0^{-+}$), lub też dla przypadku gdy obydwie te warunki występują razem. Aby spełnić więzy szczególnej teorii względności, amplituda rozpadu powinna być niezależna od kąta θ .

Ogólnie, łamanie symetrii obrotowej jest rezultatem tego, że modelowe funkcje falowe nie są ograniczone dynamicznie przez teorię relatywistyczną, leżącą u podstaw obliczeń. Opracowany model jest rozsądny, przez co rozumie się, że:

- (1) stany mezonów są opisane za pomocą dobrze zdefiniowanych stopni swobody, pojawiających się w zrenormalizowanym hamiltonianie H_λ w QCD na froncie świetlnym z małym parametrem λ grupy renormalizacji za pomocą transformacji podobieństwa dla cząstek efektywnych,
- (2) symetria ze względu na pchnięcia Lorentzowskie jest zachowana ściśle,
- (3) rozpad hybrydy jest powodowany przez człon oddziaływania w zrenormalizowanym hamiltonianie QCD.

Najbardziej wątpliwe w modelu jest założenie, że mała liczba składników wystarczy do zbudowania rozwiązania na podłożu teorii relatywistycznej. W opracowanym modelu liczba składników jest najmniejsza z możliwych.

Można byłoby przypuszczać, że zachowanie symetrii obrotowej w przedstawionym modelu nie będzie możliwe. Byłoby to wynikiem faktu, że w dynamice na froncie świetlnym symetria obrotowa jest symetrią dynamiczną, tzn. zależy od oddziaływania. Oddziaływania mogą zatem zmienić liczbę cząstek (składników).



Rysunek 7: Amplituda rozpadu hybrydy w funkcji kąta θ dla czterech przypadków: a) $\bar{u}\zeta\nu$, $N \neq 1$ (druga kolumna tabeli 1 na następnej stronie), b) $\bar{u}\zeta\nu$, $N = 1$ (trzecia kolumna tabeli 1), c) $\bar{u}GP\nu$, $N \neq 1$ (czwarta kolumna tabeli 1), d) $\bar{u}GP\nu$, $N = 1$ (piąta kolumna tabeli 1). Rozpad na dwa skalarnie mezony $J^{PC} = 0^{++}$.

Na rysunkach 3 do 6 jest widoczne, że wszystkie testowane modele bardzo dobrze zachowują symetrię obrotową w przypadku rozpadów nierelatywistycznych (na dwa ciężkie mezony). Natomiast w przypadku rozpadów relatywistycznych, wszystkie modele zawodzą. (Rozpady na pseudoskalary łamią symetrię odrobinę mniej. Wynika to stąd, że pseudoskalary są zdominowane w funkcjach falowych przez czynniki nierelatywistyczne, to znaczy niezależne od pędu).

Nasuwało się zatem pytanie, czy wyniki te oznaczają, że wszystkie modele oparte na założeniu najmniejszej możliwej liczby składników nie mogą spełniać symetrii relatywistycznych?

Odpowiedź na to ważne pytanie brzmi nie. Model konstytuentny z minimalną liczbą składników nie musi być błędny. Ze względu na to, że symetria obrotowa w rozważanym podejściu jest symetrią dynamiczną, nie jest jednoznacznie wiadome czy parametry podane w pierwszej kolumnie tabeli 1 (strona 28) odpowiadają rozwiązaniu teorii relatywistycznej.

Założmy, że inny zestaw parametrów powinien być użyty w rozsądnym modelu, który przybliży rozwiązanie teorii relatywistycznej. Czy można znaleźć zestaw wartości parametrów funkcji falowych modelu konstytuentnego, dla których otrzymamy wymaganą symetrię obrotową? Odpowiedź jest pozytywna. Równocześnie jednak znaleziony zestaw wartości parametrów wskazuje na nowy obraz hybryd. Obraz ten wygląda na ogólny, w tym znaczeniu, że jego dominujące własności nie zależą od tego w jaki sposób uwzględniamy spin gluonu i spiny kwarków. Przeprowadzone badania numeryczne dostarczają przykładów modeli z najmniejszą liczbą składników, w których symetria obrotowa jest zachowana z dobrą dokładnością. Zachodzi to wówczas, gdy pozwolimy by wartości parametrów w funkcjach falowych i wartość czynnika skali λ RGPEP w hamiltonianie ulegały zmianie. Bezwzględnie należy jednak pamiętać, że liczba zmiennych parametrów w rozważanej klasie modeli wynosi 7, co daje dużą liczbę przypadków do sprawdzenia. Każdy z tych przypadków wymaga 6-wymiarowego całkowania dla każdej wartości kąta θ .

Na rysunku 7 widoczne jest jak dobrze może być odtworzona symetria obrotowa

Rys. #	3–6a,b	7a	7b	7c	7d	hs
m_h	1.9	<i>s</i>	<i>s</i>	<i>s</i>	<i>s</i>	<i>s</i>
m_b	1.235	<i>s</i>	<i>s</i>	<i>s</i>	<i>s</i>	<i>s</i>
m_p	<i>zmienna</i>	0.1375	<i>s</i>	<i>s</i>	<i>s</i>	<i>s</i>
m_q	0.3	0.68	0.75	0.67	0.87	0.365
m_g	0.8	2.6	1.4	3.7	1.3	1.63
β_p	0.4	0.19	0.34	0.14	0.21	0.375
β_b	0.4	0.77	1.2	1.0	0.96	0.719
β_{hg}	1.0	0.28	0.31	0.31	0.52	0.60
β_{hq}	1.0	3.8	4.4	3.8	7.5	4.61
λ	10000	4.8	4.4	4.4	4.4	4.49

Tabela 1: Parametry funkcji falowych (w GeV), użyte w obliczeniach przedstawionych na rysunkach 3–7 (posłużono się tą samą notacją co w pracy [42]). Symbol *s* oznacza że parametr ma tę samą wartość co w sąsiedniej kolumnie z lewej strony. Kolumny 7a–d zawierają wyniki lokalnej minimalizacji za pomocą metody Powella [50], obliczone startując z wartości danych w ostatniej kolumnie (oznaczonej „hs”); jest ona taka sama jak odpowiednia kolumna w tabeli I w pracy [42].

przez wybranie innego zestawu wartości parametrów w funkcjach falowych (parametry odpowiadające rys. 7 są podane w kolumnach 7a–d tabeli 1). Krzywe „a” i „b” przedstawiają amplitudę rozpadu hybrydowego mezonu z czynnikiem spinowym danym równaniem (3.14) (przypadek oznaczony $\bar{u}\not{v}$). Krzywe „c” i „d” na tym samym rysunku przedstawiają amplitudę rozpadu dla hybrydy z czynnikiem spinowym danym równaniem (3.17) (przypadek oznaczony $\bar{u}GPv$). Wartości parametrów zestawione są w trzeciej kolumnie tabeli 1. Krzywe „a” i „c” są wynikiem obliczeń przy $N \neq 1$, zaś krzywe „b” i „d” dla $N = 1$.

Optymalny wybór parametrów uzyskanych z wymagania warunku symetrii obrotowej zawiera β_p około dwa razy mniejsze niż startowa wartość 0.4 GeV. Wielkość β_p rzędu 0.4 GeV odpowiada rozmiarowi prawdziwego mezonu π (powrócimy do tego zagadnienia później). Możliwe jest zatem znalezienie innych zestawów wartości parametrów z jeszcze mniejszymi β_p i znacząco mniejszymi masami kwarków. Tę własność odkryto już w pracy [42]. Przypadki pokazane tutaj zostały uzyskane przez zastosowanie lokalnej metody minimalizacji wielowymiarowej Powella [50], startując z zestawu parametrów oznaczonego jako *hs* (od „heavy-scalar”) znalezionego w modelu skalarnym w pracy [42]. Wprowadzone oznaczenie odpowiada względnie ciężkim cząstkom skalarnym, które odgrywały rolę kwarków w [42].

Wyniki badań opisane w niniejszej pracy charakteryzują się względnie dobrym zachowaniem symetrii sferycznej, w porównaniu z innymi lokalnymi minimami, które byliśmy w stanie zidentyfikować. Wybierając minimum optymalne z różnych możliwych minimów lokalnych, kierowaliśmy się warunkiem aby sferycznie symetryczna amplituda rozpadu hybrydy w danym minimum nie była wiele rzędów mniejsza niż amplituda dla przypadku parametrów podanych w pierwszej kolumnie tabeli 1. Należy jednak zauważyć, że amplitudy na rysunku 7 są w rzeczywistości o pełen rząd mniejsze niż na rysunkach 3–6. Fakt ten wskazuje jak ważne mogą być więzy szczególnej teorii względności dla analizy danych doświadczalnych. Należy także zaznaczyć,

że wielkość stałej sprzężenia w hamiltonianie oddziaływania jest ustalona jak w [42] i nie ulegała zmianom przy znajdowaniu wartości parametrów.

parametr	m_q	m_g	β_p	β_b	β_{hg}	β_{hq}	λ
min	0.1	0.5	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
max	0.6	2.0	0.8	1.6	2.0	8.0	8.0

Tabela 2: Ograniczenia na wartości parametrów funkcji falowych (w GeV), użytych następnie w procedurze minimalizacji globalnej za pomocą adaptatywnego symulowanego wyżarzania ASA (Adaptive Simulated Annealing) [51, 52].

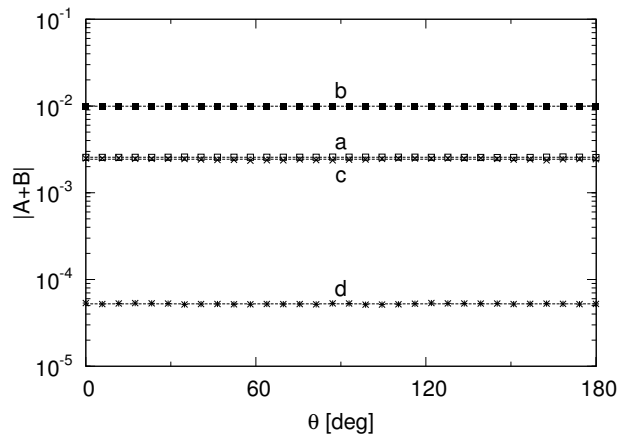
Jest oczywiste, że nieukierunkowana i nieograniczona co do wartości parametrów minimalizacja łamania symetrii jest uproszczonym podejściem. Minimalizacja powinna uwzględniać znane więzy, w tym ograniczenia takie jak średnica mezonu p , oraz możliwie jak najwięcej ograniczeń dynamicznych. Ale nie znamy dynamiki minimalnej liczby składników i naszym celem jest jej oszacowanie. Należy uważać na to, w jaki sposób wyliczane są te ograniczenia, w tym czy wyliczenia spełniają ograniczenia szczególnej teorii względności.

Najprostszą i najmniej ograniczającą metodą zadania ograniczeń w testowanych modelach jest po prostu ograniczenie wartości każdego z parametrów do ustalonego zakresu wokół wartości, które uznajemy za rozsądne. Takie najslabsze ograniczenia wartości parametrów zaadoptowane do opisanych minimalizacji są podane w tabeli 2.

Dokonana została globalna minimalizacja odstępstw symetrii obrotowej, przy użyciu różnych oszacowań na odstępstwo amplitudy rozpadu od funkcji sferycznie symetrycznej (stałej w funkcji kąta θ). Jednym z tych oszacowań jest odchylenie standardowe od wielkości średniej, czyli suma kwadratów odległości od średniej (oznaczona symbolem „stddev” na rysunkach w przypisie D). Drugim kryterium oszacowania było maksimum z wartości bezwzględnej odchylenia od wartości średniej (oznaczone „maxdev” w przypisie D). Obydwa te kryteria były mierzone względem średniej amplitudy rozpadu. Globalna minimalizacja w założonym zakresie parametrów (tabela 2) wykonana została za pomocą metody adaptatywnego symulowanego wyżarzania ASA [51, 52] (Adaptive Simulated Annealing).

Rysunek 8 przedstawia wyniki uzyskane przy użyciu czynnika spinowego hybrydy danego równaniem (3.14): krzywa „a” dla przypadku $N \neq 1$ i krzywa „b” dla przypadku $N = 1$; oraz czynnika spinowego danego równaniem (3.17): krzywa „c” dla przypadku $N \neq 1$ i krzywa „d” dla przypadku $N = 1$. Wszystkie obliczenia dotyczą rozpadu na dwa mezony skalarnie (o czynnikach spinowych $\bar{u}v$). Czynniki N mają znaczący wpływ na rząd wielkości amplitud i mogą skompensować lub dramatycznie zwiększyć efekt zmiany czynników spinowych. Oznacza to że najprawdopodobniej nie powinno się ufać modelom hybryd opartym wyłącznie na intuicjach nierelatywistycznych.

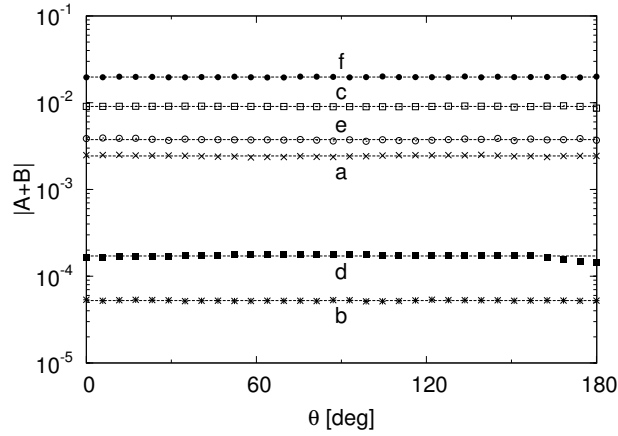
Wyniki rozpadu na dwa pseudoskalarnie mezony $J^{PC} = 0^{-+}$ (o czynniku spinowym $\bar{u}\gamma^5 v$ są przedstawione na rysunku 10. Odpowiednie wartości parametrów funkcji falowych są podane w tabeli 5. Analogicznie, rysunki 9 i 11 ilustrują wyniki uzyskane przy alternatywnych wyborach czynnika spinowego hybrydy danego równaniem (3.17) (przypadki oznaczone jako $\bar{u}GPv$, $\bar{u}\tilde{G}Pv$ i $\bar{u}\tilde{G}\tilde{P}v$, patrz rozdział 3.1.2).



Rysunek 8: Amplituda rozpadu hybrydy na dwa skalarnie mezony $J^{PC} = 0^{++}$ w funkcji kąta θ dla przypadków: a) $\bar{u}\phi\nu$, $N \neq 1$ (pierwsza kolumna tabeli 3), b) $\bar{u}\phi\nu$, $N = 1$ (druga kolumna tabeli 3), c) $\bar{u}GP\nu$, $N \neq 1$ (trzecia kolumna tabeli 3), d) $\bar{u}GP\nu$, $N = 1$ (czwarta kolumna tabeli 3).

Fig. #	8a	8b	8c	8d
spin	$\bar{u}\phi\nu$	$\bar{u}\phi\nu$	$\bar{u}GP\nu$	$\bar{u}GP\nu$
N	$N \neq 1$	$N = 1$	$N \neq 1$	$N = 1$
m_h	1.9	s	s	s
m_b	1.235	s	s	s
m_p	0.1375	s	s	s
m_q	0.152	0.21	0.17	0.155
m_g	1.28	1.07	1.70	1.90
β_p	0.132	0.219	0.1	0.1
β_b	0.320	0.536	0.321	0.371
β_{hg}	0.766	1.05	0.267	0.263
β_{hq}	8.0	7.83	4.59	5.73
λ	7.68	6.13	2.86	7.98

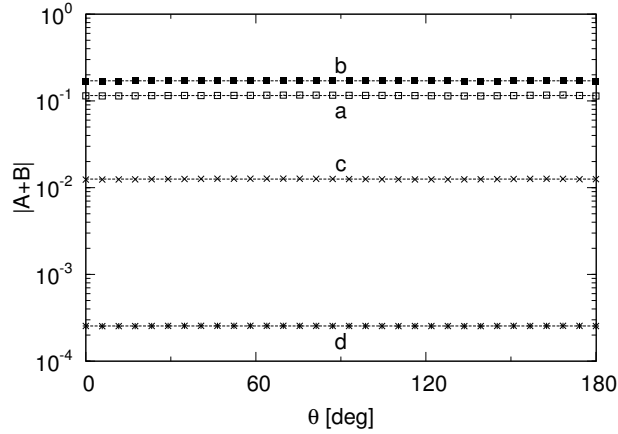
Tabela 3: Optymalne wartości parametrów funkcji falowych w GeV dla rozpadu hybrydy na dwa mezony $J^{PC} = 0^{++}$. Są to wyniki globalnej minimalizacji za pomocą procedury ASA. Minimalizowane było względne standardowe odchylenie od średniej wartości amplitudy, dla parametrów z zakresów danych w tabeli 2. Uzyskane amplitudy są przedstawione na rysunku 8. Liczby zapisane pogrubionym fontem odpowiadają granicy dozwolonego zakresu zmienności parametrów.



Rysunek 9: Amplituda rozpadu hybrydy na dwa skalarnie mezony $J^{PC} = 0^{++}$ w funkcji kąta θ , dla przypadków: a) $\bar{u}GPv$ z $N \neq 1$, b) $\bar{u}GPv$ z $N = 1$, c) $\bar{u}\tilde{G}Pv$ z $N \neq 1$, d) $\bar{u}\tilde{G}Pv$ z $N = 1$, e) $\bar{u}\tilde{G}\tilde{P}v$ z $N \neq 1$, f) $\bar{u}\tilde{G}\tilde{P}v$ z $N = 1$. Wartości parametrów są podane w tabeli 4.

Rys. #	9a	9b	9c	9d	9e	9f
spin	$\bar{u}GPv$	$\bar{u}GPv$	$\bar{u}\tilde{G}Pv$	$\bar{u}\tilde{G}Pv$	$\bar{u}\tilde{G}\tilde{P}v$	$\bar{u}\tilde{G}\tilde{P}v$
N	$N \neq 1$	$N = 1$	$N \neq 1$	$N = 1$	$N \neq 1$	$N = 1$
m_h	1.9	<i>s</i>	<i>s</i>	<i>s</i>	<i>s</i>	<i>s</i>
m_b	1.235	<i>s</i>	<i>s</i>	<i>s</i>	<i>s</i>	<i>s</i>
m_p	0.1375	<i>s</i>	<i>s</i>	<i>s</i>	<i>s</i>	<i>s</i>
m_q	0.17	0.155	0.373	0.1	0.214	0.268
m_g	1.70	1.90	1.82	2.0	1.82	1.46
β_p	0.1	0.1	0.286	0.1	0.211	0.411
β_b	0.321	0.371	0.209	1.23	0.365	0.470
β_{hg}	0.267	0.263	0.565	1.02	0.244	0.434
β_{hq}	4.59	5.73	4.44	8.0	7.60	3.22
λ	2.86	7.98	3.57	8.0	4.11	3.86

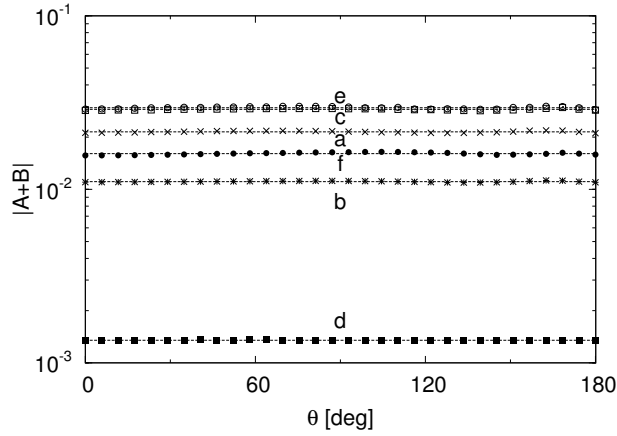
Tabela 4: Optymalne wartości parametrów funkcji falowych w GeV dla rozpadu hybrydy na dwa mezony $J^{PC} = 0^{++}$. Są to wyniki globalnej minimalizacji za pomocą procedury ASA. Minimalizowane było względne standardowe odchylenie od średniej wartości amplitudy, dla parametrów z zakresów danych w tabeli 2. Uzyskane amplitudy są pokazane na rysunku 9. Różne kolumny odpowiadają różnym wyborom alternatywnego czynnika spinowego dla hybrydy. Liczby zapisane pogrubionym fontem odpowiadają granicy dozwolonego zakresu zmienności parametrów.



Rysunek 10: Amplituda rozpadu hybrydy na dwa pseudoskalarne mezony $J^{PC} = 0^{-+}$, o czynnikach spinowych $\bar{u}\gamma^5 v$, w funkcji kąta θ (oznaczenia jak na rysunku 8). Optymalne wartości parametrów funkcji falowych zestawione są w odpowiednio oznaczonych kolumnach tabeli 5.

Fig. #	10a	10b	10c	10d
spin	$\bar{u}\not{z}v$	$\bar{u}\not{z}v$	$\bar{u}GPv$	$\bar{u}GPv$
N	$N \neq 1$	$N = 1$	$N \neq 1$	$N = 1$
m_h	1.9	s	s	s
m_b	1.235	s	s	s
m_p	0.1375	s	s	s
m_q	0.15	0.16	0.18	0.19
m_g	1.08	0.88	1.69	1.79
β_p	0.21	0.25	0.16	0.22
β_b	0.59	0.59	0.42	0.30
β_{hg}	0.59	0.72	0.68	0.47
β_{hq}	2.40	2.62	6.96	6.80
λ	3.97	3.71	2.29	2.39

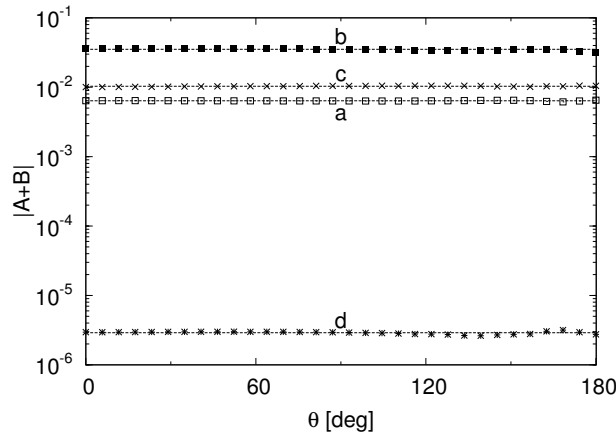
Tabela 5: Optymalne wartości parametrów funkcji falowych (w GeV) dla rozpadu hybrydy na dwa mezony pseudoskalarne $J^{PC} = 0^{-+}$. Są to wyniki minimalizacji globalnej za pomocą procedury ASA. Minimalizowane zostało względne odchylenie standardowe od średniej wartości amplitudy rozpadu, dla parametrów z zakresu podanego w tabeli 2. Amplitudy rozpadu są przedstawione na rysunku 10.



Rysunek 11: Amplituda rozpadu hybrydy na dwa pseudoskalarne mezony $J^{PC} = 0^{-+}$ w funkcji kąta θ , dla przypadków: a) $\bar{u}GPv$ z $N \neq 1$, b) $\bar{u}GPv$ z $N = 1$, c) $\bar{u}\tilde{G}Pv$ z $N \neq 1$, d) $\bar{u}\tilde{G}Pv$ z $N = 1$, e) $\bar{u}\tilde{G}\tilde{P}v$ z $N \neq 1$, f) $\bar{u}\tilde{G}\tilde{P}v$ z $N = 1$. Wartości parametrów podano w tabeli 6.

Rys. #	11a	11b	11c	11d	11e	11f
spin	$\bar{u}GPv$	$\bar{u}GPv$	$\bar{u}\tilde{G}Pv$	$\bar{u}\tilde{G}Pv$	$\bar{u}\tilde{G}\tilde{P}v$	$\bar{u}\tilde{G}\tilde{P}v$
N	$N \neq 1$	$N = 1$	$N \neq 1$	$N = 1$	$N \neq 1$	$N = 1$
m_h	1.9	s	s	s	s	s
m_b	1.235	s	s	s	s	s
m_p	0.1375	s	s	s	s	s
m_q	0.26	0.42	0.29	0.18	0.31	0.31
m_g	1.34	1.85	1.21	1.62	1.22	0.61
β_p	0.21	0.21	0.25	0.19	0.28	0.54
β_b	0.48	0.21	0.59	0.40	0.58	0.56
β_{hg}	0.57	1.40	0.47	0.57	0.43	0.96
β_{hq}	7.53	6.88	7.80	4.75	7.99	4.58
λ	2.26	7.66	2.41	2.71	2.37	2.61

Tabela 6: Optymalne wartości parametrów funkcji falowych (w GeV) dla rozpadu hybrydy na dwa mezony $J^{PC} = 0^{-+}$. Są to wyniki minimalizacji globalnej metodą ASA, dla funkcji minimalizowanej będącej stosunkiem odchylenia standardowego do średniej amplitudy, dla parametrów z zakresu danego w tabeli 2. Odpowiednie amplitudy są przedstawione na rysunku 11.



Rysunek 12: Amplituda rozpadu hybrydy dla rozpadu na dwa skalarne mezony w funkcji kąta θ , jak na rysunku 8. Wartości parametrów są podane w odpowiednich kolumnach tabeli 7; dolne ograniczenie na masę kwarku $m_q \geq 300$ MeV.

W pracy [42] znaleziono dwa zestawy najlepszych wartości parametrów dla dwóch przypadków: jednego z wszystkimi cząstkami składowymi będącymi skalarami, i drugiego z kwarkami o spinie 1/2 i gluonem modelowanym przez cząstkę skalarną. Te zestawy dobrych wartości parametrów charakteryzują się albo lekką, albo ciężką masą kwarków. W obecnych badaniach, uwzględniających spin gluonu, pełny algorytm ASA, który jest metodą minimalizacji globalnej, znajduje tylko jeden najlepszy zestaw wartości parametrów. Znalezione zestawy charakteryzują się małymi masami kwarków m_q i małą szerokością funkcji falowej lekkiego mezonu β_p . Takie małe β_p odpowiada zbyt wielkiemu rozmiarowi mezonu p , pozornie odpowiadającemu zbyt słabemu wiązaniu zbyt lekkich kwarków. Można byłoby zatem wnioskować, że liczba takich lekkich składników nie może być wyłącznie minimalna. Można jednak znaleźć inne minima, jeśli narzucone będą dodatkowe ograniczenia: masa kwarku m_q jest „ciężka”, tzn. większa niż 300 MeV. Inne wartości parametrów pozostają ograniczone do zakresów podanych w tabeli 2.

Przykład takiej minimalizacji z ograniczonym zakresem parametrów dla „ciężkich” efektywnych kwarków konstytuentnych zestawiony został na rysunku 12. Odpowiednie optymalne wartości parametrów są zestawione w tabeli 7. We wszystkich przypadkach, z wyjątkiem przypadku oznaczonego „d”, rozmiar lekkiego mezonu p jest dużo bliższy rozmiarowi prawdziwych mezonów π . Pozwala to wnioskować, że rozmiar lekkiego mezonu może nie stanowić tak wielkiego problemu, jak można byłoby sądzić opierając się na wynikach minimalizacji, gdy zezwoliliśmy aby kwarki mogły być dużo lżejsze niż 300 MeV (przypadek omówiony wcześniej).

3.4 Analiza wyników badania symetrii amplitudy rozpadu hybrydy

Uwzględnienie spinu konstytuentnego gluonu nie zmienia jakościowo otrzymanych wcześniej w [42] wyników dla gluonów skalarnych. Symetria obrotowa jest zachowana gdy szerokość pary kwark–antykwar w przestrzeni pędów, β_{hq} , jest tego samego rzędu co szerokość λ czynnika podobieństwa f_λ w zrenormalizowanym hamil-

Rys. #	12a	12b	12c	12d
spin	$\bar{u}\not{e}v$	$\bar{u}\not{e}v$	$\bar{u}GPv$	$\bar{u}GPv$
N	$N \neq 1$	$N = 1$	$N \neq 1$	$N = 1$
m_h	1.9	s	s	s
m_b	1.235	s	s	s
m_p	0.1375	s	s	s
m_q	0.3	0.459	0.31	0.31
m_g	1.95	1.37	1.90	1.89
β_p	0.211	0.353	0.344	0.1
β_b	0.295	0.722	0.263	0.169
β_{hg}	0.894	0.754	0.450	1.21
β_{hq}	5.83	7.75	7.69	8.0
λ	4.67	7.75	4.44	7.96

Tabela 7: Optymalne wartości parametrów funkcji falowych (w GeV) uzyskane za pomocą globalnej minimalizacji metodą ASA, przy minimalizacji odchylenia standardowego względem średniej amplitudy rozpadu, z wszystkimi parametrami w zakresie podanym w tabeli 2, z wyjątkiem ograniczenia od dołu na masę kwarku $m_q \geq 300$ MeV. Uzyskane amplitudy zestawione są na rysunku 12.

tonianie QCD. Ponadto symetria jest zachowana gdy obydwie te wielkości są rzędu 4-5 GeV, to jest: są dużo większe niż pozostałe parametry modelu. Na podstawie niniejszych badań wielu przypadków uwzględniających spin gluonu na różne sposoby (patrz dodatek D), z różnymi czynnikami spinowymi mezonów, można wnioskować, że wymagana struktura w przestrzeni pędów względnych wydaje się być jakościowo niezależna od spinu cząstek składników hybrydy. Ogólnie, parametry β_{hq} i λ okazują się być około czterokrotnie większe niż pozostałe parametry (patrz tabele 1 i 3– 7). Te wyniki sugerują, że para kwark–antykwarik powinna być mała w przestrzeni położeń w porównaniu z rozmiarem hybrydy. Sugerują one także, że para ta mogłaby pochodzić z gluonu pochodzącego z gluonium zanim oddziaływanie zmieniło jeden z gluonów w parę kwark–antykwarik.

Pewne wątpliwości nasuwać może fakt, że wynik ten został otrzymany przy minimalizacji tylko jednej wielkości w przestrzeni siedmiu parametrów. Wychodzi tutaj jednak na jaw siła narzucania warunku spełnienia ciągłej symetrii w rozsądnych modelach. Szczególna teoria względności dostarcza nieskończenie wielu warunków zamiast tylko jednego, którym w wykonanych badaniach była niezależność amplitudy rozpadu skalarnej hybrydy na skalarne mezony od kąta θ . Było wątpliwe, że jest możliwe osiągnięcie funkcji niezależnej od kąta (nawet w przybliżeniu), zanim dokonane zostały przedstawione tu wyniki badań, uwzględniające czynniki spinowe dla gluonu. Istotnym jest to, że symetria nie może być spełniona w modelu z minimalną liczbą składników, o ile w modelu tym hybryda nie jest zbudowana w szczególny sposób. Ten specjalny sposób budowy stanu hybrydy wygląda inaczej niż można byłoby się spodziewać, przy założeniu, że gluony podążają za kwarkami. Obraz ten nie wydaje się zależny od żadnego konkretnego szczegółu poza ogólnym założeniem, że model z minimalną liczbą składników może przybliżać efektywną dynamikę na froncie świetlnym.

Następnym wnioskiem z badań jest mały rozmiar przestrzenny pary kwark–antykwar. Jest on około 4 do 5 razy mniejszy niż odległość między gluonem a parą. Rozmiar ten jest skorelowany z λ , oba rzędu 3 lub nawet 5 GeV. Pytaniem jest dla jakich wartości λ konstytuenty obraz hybrydy może spełniać wymagania szczególnej teorii względności.

W zasadzie, gdyby równania RGPEP i równania własne na funkcje falowe hadronów były rozwiązane ściśle, uzyskane wielkości fizyczne nie powinny zależeć od λ . Wówczas niezależnie od użytego λ powinniśmy otrzymać sferycznie symetryczną amplitudę rozpadu hybrydy. Wiadome jest jednak, że w celu przybliżenia pełnej dynamiki w teorii z asymptotyczną swobodą, λ powinno mieć wartość około dwa razy większą niż skala opisywanych wartości własnych. Nie możliwe jest jednak obniżenie λ do mniejszych wartości, używając RGPEP w rachunku zaburzeń. W tym przypadku bowiem zrenormalizowany hamiltonian H_λ zawierałby zbyt duże błędy (patrz rozważania w rozdziale 2.3). Zatem skala, którą otrzymujemy z naszego heurystycznego dopasowania jest rozsądna.

Istnieją niewielkie różnice pomiędzy przypadkiem rozpadu na dwa skalarnie, a rozpadem na dwa pseudoskalarnie mezony, oraz pomiędzy wynikami uzyskanymi przy różnym modelowaniu spinu konstytuenty gluonu w hybrydzie. We wszystkich tych przypadkach zwraca jednak uwagę fakt, że β_{hq} jest zawsze tego samego rzędu co λ , oraz że obydwa te parametry są większe niż pozostałe. Inną cechą wspólną jest to, że efektywna masa gluonu, m_g , wydaje się być dużo większa niż efektywna masa kwarku, m_q .

Alternatywny człon spinowy funkcji falowej hybrydy z równania (3.17), lecz z czteropędem masywnego gluonu, daje minima z dużo mniejszą amplitudą rozpadu \mathcal{A} niż najprostsza możliwa postać czynnika spinowego (3.14). Ten rezultat wskazuje, że należy być bardzo ostrożnym w wyborze metody uwzględniania spinu gluonu przy tworzeniu modelu.

Należy podkreślić, że w przedstawionych obliczeniach bezwzględna wartość amplitudy rozpadu hybrydy nie jest w pełni kontrolowana. Wynika to stąd, że nie zostały w nich uwzględnione dynamiczne więzy pomiędzy stałą sprzężenia g_λ (siłą oddziaływania), parametrem λ procedury grupy renormalizacji RGPEP i parametrami funkcji falowych.

Wyjaśnienia wymaga fakt zmniejszania się amplitudy rozpadu przy przejściu do parametrów, dla których symetria jest zachowana. Kiedy jeden z parametrów funkcji falowej zmienia się od zestawu wartości podanych w pierwszej kolumnie tabeli 1, do zestawu wartości narzuconych przez wymaganie symetrii obrotowej, jak w kolumnach 2–5 w tabeli 1, lub wartości w tabelach 3–7, wówczas wielkość amplitudy rozpadu zmienia się od wartości 0.9 do 0.1 (na rysunkach 3–6) do dużo mniejszych wartości 10^{-2} lub 10^{-3} (na rysunku 7), lub 10^{-2} do 10^{-4} (na rysunkach 8 to 12).

Są to znaczące zmiany wielkości amplitudy rozpadu. Jest mało prawdopodobne, aby stała sprzężenia zmieniała się tak bardzo by skompensować tę zmianę. Sądzić należy, że zmiana ta jest tak duża wyłącznie ze względu na relatywistyczny ruch lekkiego mezonu, będącego produktem rozpadu hybrydy. Jeśli mezony powstałe z rozpadu hybrydy są powolne, symetria obrotowa w naszym modelu jest zachowana bardzo dokładnie. Zachodzi to nawet dla typowych, standardowych wartości parametrów, których przykładem jest pierwsza kolumna tabeli 1. Nasuwa się zatem wniosek, że

relatywistyczny rozpad hybrydy (zawierający szybki mezon p) może być zależny od relatywistycznych efektów, których nie widać w przypadku nierelatywistycznej fenomenologii.

Celowe jest również omówienie zaobserwowanej prawidłowości, że minima dla przypadku czynnika spinowego hybrydy danego równaniem (3.17) są węższe niż w przypadku równania (3.14). Jeśli zakres parametrów, dla których symetria obrotowa jest spełniona, jest bardzo wąski, rozważania symetrii same w sobie stają się ważnym źródłem informacji na temat doboru ich wartości (nawet jeśli dynamiczne równania trudno rozwiązać z porównywalną dokładnością). Konsekwencją jest bardzo ściśle kryterium spełniania symetrii relatywistycznych, którego można używać do oceny modeli.

Prosty model opisany w tej pracy sugeruje, że parametry funkcji falowych dla cząstek biorących udział w relatywistycznym rozpadzie hybrydy muszą być silnie skorelowane. Ta korelacja jest konieczna, aby amplituda rozpadu spełniała wymagania szczególnej teorii względności. W prowadzonych obliczeniach, dzięki użyciu dynamiki na froncie świetlnym, symetria ze względu na pchnięcia jest spełniona dokładnie, a parametry funkcji falowych są ograniczone przez wymaganie symetrii obrotowej. W rozważanych przykładach parametry przybierają wartości, które nie odpowiadają obrazowi opartemu na intuicji nierelatywistycznej, że gluon znajduje się głównie pomiędzy dwoma kwarkami. *Zamiast tego relatywistyczny obraz efektywnych składników (konstytuentów) prowadzi w prawie uniwersalny sposób do struktury, w której ciężki gluon towarzyszy parze kwark–antykwarck o małych rozmiarach.*

Jest to niespodziewany, zaskakujący wynik. Sugeruje on, że obraz z gluonami grającymi rolę struny pomiędzy względnie ciężkimi kwarkami może nie być tak realistyczny, jak można byłoby oczekiwać korzystając z intuicji nierelatywistycznej.

Alternatywna struktura hybrydy pojawia się w szerokim zakresie przypadków różniących się czynnikami spinowymi dla gluonów i kwarków. Jednakże wymagania symetrii relatywistycznej okazują się mocno ograniczające, jeśli założymy, że tylko sektory z najmniejszą liczbą cząstek są ważne. Wnioskujemy zatem, że przy rozważaniu dynamiki konstytuentnych cząstek efektywnych w QCD powinny zawsze być uwzględniane więzy szczególnej teorii względności. Te więzy okazują się zdolne do zmiany rozumienia hadronów ze znaczącym wkładem gluonowym. Nie musi bowiem być tak, jak gdyby gluony były po prostu dodane do kwarków i antykwarków. Może być tak, że gluony dominują w dynamice hybryd i zmuszają kwarki do podążania za nimi.

Parametry funkcji falowych, które znajdujemy przez wymaganie spełniania symetrii obrotowej amplitudy rozpadu modelowej hybrydy, mogą okazać się niewłaściwe gdy uwzględnimy w analizie dynamikę cząstek. Może się okazać, że przybliżenie, iż wystarczy użyć sektorów Focka z najmniejszą możliwą liczbą cząstek nie jest poprawne. Jest natomiast jasne, że więzy szczególnej teorii względności nie mogą być ignorowane w poszukiwaniu wiodącego obrazu konstytuentnego.

Dyskusja przedstawiona tutaj jest ograniczona (dla prostoty) do hybryd $J^{PC} = 0^{++}$, podczas gdy najbardziej interesującą z praktycznego punktu widzenia jest struktura hybryd o egzotycznych liczbach kwantowych (liczbach kwantowych, które nie mogą być uzyskane przez zwykłe mezony). Aby modelować taką egzotyczną hybrydę, w przyszłych obliczeniach można byłoby zmienić czynniki w funkcjach fa-

lowych hybrydy. Na przykład można byłoby zamienić kolorowe pole elektryczne na kolorowe pole magnetyczne, albo wprowadzić funkcje falowe stanu P . Proste użycie fali P dla gluonu (dodając czynnik \vec{k}_g w funkcji falowej hybrydy) zmienia rozważany stan hybrydy do egzotycznego mezonu hybrydowego o liczbach kwantowych $J^{PC} = 1^{-+}$, najbardziej interesującego doświadczalnie. W takich modelach amplituda rozpadu wyliczona w schemacie na froncie świetlnym powinna dawać wymaganą zależność od kąta w układzie środka masy egzotycznej hybrydy.

Otrzymany z analizy symetrii relatywistycznych amplitudy rozpadu obraz hybrydy, z rozmiarem pary kwark–antykwarik rzędu odwrotności szerokości λ hamiltonianu efektywnego, sugeruje, że para kwark–antykwarik mogłaby pochodzić z rozpadu jednego z gluonów konstytuencyjnych w gluonium (zob. rysunek 13 na 40 stronie). Nasuwa się wniosek, że odległość pomiędzy wspomnianą parą a gluonem w hybrydzie, reprezentowana przez β_{hg} , byłaby rzędu odległości między gluonami w stanie gluon–gluon, reprezentowanej przez β_{gg} . W naturalny sposób rozpad jednego z gluonów w stanie $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ na parę kwark–antykwarik za pomocą oddziaływania o szerokości λ dawałby szerokość β_{hq} tej pary także rzędu λ . Parametr λ , będąc parametrem grupy renormalizacji dla hamiltonianu efektywnego, powinien być rzędu wielokrotności energii rozważanych stanów. Pozwoliłoby to otrzymać ustalone wartości parametrów, co daje uzasadnienie, że λ powinno być rzędu 3-5 GeV.

Rozszerzając analizę wyników należy jednak zauważyć, że mieszanie stanu $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ ze stanem $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ może zachodzić tylko jeśli kwark i antykwarik w hybrydzie mają ten sam zapach i mogą anihilować tworząc gluon, czyli dla hybrydy będącej skalarem izospinowym. Nasuwa się pytanie, jak się rozpada na dwa mezony hybryda nie będąca izoskalarem. Obliczenia dla różnych stanów izospinowych sprowadzają się do podstawienia odpowiedniego czynnika izospinowego I_x , co daje odpowiedni czynnik numeryczny dla amplitud A i B .

I tak, na przykład, hybryda będąca składową neutralną izowektora może rozpaść się na dwa mezony, z których jeden jest izoskalarem a drugi także składową neutralną izowektora. Zatem mogą istnieć mezony hybrydowe o niezerowym całkowitym izospinie, które rozpadają się na dwa mezony, ale nie sprzęgają się do stanu gluon–gluon.

4 Dynamika mieszania hybrydy z innymi sektorami przestrzeni Focka

Wymaganie, aby amplituda rozpadu hybrydy na dwa mezony spełniała relatywistyczne warunki symetrii, wymusza w rozważanych w tej pracy modelach nietypowy kształt funkcji falowej hybrydy. Szerokość pary kwark–antykwarik β_{hq} w przestrzeni pędów jest rzędu szerokości λ czynnika podobieństwa w hamiltonianie efektywnym,

$$\beta_{hq} \simeq \lambda \quad (4.1)$$

przy λ rzędu 5 GeV: patrz tabele 1, 3–7. Oznacza to małą w przestrzeni położeniowej, tzn. ciasno związaną parę kwark–antykwarik, która razem z gluonem krąży wokół wspólnego środka. W typowym modelu hybrydy wartości β_{hq} i β_{hg} są tego samego rzędu [13, 15], lub gluon (bądź wzbudzenie gluonowe) występuje pomiędzy kwarkiem i antykwarikiem [22, 29].

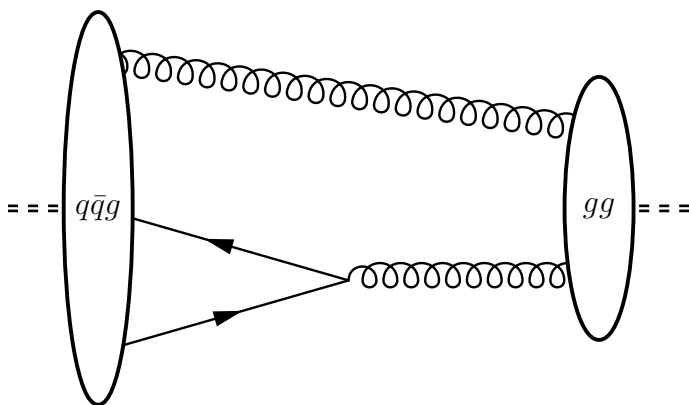
W niniejszej pracy wymaganie nietypowego kształtu hybrydy otrzymane zostało z jej relatywistycznego rozpadu. Oznacza to, że przynajmniej jeden z mezonów porusza się z relatywistycznymi prędkościami. Jest to przypadek, który zachodzi dużo powyżej progu rozpadu. Rozpad nierelatywistyczny, na progu rozpadu, gdzie mezony są ciężkie i poruszają się z niewielkimi prędkościami, nie narzuca szczególnych wymagań na parametry funkcji falowej hybrydy. W obliczeniach założono także, iż rozpad daje się opisać za pomocą stanów o najmniejszej możliwej liczbie efektywnych cząstek konstytuentnych (założenie możliwe dzięki użyciu metody renormalizacji dla cząstek efektywnych). Ponadto w jakościowych obliczeniach w niniejszej pracy założono, że stany hybrydy i mezonów, na które hybryda się rozpada, dają się opisać prostymi stanami gaussowskimi. Amplituda rozpadu była wyliczana przy założeniu, że rozpad ten daje się opisać w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń dla hamiltonianu efektywnego w RGPEP.

Powstaje pytanie jaki mógłby być dynamiczny mechanizm powstawania takiego nietypowego kształtu funkcji falowej hybrydy.

Otrzymany z analizy symetrii relatywistycznych amplitudy obraz hybrydy sugeruje, że para kwark–antykwarik w hybrydzie mogłaby pochodzić z rozpadu jednego z gluonów konstytuentnych w stanie $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ za pośrednictwem członu $H_{I\lambda}$ w hamiltonianie efektywnym, zobacz rysunek 13. Człon $H_{I\lambda}$ zawiera czynnik podobieństwa o szerokości λ .

Na rysunku 13 widać, że gdy oddziaływanie mieszające stan $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ ze stanem $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ jest przybliżone przez $H_{IQCD\lambda}$ z RGPEP, to człon oddziaływania wprowadza czynnik f_λ do funkcji falowej składowej $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$. Można więc przypuszczać, że takie mieszanie prowadzi do kształtu hybrydy z $\beta_{hq} \simeq \lambda$.

Nasuwa się również wniosek, że odległość pomiędzy parą $q_\lambda \bar{q}_\lambda$ a gluonem w stanie $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$, reprezentowana przez β_{hg} , byłaby rzędu odległości między gluonami w stanie $|g_\lambda g_\lambda\rangle$, reprezentowanej przez β_{gg} . W naturalny sposób rozpad jednego z gluonów w stanie $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ na parę kwark–antykwarik za pomocą oddziaływania o szerokości λ dawałby szerokość β_{hq} tej pary także rzędu λ . Parametr λ , będąc parametrem renormalizacji hamiltonianu efektywnego, powinien być rzędu mas i energii rozważanych stanów [53, 35, 36] aby móc zastosować metodę wycinania „okna” w hamiltonianie



Rysunek 13: Mieszanie stanu złożonego z kwarku, antykwarku i gluonu (podstawowego składnika hybrydy) ze stanem gluon – gluon (podstawowy składnik gluonium). Mieszanie zachodzi za pomocą rozpadu jednego z gluonów w stanie gluon – gluon na parę kwark – antykwark. Wierzchołek oddziaływania był wyliczony w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń grupy renormalizacji w QCD na froncie świetlnym dla $\lambda \sim 3 - 5$ GeV.

efektywnym (rozdział 2.3), co w rozważanym przypadku oznacza możliwość stosowania przybliżenia minimalnej liczby cząstek. Daje to uzasadnienie, że λ powinno być rzędu 3-5 GeV.

Można postawić pytanie, czy taki prosty obraz dynamicznego uzasadnienia obrazu hybrydy opisanego w części 3 znajduje potwierdzenie w obliczeniach. W tym celu należy zbadać jaki wpływ na funkcję falową hybrydy ma mieszanie stanu kwark–antykwark–gluon ze stanem gluon–gluon.

Jakościowy obraz hybrydy, uzyskany z obliczeń przedstawionych w części 3, nie zależy od przyjętego sposobu uwzględniania spinu gluonu ani spinów kwarków. Nie zależy nawet od tego czy spin jest uwzględniony [43]. W pierwszym przybliżeniu wystarczy więc zbadać mieszanie stanu $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ ze stanem $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ dla kwarków i gluonów reprezentowanych przez cząstki skalarne. Na tym przybliżeniu skupiamy się w tej pracy.

To uproszczenie pozwala uniknąć trudności związanych z czynnikami spinowymi w funkcjach falowych, w tym szczegółów ich zależności od pędów. Należało jednak zachować w pamięci istnienie w wyjściowej lokalnej teorii kanonicznej rozbieżności ultrafioletowych powodowanych zależnością czynników spinowych od pędu, usuwanego czynnikiem f_λ . Po uproszczeniu czynników spinowych efekty związane z tymi czynnikami będą musiały być uwzględnione za pomocą dodatkowych czynników zależnych od pędu, zachowujących rolę f_λ .

4.1 Zagadnienie mieszania różnych sektorów Focka

Aby zbadać, jaki wpływ na funkcje falową hybrydy ma mieszanie stanu kwark–antykwark–gluon ze stanem gluon–gluon, należy rozwiązać zagadnienie własne dla zrenormalizowanego hamiltonianu $H_{\text{QCD}\lambda}$ ograniczone do wymienionych sektorów Focka

$$H_{\text{QCD}\lambda}|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle, \quad (4.2)$$

lub przynajmniej znaleźć przybliżone rozwiązanie modelu tego sektora w QCD. Zakłada się, że dzięki temu, że używana jest procedura grupy renormalizacji za pomocą transformacji podobieństwa, można zagadnienie mieszania różnych sektorów Focka rozwiązywać w pierwszym przybliżeniu po prostu za pomocą wycięcia „okna” złożonego tylko z tych dwóch sektorów Focka (patrz rozdział 2.3).

W formie dynamiki na froncie świetlnym rolę hamiltonianu pełni składowa \mathcal{P}^- operatora pędu. Pozostałe składowe operatora pędu są kinematyczne, tzn. nie zależą od oddziaływania. Na froncie świetlnym hamiltonian jest powiązany z operatorem $\hat{\mathcal{M}}^2$ masy niezmienniczej danym jako kwadrat operatora pędu: $\hat{\mathcal{P}}^\mu \hat{\mathcal{P}}_\mu = \hat{\mathcal{M}}^2$:

$$\hat{\mathcal{P}}^- = \frac{\hat{\mathcal{P}}^{\perp 2} + \hat{\mathcal{M}}^2}{\mathcal{P}^+}. \quad (4.3)$$

Kiedy rozpatruje się zbiór stanów o ustalonych wartościach własnych P^+ i P^\perp , jak widać z równania (4.3) stany własne P^- mają ustaloną wartość M^2 . Wartości własne P^+ i P^\perp można wyeliminować z równania na wartość własna P^- , otrzymując równanie własne na M^2 .

$$\hat{\mathcal{M}}^2 |\Psi\rangle = M^2 |\Psi\rangle. \quad (4.4)$$

W układzie środka masy całkowity pęd prostopadły jest równy zero, a pęd P^+ jest stały i dany przez M , czyli masę hybrydy (w wierzchołku oddziaływania zachowane są składowa p^+ i p^\perp). W równaniu własnym dla M^2 na funkcje falowe stanu $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ oraz $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ występują tylko pędy względne.

4.2 Ściśle rozwiązywalny model mieszania stanów o różnej liczbie cząstek

Ponieważ nie istnieje ściśle rozwiązanie zagadnienia stanów związanych w QCD, ani tym bardziej zagadnienia mieszania pomiędzy stanami związanymi (jak np. pomiędzy stanem kwark–antykwar–gluon a stanem gluon–gluon), konieczne było zastosowanie obliczeń przybliżonych. Aby wstępnie oszacować własności i konsekwencje sprzężenia między składowymi hybrydy, użyty został ściśle rozwiązywalny model matematyczny mieszania stanów $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ z $|g_\lambda g_\lambda\rangle$. Ściśle rozwiązanie uproszczonego modelu matematycznego pomaga w analizie rozwiązań otrzymanych numerycznie w bardziej realistycznych modelach.

W celu otrzymania ściśle rozwiązywalnego i prostego do analizy modelu założono, że oddziaływanie, które jest odpowiedzialne za mieszanie pomiędzy stanami reprezentującymi $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ z $|g_\lambda g_\lambda\rangle$, wybrano w postaci separowalnej. Taka postać członu mieszania została wybrana ze względu na to, że rozwiązanie modeli z użyciem rozwiązań separowalnych jest proste. Oddziaływania bardziej ogólnego typu dają się przybliżać za pomocą sumy oddziaływań separowalnych.

Punktem wyjścia był model, w którym stan $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ reprezentowany jest przez stan „zerocząstkowy” (stała razy stan próżni), zaś stan $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ przez stan jednocząstkowy (ruch względny q_λ i \bar{q}_λ w parze).

Operator masy niezmienniczej tego modelu dla wymiaru d (gdzie d wynosi 1, 2 lub 3), zapisany za pomocą operatorów rzutowych na stan jednocząstkowy $|k\rangle$ o pędzie

k , oraz operatorów rzutowych na zerocząstkowy stan próżni $|\Omega\rangle$, ma postać:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{M}}^2 = & \int [k] 4(m^2 + k^2) |k\rangle\langle k| + \frac{gm_Y}{m_I^{d-2}} \int [k] f(k) (|k\rangle\langle\Omega| + |\Omega\rangle\langle k|) \\ & - \frac{\alpha}{m_\alpha^{d-2}} \int [kk'] h(k)h(k') (|k'\rangle\langle k| + |k\rangle\langle k'|) + m_g^2 |\Omega\rangle\langle\Omega| \end{aligned} \quad (4.5)$$

Symbol $[k]$ oznacza w tym wzorze niezmienniczą miarę całkowania po pędach. Pęd k odpowiada w tym modelu pędowi względnemu w układzie $\bar{q}q$, czyli k_{hq} .

Wybór operatora $\hat{\mathcal{M}}^2$ upraszcza postać równania własnego, oraz pozwala na wyciągnięcie wniosków dotyczących zarówno obliczeń w dynamice na froncie świetlnym, jak i dla obliczeń równoczesowych.

Równanie własne

$$\hat{\mathcal{M}}^2|\Psi\rangle = M^2|\Psi\rangle \quad (4.6)$$

w tym modelu odpowiada równaniu własnemu operatora masy niezmienniczej dla zagadnienia mieszania stanu kwark–antykwar–gluon ze stanem gluon–gluon.

Czynnik m_Y w członie mieszania jest potrzebny aby zgadzały się wymiary masowe. Czynniki m_I^{2-d} oraz m_α^{2-d} (zależne od wymiaru) potrzebne są natomiast, aby współczynniki α i g były bezwymiarowe. Dla uproszczenia założono, że $m_\alpha = m_I = m$. Oddziaływanie wewnątrz stanu jednocząstkowego $V(k, k') = h(k)h(k')$ jest oddziaływaniem separowalnym.

Badany stan jest superpozycją stanów 1- i 0-cząstkowych.

$$|\Psi\rangle = \int [k] \psi(k) |k\rangle + \phi |\Omega\rangle. \quad (4.7)$$

Modeluje on stan zbudowany z sektorów $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ (modelowany przez stan 1-cząstkowy w tym modelu) i $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ (modelowany przez stan 0-cząstkowy).

Równanie własne (4.6) ma następującą postać:

$$\begin{bmatrix} 4(m^2 + k^2) - \alpha' \int [k'] h(k)h(k') & g' m_Y f(k) \\ g' m_Y \int [k'] f(k') & m_g^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi(k) \\ \phi \end{bmatrix} = M^2 \begin{bmatrix} \psi(k) \\ \phi \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Dla skrócenia zapisu wprowadzono oznaczenia $\alpha' = \alpha/m_\alpha^{d-2}$, $g' = g/m_I^{d-2}$. Powyższe równanie własne zapisane jako układ równań ma postać:

$$4(m^2 + k^2)\psi(k) - \alpha' \int [k'] h(k)h(k')\psi(k') + g' m_Y f(k)\phi = M^2\psi(k) \quad (4.9a)$$

$$g' m_Y \int [k'] f(k')\psi(k') + m_g^2\phi = M^2\phi \quad (4.9b)$$

Z równania (4.9b) wyliczyć można składową zerocząstkową ϕ

$$\phi = -\frac{g' m_Y}{m_g^2 - M^2} \int [k'] f(k')\psi(k') \quad (4.10)$$

Podstawiając ten wynik do równania w (4.9a), dostaje się następujące wyrażenie na $\psi(k)$

$$\psi(k) = \frac{1}{4(k^2 + m^2) - M^2} \left[\alpha' h(k) \int [k'] h(k') \psi(k') + \frac{g'^2 m_Y^2}{m_g^2 - M^2} f(k) \int [k'] f(k') \psi(k') \right]. \quad (4.11)$$

Zakładamy, że funkcje $h(k)$ i $f(k)$ są takie, że całki występujące w tym równaniu dają skończone wyniki, oznaczone odpowiednio

$$H = \int [k] h(k) \psi(k), \quad (4.12a)$$

$$F = \int [k] f(k) \psi(k). \quad (4.12b)$$

Podstawienie wyrażenia (4.11) na $\psi(k)$ do układu równań (4.9) daje następujące warunki samozgodności na stałe F i H :

$$H = \alpha H I_{hh} + \xi F I_{fh}, \quad (4.13a)$$

$$F = \alpha H I_{fh} + \xi F I_{ff}, \quad (4.13b)$$

gdzie wprowadzone zostało oznaczenie

$$\xi = \frac{g^2 m_Y^2}{m_g^2 - M^2}. \quad (4.14)$$

Symbole I_{ff} , I_{fh} oraz I_{hh} oznaczają odpowiednio całki

$$I_{hh} = m^{2-d} \int [k] \frac{h^2(k)}{4(k^2 + m^2) - M^2}, \quad (4.15a)$$

$$I_{ff} = m^{2-d} \int [k] \frac{f^2(k)}{4(k^2 + m^2) - M^2}, \quad (4.15b)$$

$$I_{fh} = m^{2-d} \int [k] \frac{f(k)h(k)}{4(k^2 + m^2) - M^2}. \quad (4.15c)$$

Wymaganie by istniało rozwiązanie na F i H (skończone i nie równe tożsamościowo zero) sprowadza się do warunku na M^2 , czyli na masę własną rozwiązania. Wymaganie to można zapisać w postaci

$$1 = \alpha I_{hh} + \xi I_{ff} - \alpha \xi (I_{ff} I_{hh} - I_{fh}^2). \quad (4.16)$$

Należy pamiętać, że wielkość ξ zdefiniowana w (4.14) oraz wielkości I_{ff} , I_{fh} i I_{hh} zdefiniowane w (4.15) zależą od M^2 . Równanie (4.16) to skomplikowane nieliniowe równanie własne, którego rozwiązanie można znajdować numerycznie. Można też zauważyć, że przy założeniu $m_g > 2m$ oraz założeniu dodatniości parametrów równanie to ma tylko jeden pierwiastek.

Po znalezieniu masy własnej M^2 , będącej rozwiązaniem (4.16), należy wstawić ją do równań (4.13) na stałe F i H . Równania (4.13) są jednorodnie (dla M^2 będącej rozwiązaniem równania własnego) i nie wyznaczają wielkości F i H , a jedynie ich stosunek. Za pomocą tego układu równań można wyrazić jedną z tych stałych przez drugą i wstawić do równania (4.11) na funkcję falową $\psi(k)$ w stanie własnym (4.7). Wartość odpowiedniej stałej (F lub H) znajduje się z warunku normalizacji stanu $|\Psi\rangle$.

Jedną z możliwości wyrażenia $\psi(k)$ (równoważnych dla M spełniającego równanie (4.16)) jest

$$\psi(k) = \left[\alpha \frac{1 - \xi I_{ff}}{\alpha I_{fh}} h(k) + \xi f(k) \right] \frac{F}{4(k^2 + m^2) - M^2}. \quad (4.17)$$

Podstawiając ten wynik do wzoru (4.10) na ϕ , dostaje się

$$\phi = -\frac{g' m_Y}{m_g^2 - M^2} F. \quad (4.18)$$

Warunek na normalizację stanu $|\Psi\rangle$ daje równanie na stałą F :

$$\begin{aligned} 1 &= \langle \Psi | \Psi \rangle \\ &= \frac{\xi}{m_g^2 - M^2} F^2 + \left[\left(\frac{1 - \xi I_{ff}}{I_{fh}} \right)^2 J_{hh} + \xi^2 J_{ff} + 2\xi \frac{1 - \xi I_{ff}}{I_{fh}} J_{fh} \right] F^2, \end{aligned} \quad (4.19)$$

gdzie J_{hh} , J_{ff} , J_{fh} są zdefiniowane jako

$$J_{hh} = m^{2-d} \int [k] \frac{h^2(k)}{[4(k^2 + m^2) - M^2]^2}, \quad (4.20a)$$

$$J_{ff} = m^{2-d} \int [k] \frac{f^2(k)}{[4(k^2 + m^2) - M^2]^2}, \quad (4.20b)$$

$$J_{fh} = m^{2-d} \int [k] \frac{f(k)h(k)}{[4(k^2 + m^2) - M^2]^2}. \quad (4.20c)$$

Całki typu J_{fh} różnią się od całek typu I_{fh} we wzorach (4.15) potęgami mianownika energetycznego.

Dla uproszczenia dalszej analizy założono, że funkcje $h(k)$ i $f(k)$ są tego samego kształtu, to znaczy że są dane takim samym wzorem, ale różnią się tylko parametrem szerokości. Szerokość funkcji $h(x)$, która opisuje stan związany 1-cząstkowy w tym modelu, oznaczona została przez β_{hq} , bo odpowiada β_{hq} szerokości stanu bazowego w stanie $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ w mieszanii sektorów Focka w QCD. Szerokość funkcji $f(k)$, która opisuje szerokość wierzchołka mieszania stanu 1-cząstkowego i 0-cząstkowego w tym modelu, oznaczona została przez λ , bo odpowiada szerokości czynnika podobieństwa λ w zrenormalizowanym hamiltonianie QCD.

Rozważane były następujące postaci funkcji $h(k)$ (funkcja $f(k)$ dana jest takim

samym wzorem jak $h(k)$, tylko z β_{hq} zastąpionym przez λ):

$$h(k) = \Theta(\beta_{hq} - k) \quad (4.21a)$$

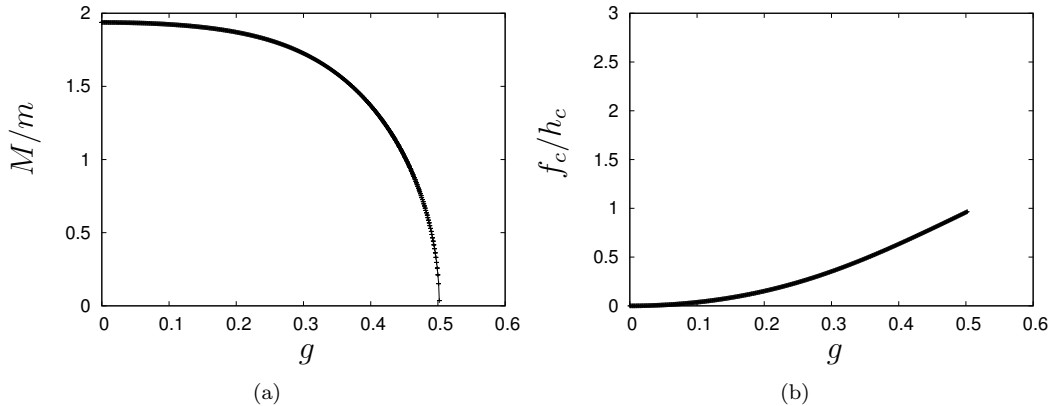
$$h(k) = \frac{\beta_{hq}^2}{\beta_{hq}^2 + k^2} \quad (4.21b)$$

$$h(k) = \exp\left[-\frac{k^2}{2\beta_{hq}^2}\right] \quad (4.21c)$$

Dla wszystkich tych postaci wartości I_{hh} , I_{fh} oraz I_{ff} dają się wyliczyć analitycznie. Rozwiązanie (4.11) na funkcję falową $\psi(k)$ można przedstawić jako

$$\psi(k) = [h_c h(k) + f_c f(k)] \frac{C}{4(k^2 + m^2) - M^2}, \quad (4.22)$$

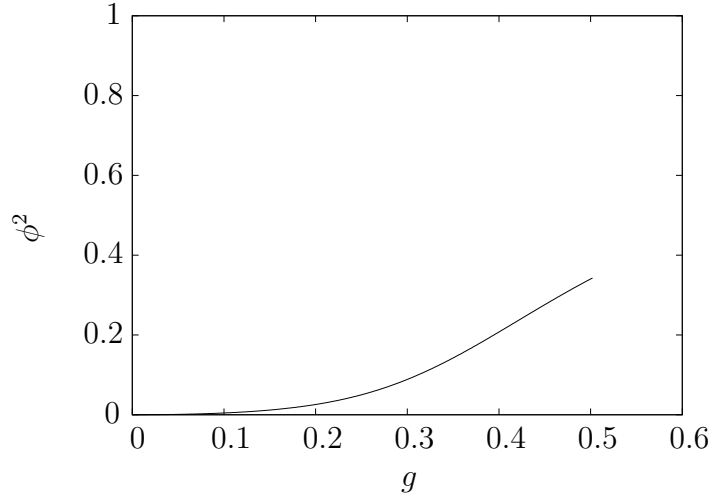
gdzie C jest stałą normalizacji. Wyrażenie to mówi, że otrzymana funkcja falowa $\psi(k)$ jest kombinacją funkcji $h(k)$ o szerokości β_{hq} , i funkcji $f(k)$ o szerokości λ . Wnioskować stąd można, że wynik mieszania sektorów $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ i $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ w modelowym hamiltonianie inspirowanym przez zrenormalizowany hamiltonian QCD będzie zawierał składową o szerokości β_{hq} , odpowiadającą szerokości potencjału ω_{hq} , oraz składową o szerokości czynnika podobieństwa, λ . Wniosek ten jest zgodny z oczekiwaniami na podstawie znajomości rachunku zaburzeń dla stanów związanych w mechanice kwantowej, gdy stała g jest bardzo mała (g oznacza g_λ).



Rysunek 14: Wykres zależności wartości własnej M , będącej rozwiązaniem równania (4.16) (wykres po lewej stronie, oznaczony (a)), oraz wykres zależności stosunku f_c/h_c z równania (4.22) (wykres po prawej stronie, oznaczony (b)) od parametru g (stałej sprzężenia odpowiedzialnej za mieszanie) dla $m = 0.3$ GeV, $m_g = 1.2$ GeV, $\beta_{hq} = 1.0$ GeV, $\lambda = 5.0$ GeV, $\alpha = 0.3$, $m_Y = 1.0$ GeV.

Na wykresach na rysunku 14 widać, że ze wzrostem g maleje M , aż do $M = 0$ dla g_c . Ze wzrostem g rośnie też w przybliżeniu liniowo stosunek f_c/h_c , czyli stosunek współczynnika przy $f(k)$ do współczynnika przy $h(k)$ w $\psi(k)$, patrz oznaczenia (4.22). Prawy wykres na rysunku 14 urywa się gdy g dochodzi do wartości dla której $M^2 = 0$.

Spodziewamy się, że podobna zależność zachodzi także dla superpozycji stanu $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ z $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ w QCD, bo oba problemy własne są jakościowo podobne, chociaż różnią się wieloma szczegółami. Wraz ze wzrostem g rośnie wkład składowej o szerokości λ (a zatem rośnie efektywna szerokość stanu β_{hq}^{eff}).



Rysunek 15: Wykres zależności znormalizowanej wartości ϕ^2 ze wzoru (4.7) (odpowiednika prawdopodobieństwa P_{gg} stanu $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ w hybrydzie) od parametru g dla $m = 0.3$ GeV, $m_g = 1.2$ GeV, $\beta_{hq} = 1.0$ GeV, $\lambda = 5.0$ GeV, $\alpha = 0.3$, $m_Y = 1.0$ GeV.

Na wykresie z rysunku 15 widać, że ze wzrostem g (i ze wzrostem stosunku f_c/h_c , jak widać na rysunku 14(b)) rośnie wkład składowej o mniejszej liczbie cząstek (rośnie ϕ^2 ze wzoru (4.7)). Wkład składowej sektora 1–cząstkowego, czyli odpowiadającego stanowi $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$, określony jest stosunkiem $\|\phi(k)\|^2/\|\Psi\|^2$. Stosunek ten maleje od 1 dla $g = 0$, przy braku mieszania, zbliżając się w okolice $1/2$ dla g dla którego $M^2 = 0$.

Otrzymujemy wniosek, że zwiększenie wkładu składnika o szerokości λ , zawierającego $f(k)$, do funkcji falowej stanu 1–cząstkowego, odpowiadającego stanowi $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$, okupione jest zwiększeniem prawdopodobieństwa sektora 0–cząstkowego, odpowiadającego stanowi $|g_\lambda g_\lambda\rangle$, w stanie będącym wynikiem mieszania sektorów. Można wysunąć wniosek, że fakt ten jest uniwersalny w klasie modeli mieszania sektorów o różnej liczbie cząstek za pomocą oddziaływania o szerokości λ . Oznaczałoby to, że dla dynamicznego mieszania sektora $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ z sektorem $|g_\lambda g_\lambda\rangle$, zwiększenie efektywnej szerokości β_{hq} sektora $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ do wielkości λ oznacza także zwiększenie prawdopodobieństwa P_{gg} sektora $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ w stanie hybrydy, będącym wynikiem podobnego mieszania dynamicznego.

Na podstawie tego prostego modelu oddziaływania stanów o różnych liczbach cząstek, rozwiązywalnego analitycznie, można spodziewać się, że w wyniku mieszania stanu $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ ze stanem $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ za pomocą oddziaływania $H_{IQCD\lambda}$, stan hybrydy uzyska domieszkę składowej o szerokości λ , tzn. takiej samej jak szerokość pędu czynnika podobieństwa. Okupione to będzie jednak zwiększonym prawdopodobieństwem składowej $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ w tym stanie.

4.3 Hamiltoniany efektywne w sektorach $q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda$ i $g_\lambda g_\lambda$

Do analizy mieszania stanu $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ ze stanem $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ potrzeba, oprócz członu rozpadu gluonu na parę kwark–antykwar (identycznego jak w analizie rozpadu hybrydy na dwa mezony), także znajomości członów wiążących w hamiltonianie. Procedura grupy renormalizacji dla cząstek efektywnych umożliwia powiązanie członu odpowiedzialnego za rozpad oraz członu odpowiedzialnego za wiązanie (tzn. za istnienie i postać cząstek takich jak hybryda czy gluonium) z członem oddziaływania $H_{IQCD\lambda}$ w hamiltonianie QCD. Przykłady wyprowadzeń efektywnych oddziaływań za pomocą procedury RGPEP są znane dla teorii Yanga–Millsa [33], oraz dla przypadku ciężkiego (nierelatywistycznego) kwarkonium [54, 55, 56]. Nie istnieją jednak obliczenia efektywnego potencjału wiążącego w pełnej teorii dla przypadku relatywistycznego kwarku, antykwarku i gluonu.

Obliczenia mieszania ograniczają się do przybliżenia, polegającego na ograniczeniu do minimalnej liczby jawnie uwzględnionych sektorów Focka. Uwzględniono sektor Focka złożony ze stanów $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ w singlcie kolorowym, oraz sektor złożony ze stanów $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ także w singlcie kolorowym.

Dla cząstek skalarnych (dla przypadku, gdy gluony i kwarki są reprezentowane przez cząstki skalarne) człon odpowiedzialny za mieszanie stanu $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ ze stanem $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ w hamiltonianie efektywnym dany jest wyrażeniem

$$V_{q\bar{q}g} = g \int [123] f_\lambda(12, 3) (b_1^\dagger d_2^\dagger a_3 + h.c.) \quad (4.23)$$

gdzie f_λ jest czynnikiem podobieństwa w procedurze grupy renormalizacji dla hamiltonianów. Jest to ten sam człon jaki użyty był przy analizie amplitudy rozpadu hybrydy na mezony, przy założeniu, że gluony i kwarki są reprezentowane za pomocą cząstek skalarnych [42].

Obliczenie efektywnego Hamiltonianu QCD (ograniczonego do sektora $q_\lambda \bar{q}_\lambda$) na froncie świetlnym za pomocą RGPEP daje w pierwszych rzędach potencjał efektywny między kwarkiem i antykwarkiem z czynnikiem kolorowym jak dla wymiany jednogluonowej, przynajmniej dla przypadku nierelatywistycznego, np. [57]. Wynik ten ma taką samą strukturę, jak w od dawna używanych modelach fenomenologicznych potencjału kolorowego [4]:

$$V_{xx} = - \sum_{i < j} F_i \cdot F_j V(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|) \quad (4.24)$$

Przyjęto, że oddziaływanie efektywne pomiędzy kwarkiem i gluonem, oraz oddziaływanie między gluonami ma tę samą postać potencjału kolorowego, z czynnikiem kolorowym jak dla wymiany jednogluonowej.

W powyższym wyrażeniu sumowanie rozciąga się na wszystkie pary cząstek ($q_\lambda \bar{q}_\lambda$, $q_\lambda g_\lambda$, $\bar{q}_\lambda g_\lambda$). We wzorze (4.24) F_i oznacza odpowiedni czynnik kolorowy, zaś $V(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|)$ jest efektywnym potencjałem wiążącym.

Czynniki kolorowe $C_F = F_i \cdot F_j$ są równe [58]

$$C_F = 3 \quad \text{dla } g_\lambda g_\lambda \text{ (singlet kolorowy)} \quad (4.25a)$$

$$C_F = -\frac{1}{6} \quad \text{dla } q_\lambda \bar{q}_\lambda \text{ (oktet kolorowy)} \quad (4.25b)$$

$$C_F = \frac{3}{2} \quad \text{dla } g_\lambda q_\lambda \text{ (tryplet kolorowy)} \quad (4.25c)$$

$$C_F = \frac{3}{2} \quad \text{dla } g_\lambda \bar{q}_\lambda \text{ (antytryplet kolorowy)} \quad (4.25d)$$

Czynnik kolorowy (4.25b) jest ujemny, co oznacza, że oddziaływanie kolorowe między kwarkiem i antykwarkiem w oktecie (który występuje w stanie $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$) jest odpychające. Odpychanie to jest kompensowane przez oddziaływanie przyciągające między kwarkiem i gluonem oraz antykwarkiem i gluonem.

Oddziaływanie wiążące $V(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|)$ we wzorze (4.24) można przyjąć (w pierwszym przybliżeniu) w postaci potencjału harmonicznego [59]. Wybór takiej postaci potencjału jest dodatkowo uzasadniony przez obliczenia za pomocą procedury RGPEP, które dają, przynajmniej w przybliżeniu nierelatywistycznym, potencjał efektywny między (ciężkimi) kwarkami który dla małych odległości zachowuje się jak oscylator harmoniczny [55, 56]. Użycie potencjału kwantowego oscylatora harmonicznego daje proste obliczenia, a przeprowadzone w niniejszej pracy obliczenia są tylko pierwszym krokiem na drodze badania, jak może dynamicznie powstawać relatywistyczny stan hybrydy.

Odpowiedni człon oddziaływania w sektorze $q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda$, uwzględniający czynniki kolorowe jak w równaniu (4.24), zapisuje się następująco:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{6}r_{q\bar{q}}^2 + \frac{3}{2}r_{qg}^2 + \frac{3}{2}r_{\bar{q}g}^2 &= \\ &= -\frac{1}{6}r_{hq}^2 + \frac{3}{2}(r_{hg} + r_{hq}/2)^2 + \frac{3}{2}(r_{hg} - r_{hq}/2)^2 = \\ &= 3r_{hg}^2 + \frac{7}{12}r_{hq}^2 \end{aligned} \quad (4.26)$$

Ten przykład wskazuje, że efektywne oddziaływanie wiążące w hybrydzie można reprezentować jako słabe *przyciąganie* pomiędzy kwarkiem i antykwarkiem, oraz silne przyciąganie pomiędzy parą kwark–antykwark a gluonem, pomimo obecności ujemnego znaku w (4.25b).

Oznacza to, że oczekiwanym wynikiem na postać funkcji falowej hybrydy, jest luźno (w porównaniu do oddziaływania pary z gluonem) związana para kwark–antykwark, czyli małe β_{hq} . Jest to zupełnie inna postać od tej wymaganej przez symetrię relatywistyczne amplitudy rozpadu hybrydy, z dużym β_{hq} . W powyższych rozważaniach pominięto efekty sektorów Focka innych niż $q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda$, oraz wyższe rzędy rachunku zaburzeń.

Obliczenia wyższego rzędu oraz efekty nieperturbacyjne mogłyby zredukować, bądź nawet wyeliminować odpychanie między kwarkiem i antykwarkiem będącymi jako całość w oktecie wewnątrz stanu kwark–antykwark–gluon. Tak założono na przykład w [16]. Wówczas szerokość β_{hq} w funkcji falowej hybrydy nie musiała by być mała, a mogłaby być porównywalna z innymi szerokościami (być tej samej wielkości

co β_{hg} i β_{gg}). Należy pamiętać o tej możliwości, gdyby mieszanie z innymi sektorami Focka nie dałoby dużych β_{hq} startując z małego β_{hg} .

4.4 Hamiltonian efektywny mieszania stanu $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ ze stanem $|g_\lambda g_\lambda\rangle$

Jedną z metod jakie można zastosować do obliczenia efektów wpływu mieszania stanu $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ ze stanem $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ na stan hybrydy jest rozwiązanie (numeryczne) równania Schrödingera dla Hamiltonianu efektywnego obciętego (ograniczonego) do sektorów $q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda$ oraz $g_\lambda g_\lambda$. Hamiltonian ten rozpisany na sektory Focka ma postać (opuszczamy λ we wzorach do (4.32)):

$$\begin{bmatrix} H_{0h} & H_I \\ H_I & H_{0g} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} qqg \\ gg \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} qqg \\ gg \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Hamiltonian w sektorze $g_\lambda g_\lambda$ jest postaci

$$\begin{aligned} H_{0g} = & \int [k] \frac{k^{\perp 2} + m_g^2}{k^+} a_k^\dagger a_k \\ & + \int [1234] V_{gg}(12, 34) a_1^\dagger a_2^\dagger a_3 a_4 \end{aligned} \quad (4.28)$$

gdzie $V_{gg}(12, 34)$ jest potencjałem wiążącym pomiędzy dwoma gluonami konstytuentnymi w gluonium.

Potencjał $V_{gg}(12, 34)$ w powyższym wzorze zależy tylko od różnicy pędów i można go zapisać jako

$$V_{gg} = -\alpha_{gg} \nabla_{\vec{k}_{gg}}^2 = \alpha_{gg} \vec{r}_{gg}^{-2} . \quad (4.29)$$

Współczynnik α_{gg} , określający siłę potencjału między gluonami, zawiera odpowiedni czynnik kolorowy. Trójwektor \vec{k}_{gg} w powyższym równaniu jest sposobem zapisu pędu względnego na froncie świetlnym [44] (patrz dodatek G); nie oznacza on przejścia do obliczeń równoczesowych. Użycie bazy stanów własnych oscylatora harmonicznego powoduje, że działanie tej składowej hamiltonianu efektywnego na stan bazy jest proste.

Hamiltonian w sektorze $q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda$ jest nieco bardziej złożony. Gdy zapiszemy go za pomocą operatorów kreacji i anihilacji, przybiera następującą postać

$$\begin{aligned} H_{0h} = & \int [k] \frac{k^{\perp 2} + m_g^2}{k^+} a_k^\dagger a_k + \int [k] \frac{k^{\perp 2} + m_q^2}{k^+} (b_k^\dagger b_k + d_k^\dagger d_k) \\ & + \int [1234] V_{q\bar{q}}(12, 34) b_1^\dagger d_2 b_3 d_4^\dagger \\ & + \int [1234] V_{qg}(12, 34) b_1^\dagger a_2 b_3 a_4^\dagger \\ & + \int [1234] V_{\bar{q}g}(12, 34) a_1^\dagger d_2 a_3 d_4^\dagger \end{aligned} \quad (4.30)$$

W zapisie tym $V_{q\bar{q}}(12, 34)$ jest potencjałem efektywnym pomiędzy kwarkiem i antykwarkiem, $V_{qg}(12, 34)$ pomiędzy kwarkiem i gluonem, oraz $V_{\bar{q}g}(12, 34)$ pomiędzy antykwarkiem i gluonem.

Dla potencjału harmonicznego można było wyrazić człon oddziaływania w hybrydzie jako funkcję pędów względnych kwarku względem antykwarku, oraz gluonu względem pary kwark–antykwark, tak jak zostało to zrobione w funkcji falowej hybrydy (3.13):

$$V_{qqg} = -\alpha_{hq} \nabla_{\vec{k}_{hq}}^2 - \alpha_{hg} \nabla_{\vec{k}_{hg}}^2 = \alpha_{hq} \vec{r}_{hq}^2 + \alpha_{hg} \vec{r}_{hg}^2. \quad (4.31)$$

Trójwektory \vec{k}_{hq} i \vec{k}_{hg} są sposobem zapisu (frontowych) pędów względnych w stanie kwark–antykwark–gluon. W ogólnym przypadku obliczenie działania tej składowej na funkcję falową byłoby trudne. Unika się komplikacji przez zastosowanie bazy oscylatora harmonicznego.

Fakt, że stany dla których szukamy rozwiązania równania Schroedingera zawierają mieszaninę stanów o różnych liczbach cząstek ogranicza możliwe do zastosowania metody numeryczne. Wybrana została metoda zapisu Hamiltonianu w bazie stanów ortogonalnych, a następnie numerycznego znalezienia wartości i wektorów (stanów) własnych w obciętej bazie. Wybrana została baza stanów własnych kwantowego oscylatora harmonicznego. Szerokości pędowe funkcji falowych stanów bazy mogą, ale nie muszą być równe odpowiednim szerokościom harmonicznego potencjału wiążącego.

Jako stany bazowe w przestrzeni $q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda$ wybrano stany używane do opisu rozpadu hybrydy, gdzie zamiast funkcji Gaussa występują funkcje własne oscylatora harmonicznego.

Stan $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ dany jest wzorem analogicznym do wzoru na stan mezonu (3.3), tzn. wzorem

$$|g_\lambda g_\lambda\rangle = \sum_{12} \int [12] p^+ \delta(1+2-p) \Psi_{JPC}^g(1,2) a_{\lambda 1}^\dagger a_{\lambda 2}^\dagger |0\rangle, \quad (4.32)$$

gdzie czynnik $\Psi_{JPC}^g(1,2)$ jest iloczynem czynników kolorowych, spinowych i zależnych od pędu. Funkcję falową $\psi_g(1,2)$ w sektorze $g_\lambda g_\lambda$ można zapisać jako kombinację funkcji bazowych oscylatora harmonicznego.

4.5 Trudności matematyczne i numeryczne modelowania mieszania

Nawet przy uproszczeniu zakładającym, że kwarki i gluony są opisywane jako cząstki skalarnie oraz przy założeniu, że potencjał wiążący daje się przybliżyć jako potencjał harmoniczny, rozwiązanie pełnego trójwymiarowego modelu nie jest osiągalne za pomocą dostępnych mocy obliczeniowych. Jest to spowodowane przez fakt, że liczba (istotnych) stanów rośnie w przypadku trójwymiarowym bardzo szybko ze wzrostem wielkości obcięcia bazy, a to obcięcie musi rosnać, gdy zwiększamy λ .

Stany bazowe trójwymiarowego oscylatora harmonicznego charakteryzują się trzema liczbami kwantowymi. W przypadku użycia współrzędnych sferycznych dla trójpędów względnych są to liczby kwantowe n_r , l , $-l \leq m_l \leq l$. Ze względu na fakt, że obliczenia prowadzone są na froncie świetlnym, a zatem zachowaną składową pędu w wierzchołku rozpadu gluonu na parę kwark antykwark (w wierzchołku mieszania stanów $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ i $|g_\lambda g_\lambda\rangle$) jest składowa P^+ a nie P_z , składowa k_{gg}^z pędu względnego między dwoma gluonami w stanie $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ nie zależy wyłącznie od składowych k_{hq}^z i k_{hg}^z , ale także od składowych poprzecznych pędów względnych \vec{k}_{hq} i \vec{k}_{hg} . Oznacza

to, że mieszanie nie ogranicza się do stanów o tych samych radialnych liczbach kwantowych. Nawet zakładając, że stany o różnych liczbach kwantowych m_l odprzegają się, ze wzoru na energię trójwymiarowego izotropowego oscylatora harmonicznego (używamy notacji $\hbar = 1$)

$$E_{n_r, l, m_l} = \omega \left(2n_r + l + \frac{3}{2} \right), \quad (4.33)$$

oraz z tego, że bazowa funkcja falowa w stanie $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ jest iloczynem funkcji falowych oscylatora, dostajemy, że liczba stanów o energii poniżej zadanego progu obciążenia rośnie jak czwarta potęga energii obciążenia.

Dla rozwiązania numerycznego równania Schroedingera potrzebne było zatem wprowadzenie dalszych uproszczeń. Użyto dalej modelu stanów $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ i $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ w jednym wymiarze, zamiast w trzech wymiarach. Poszukiwane zależności są wówczas prostsze, gdyż unikamy trudności związanych z pędami poprzecznymi. Ponadto obliczenia numeryczne są szybsze ze względu na to, iż całki są obliczane po najwyżej dwu zmiennych, a nie po sześciu. Najważniejsze jest jednak, że (jak zobaczymy dalej) potrzeba znacznie mniej stanów do uzyskania niezależności wyników od obciążenia liczby stanów bazy do skończonej i względnie małej liczby. Dla iloczynu dwu oscylatorów jak w stanie $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ w modelu jednowymiarowym liczba stanów bazowych o energii mniejszej niż zadana energia obciążenia rośnie jak kwadrat obciążenia, zamiast co najmniej jak czwarta potęga dla przypadku trójwymiarowego. Należy przy tym pamiętać, że czas obliczania wartości i wektorów własnych rośnie jak kwadrat wielkości macierzy.

Dzięki temu uproszczeniu można rozwiązać numerycznie zagadnienie mieszania stanu $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ ze stanem $|g_\lambda g_\lambda\rangle$, dla wielu różnych wartości parametrów modelu.

Równanie własne rozwiązujemy w bazie jednowymiarowego oscylatora harmonicznego. Wówczas funkcje falowe elementów bazy mają następujące postaci:

$$\begin{aligned} \phi_{n_{hq}, n_{hg}}^h(k_{hq}, k_{hg}) &= N_{n_{hq}} H_{n_{hq}} \left(\frac{k_{hq}}{\beta_{hq}} \right) \exp \left[-\frac{k_{hq}^2}{2\beta_{hq}^2} \right] \\ &\times N_{n_{hg}} H_{n_{hg}} \left(\frac{k_{hg}}{\beta_{hg}} \right) \exp \left[-\frac{k_{hg}^2}{2\beta_{hg}^2} \right] \end{aligned} \quad (4.34a)$$

$$\phi_{n_{gg}}^g(k_{gg}) = N_{n_{gg}} H_{n_{gg}} \left(\frac{k_{gg}}{\beta_{gg}} \right) \exp \left[-\frac{k_{gg}^2}{2\beta_{gg}^2} \right] \quad (4.34b)$$

Rachunki pilotażowe pokazały, że największy wpływ na stan własny rozwiązania zagadnienia mieszania sektorów o najmniejszej wartości własnej ma mieszanie ze stanem bazowym $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ o liczbie kwantowej $n_{gg} = 0$. Sprawdzono dla $\lambda = 2$ GeV, że kształt zależności najniższej wartości własnej i efektywnej szerokości stanu własnego o najniższej wartości własnej jest jakościowo taki sam dla przypadku przybliżenia dominacji jednego stanu $|g_\lambda g_\lambda\rangle$, jak dla rozwiązania pełnego problemu, gdy n_{gg} zmienia się aż do wartości obciążenia. Przybliżenie to skracca znacznie obliczenia; na przykład dla $\lambda = 2$ GeV (dla której to obciążenie $M_{\text{lim}}^2 = 30$ GeV jest wystarczające) czas wyliczenia wykresu zależności wartości własnych i kształtu stanów własnych od siły mieszania g zmniejszył się z 36 minut do 5 minut, kiedy przechodzimy do sytuacji

$n_{gg} = 0$. W dalszej części pracy obliczenia są zatem prowadzone dla przybliżenia, że tylko stan $n_{gg} = 0$ ma znaczenie.

4.6 Model numeryczny mieszania stanów $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ z $|g_\lambda g_\lambda\rangle$

4.6.1 Oznaczenia

Hamiltonian kwantowego oscylatora harmonicznego, dla jednej cząstki o masie m umieszczonej w polu siły harmonicznego o częstości ω dany jest następującym wzorem w reprezentacji położeniowej (jeśli przyjmie się notację w której $\hbar = 1$):

$$H_{\text{osc}} = -\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\omega^2 m}{2} x^2. \quad (4.35)$$

W reprezentacji pędowej, bardziej naturalnej dla problemu rozpadu hybrydy, wzór (4.35) sprowadza się do

$$H_{\text{osc}} = \frac{1}{2m} k^2 - \frac{\omega^2 m}{2} \frac{d^2}{dk^2}. \quad (4.36)$$

Współczynnik przy potencjale harmonicznym oznaczono symbolem α , tzn.

$$\alpha = \frac{\omega^2 m}{2}. \quad (4.37)$$

Stanem podstawowym rozwiązania równania Schrödingera dla kwantowego oscylatora harmonicznego jest funkcja:

$$\phi_{\text{osc}} = N \exp \left[-\frac{m\tilde{\omega}}{2} x^2 \right], \quad (4.38)$$

którą można zapisać w reprezentacji pędowej jako

$$\psi_{\text{osc}} = N \exp \left[-\frac{k^2}{2\beta^2} \right]. \quad (4.39)$$

W przypadku dwu cząstek oddziałujących ze sobą za pomocą efektywnego potencjału harmonicznego, składnik hamiltonianu, odpowiadający temu oddziaływaniu, można zapisać jak w (4.35) lub (4.36). Masa m w tym zapisie zastąpiona jest zredukowaną masą μ pary cząstek.

Wielkości β , ω i α występujące w (4.35)–(4.39) powiązane są następującymi zależnościami:

$$\beta^2 = \mu\omega, \quad (4.40a)$$

$$\alpha = \frac{\mu\omega^2}{2}. \quad (4.40b)$$

Zagadnienie mieszania pomiędzy stanami $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ i $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ było rozwiązywane poprzez wyliczenie macierzy hamiltonianu układu w obciętej bazie oscylatora harmonicznego. Dla przypadku, gdy częstości funkcji bazy są wybrane różne od częstości potencjałów harmonicznycch w hamiltonianie, częstości bazy będą oznaczane przez ω , zaś częstości potencjału harmonicznego przez Ω .

Jeśli założyć, że wszystkie potencjały w efektywnym hamiltonianie mają to samo wspólne podstawowe źródło, stosunki między współczynnikami przy różnych potencjałach typu x^2 dane są za pomocą czynników kolorowych. Swobodnym parametrem pozostaje tylko jeden współczynnik sprężystości dla wszystkich oscylatorów.

4.6.2 Elementy macierzowe hamiltonianu

Elementy macierzowe hamiltonianu efektywnego, obciętego do przestrzeni stanów $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ i $|g_\lambda g_\lambda\rangle$, patrz (4.27), były wyliczane w bazie oscylatora harmonicznego. Stosujemy przybliżenie jednowymiarowe, patrz rozdział 4.5. Stany bazy charakteryzowane są przez liczby kwantowe n_{hq}, n_{hg} dla stanów $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$, oraz n_{gg} dla stanów $|g_\lambda g_\lambda\rangle$.

Elementy macierzowe hamiltonianu oddziaływania harmonicznego (4.36) o częstości Ω , w bazie stanów własnych jednowymiarowego oscylatora harmonicznego $|\psi_n^{\text{osc}}\rangle$ o częstości ω , wyrazić można w następujący sposób:

$$\langle \psi_k | H_{\text{osc}} | \psi_l \rangle = \frac{\Omega^2 - \omega^2}{2\omega} h_{k,l}^{(2)} + \frac{(2l+1)\omega}{2} h_{k,l}^{(0)}, \quad (4.41)$$

gdzie $\tilde{h}_{k,l}^{(2)}$ oznacza element macierzowy k^2 , zaś $\tilde{h}_{k,l}^{(0)}$ oznacza element macierzowy k^0 w bazie $|\psi_n\rangle$. $h_{k,l}^{(2)}$ oraz $h_{k,l}^{(0)}$ sprowadzają się do całek

$$h_{k,l}^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} dz z^2 \psi_k^{\text{osc}}(z) \psi_l^{\text{osc}}(z), \quad (4.42)$$

$$h_{k,l}^{(0)} = \int_{-\infty}^{\infty} dz \psi_k^{\text{osc}}(z) \psi_l^{\text{osc}}(z). \quad (4.43)$$

Te całki (te elementy macierzowe) można wyliczyć analitycznie (przypis F):

$$h_{k,l}^{(2)} = \frac{1}{2}(1+2k)\delta_{k,l} + \frac{1}{2}\sqrt{k(k+1)}[\delta_{k-1,k+1} + \delta_{k+1,k-1}], \quad (4.44)$$

$$h_{k,l}^{(0)} = \delta_{k,l}. \quad (4.45)$$

Elementy diagonalne macierzy hamiltonianu efektywnego z oddziaływaniem harmonicznym, w bazie stanów własnych oscylatora harmonicznego, dane są zatem następującymi wzorami:

$$H_{n_{hq}n_{hg},n_{hq}n_{hg}} = T_{q\bar{q}g} + \omega_{hq}^{\text{eff}} \left(n_{hq} + \frac{1}{2} \right) + \omega_{hg}^{\text{eff}} \left(n_{hg} + \frac{1}{2} \right), \quad (4.46a)$$

$$H_{n_{gg},n_{gg}} = T_{gg} + \omega_{gg}^{\text{eff}} \left(n_{gg} + \frac{1}{2} \right). \quad (4.46b)$$

W powyższych wzorach $T_{q\bar{q}g}$ oznacza człon kinetyczny hamiltonianu w sektorze $q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda$, wyrażony przez pędy względne, zaś T_{gg} oznacza odpowiedni człon kinetyczny w sektorze $g_\lambda g_\lambda$. We wzorze (4.46) wprowadzone zostało oznaczenie ω^{eff} na efektywną częstość w macierzy hamiltonianu

$$\omega^{\text{eff}} = \frac{\Omega^2 + \omega^2}{2\omega} \quad (4.47)$$

Elementy pozadiagonalne macierzy hamiltonianu pomiędzy stanami $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ (dla hamiltonianu w przestrzeni pędowej) można przedstawić jako:

$$H_{n_{gg}-1,n_{gg}+1} = H_{n_{gg}+1,n_{gg}-1} = -\omega^{\text{adiag}} \frac{1}{2} \sqrt{n_{gg}(n_{gg}+1)}. \quad (4.48)$$

Pozostałe pozadiagonalne elementy macierzowe są równe zero. Wprowadzono oznaczenie

$$\omega^{\text{adiag}} = \frac{\Omega^2 - \omega^2}{2\omega}. \quad (4.49)$$

Analogiczne wyrażenia zapisać można także dla sektora $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$, zastępując n_{gg} przez n_{hg} lub n_{hq} . Widać zatem, że wewnątrz pojedynczego sektora macierz hamiltonianu jest diagonalna jeśli $\omega = \Omega$. Elementy macierzowe hamiltonianu pomiędzy stanami tego samego typu można zatem wyliczyć analitycznie, nawet jeśli częstość potencjału harmonicznego w hamiltonianie jest różna od częstości wybranych funkcji bazowych.

Elementy macierzowe członu mieszania pomiędzy stanem $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ i stanem $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ można przedstawić w następującej postaci (patrz przypis G)

$$H_{n_{hq}n_{hg},n_{gg}} = g_\lambda \int [k_{hq}k_{hg}] f_\lambda(k_{hq}, k_{hg}) \phi_{n_{hq}n_{hg}}(k_{hq}, k_{hg}) \phi_{n_{gg}}(k_{gg}) / (1 - x_{gg}). \quad (4.50)$$

Wartości te trzeba wyliczać numerycznie. We wzorze tym $[k_{hq}k_{hg}]$ oznacza niezmienniczą miarę całkowania po pędach względnych, zaś $\phi_{n_{hq}n_{hg}}$ i $\phi_{n_{gg}}$ jest funkcją falową bazy odpowiednio w sektorze $q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda$ i w sektorze $g_\lambda g_\lambda$, zaś f_λ jest czynnikiem podobieństwa grupy renormalizacji. Obliczenia są prowadzone na froncie świetlnym; zachowaną składową pędu jest P^+ . Wzór na $x_{gg} = x_3$ i uzasadnienie czynnika $1/(1 - x_{gg})$ podane są w przypisie G.

Zależności pomiędzy pędami względnymi zapisanymi w postaci k_{hq} , k_{hg} i k_{gg} , oraz w postaci x_{gg} podane są w przypisie G.

Wszystkie pędy obliczone zostały na froncie świetlnym (LF), korzystając z następującego zapisu na pędy względne k :

$$\sqrt{k^2 + m_1^2} + \sqrt{k^2 + m_2^2} = \mathcal{M} \quad (4.51)$$

W przypadku wyliczania k_{gg} oraz x_g z pędów względnych k_{hq} (pomiędzy kwarkiem i antykwarkiem w $q\bar{q}g$) i k_{hg} (pomiędzy parą kwark–antykwark i gluonem konstytuenty) używana jest następująca sekwencja wzorów:

$$\mathcal{M}_{12} = 2\sqrt{k_{hq}^2 + m_q^2}, \quad (4.52a)$$

$$\mathcal{M}_{123} = \sqrt{k_{hg}^2 + m_g^2} + \sqrt{k_{hg}^2 + \mathcal{M}_{12}^2}, \quad (4.52b)$$

$$x_{gg} = x_3 = \frac{k_{hg} + \sqrt{k_{hg}^2 + m_g^2}}{\mathcal{M}_{123}}, \quad (4.52c)$$

$$\mathcal{M}_{43}^2 = \frac{m_g^2}{x_{gg}(1 - x_{gg})}, \quad (4.52d)$$

$$k_{gg} = \left(x_{gg} - \frac{1}{2}\right) \mathcal{M}_{43}. \quad (4.52e)$$

gdzie 1,2,3 są odpowiednio pędami kwarku, antykwarku i gluonu w $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$, zaś 3 i 4 są pędami gluonów w $|g_\lambda g_\lambda\rangle$.

4.7 Obliczenia numeryczne mieszania stanu $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ ze stanem $|g_\lambda g_\lambda\rangle$

Dla przypadku modelu jednowymiarowego obliczenia elementów macierzowych hamiltonianu pomiędzy stanami bazowymi $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ i stanami bazowymi $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ wymagają całki dwuwymiarowej. Zostało zatem użyte wielokrotne całkowanie za pomocą kwadratur Gaussa–Kronroda [50, 60] (używając procedur z GNU Scientific Library [49]). Przy porównywaniu elementów macierzowych dla uproszczonego przypadku jednowymiarowego z elementami macierzowymi w przypadku trójwymiarowym zostało użyte całkowanie Monte Carlo za pomocą procedury vegas [47, 48].

Jako test poprawności całkowania zostały przeprowadzone obliczenia za pomocą różnych metod całkowania: iteracyjne (wielokrotne) całkowanie metodą Gaussa–Kronroda i całkowanie wielowymiarowe Monte Carlo, oraz sprawdzono, że całkowanie przy różnych wyborach zmiennych całkowania daje takie same wyniki.

Elementy macierzowe między stanami w tym samym sektorze zostały wyliczone analitycznie (znane wzory dla oscylatora harmonicznego).

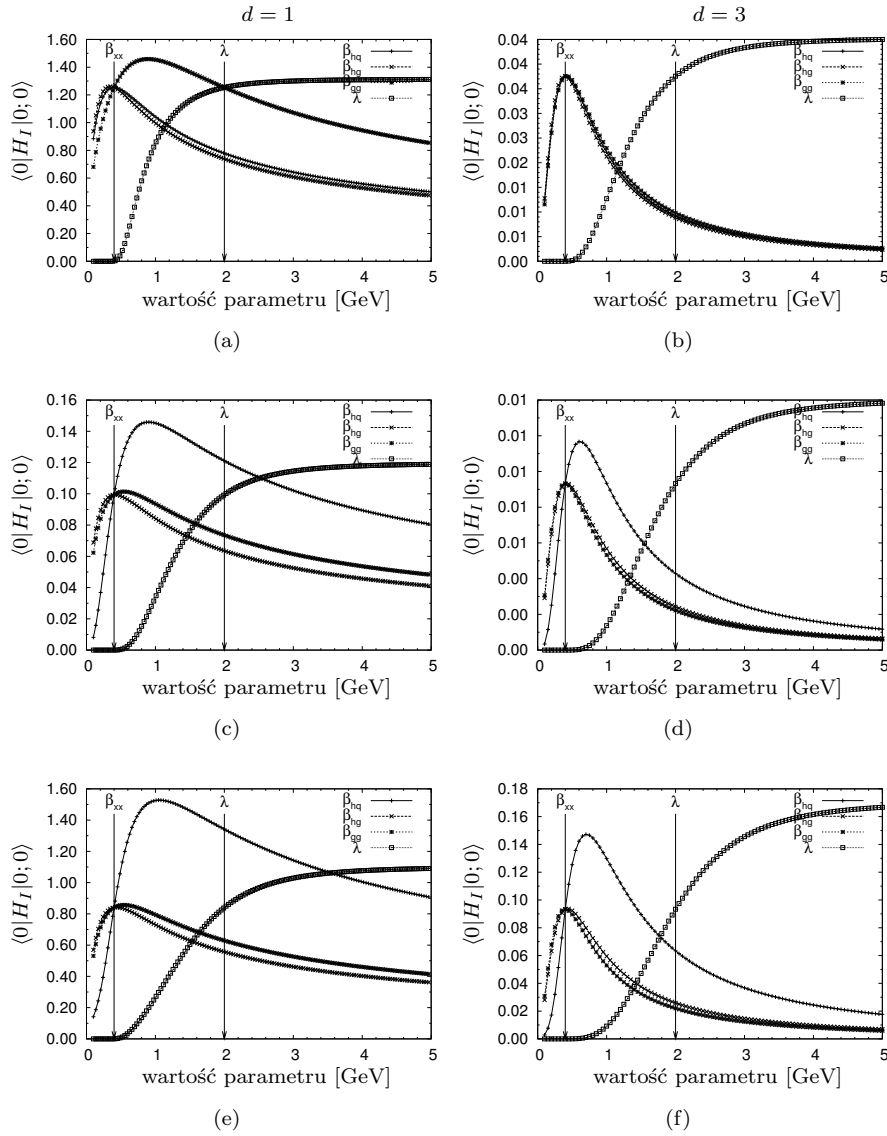
Po wyliczeniu elementów macierzowych hamiltonianu w bazie oscylatora harmonicznego, wartości i wektory własne macierzy hamiltonianu zostały wyliczone za pomocą metody DSYEVR z pakietu LAPACK [61]. Poprawność diagonalizacji sprawdzono przeprowadzając testowe obliczenia za pomocą różnych metod znajdowania wartości (i wektorów) własnych macierzy symetrycznej o elementach rzeczywistych z pakietu LAPACK (DSYEV, DSYEVD, DSYEVR, DSYEVX), za pomocą procedury z GNU Scientific Library (GSL), oraz sprawdzając że znaleziony wektor własny spełnia równanie własne.

4.7.1 Analiza członu mieszania

Na podstawie wzorów na poprawki do stanów własnych w rachunku zaburzeń dla stanów związanych w mechanice kwantowej, można się spodziewać, że mieszanie stanu $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ ze stanem $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ da poprawkę o szerokości rzędu szerokości członu mieszania. Podobne jakościowo wyniki otrzymać można za pomocą rachunku wariacyjnego. Obliczenia w rozdziale 4.2, dla ściśle rozwiązywalnego modelu mieszania stanów o różnej liczbie cząstek poza rachunkiem zaburzeń, również pozwalają spodziewać się składnika o szerokości rzędu szerokości czynnika mieszania.

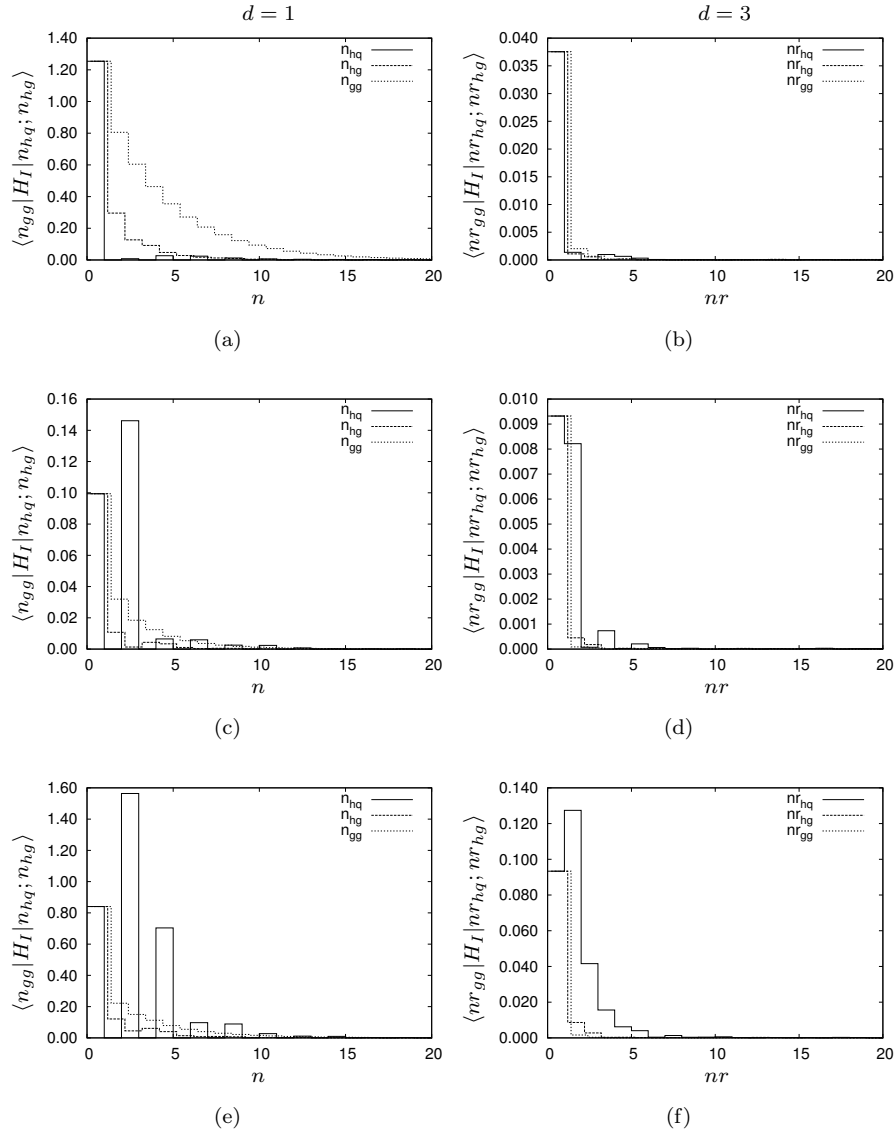
Na podstawie zależności elementu macierzowego członu mieszania H_I między stanami podstawowymi $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ i $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ (tzn. $\langle h_{0,0}|H|g_0\rangle = H_{00,0}$) od parametrów β_{hq} , β_{hg} , β_{gg} stanów i od skali renormalizacji λ , widać, że dla $f_\lambda(k_{hq}, k_{hg}) = \exp[-(\mathcal{M}_{hq}^2)^2/\lambda^4]$ elementy macierzowe członu mieszania H_I mają maksimum przy szerokości pędowej rzędu szerokości stanów podstawowych (patrz wykres (a) na rysunku 16).

Badanie kształtu nawet tylko *jednego* elementu macierzowego członu mieszania pomiędzy stanami $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ i $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ nasuwa sugestie co do tego jaką postać mogą przybrać wyniki mieszania. Następnym krokiem jest analiza wielkości elementów macierzowych członu mieszania w hamiltonianie między różnymi stanami, dla ustalonych parametrów bazowych funkcji falowych. Należało się spodziewać, że aby uzyskać wynik mieszania na stan hybrydy o szerokości β_{hq} rzędu λ (czyli ten sam wynik co z analizy rozpadu), mieszanie powinno dodać składnik o większej szerokości, czyli



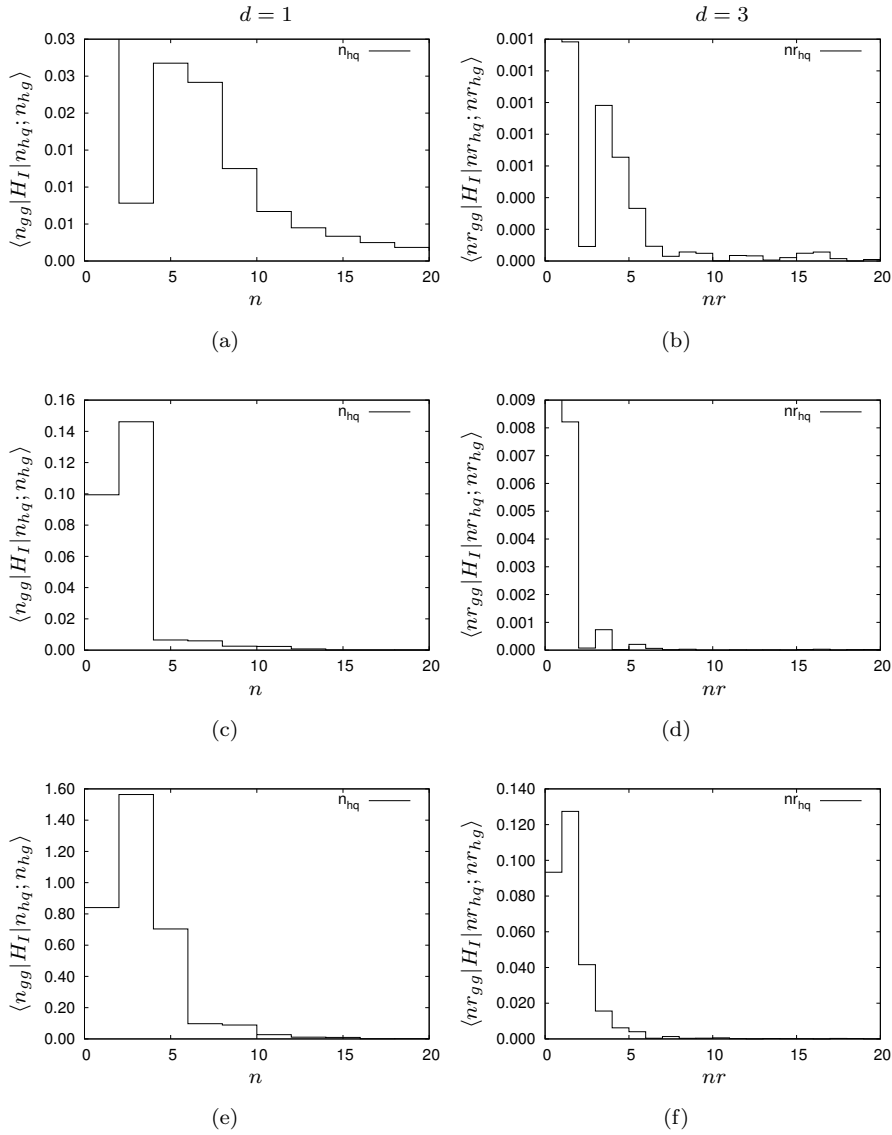
Rysunek 16: Zależność członu mieszania $H_I = \langle q\bar{q}g|H|gg\rangle$ od wartości podanego w legendzie parametru w funkcji bazowej, przy pozostałych parametrach ustalonych. Wartości parametrów: $m_q = 0.3\text{GeV}$, $m_g = 1.2\text{GeV}$, $\beta_{hq} = \beta_{hg} = \beta_{gg} = 0.4\text{GeV}$, $\lambda = 2\text{GeV}$. Rysunki po lewej stronie: (a), (c) i (e) są wynikiem obliczeń dla przypadku jednowymiarowego (1d), zaś rysunki po prawej stronie, (b), (d) i (f), dotyczą przypadku trójwymiarowego (oryginalnego problemu). Rysunki (a) oraz (b) dotyczą obliczeń prowadzonych dla f_λ określonych równaniem (4.53a), rysunki (c) oraz (d) dotyczą obliczeń prowadzonych dla f_λ z równania (4.53b), zaś rysunki (e) oraz (f) obliczeń prowadzonych dla f_λ z równania (4.53c).

o większych liczbach kwantowych n_{hq} . Oczekiwano zatem maksimum w elementach macierzowych dla pewnego $n_{hq} \neq 0$. Na rysunku 17(a) jednak maksimum takiego nie widać.



Rysunek 17: Zależność członu mieszania $H_I = \langle q\bar{q}g | H | gg \rangle$ od liczby kwantowej odpowiednio n_{hq} , n_{hg} oraz n_{gg} dla pozostałych liczb kwantowych równych 0 (dla przypadku trójwymiarowego przedstawiona liczba kwantowa, np. n_{hq} , oznacza radialną liczbę kwantową). Rysunki po lewej stronie: (a), (c) i (e) są wynikiem obliczeń dla przypadku jednowymiarowego (1d), zaś rysunki po prawej stronie, (b), (d) i (f), dotyczą przypadku trójwymiarowego (oryginalnego problemu). Rysunek (a) oraz (b) dotyczy obliczeń prowadzonych dla f_λ określonych równaniem (4.53a), rysunek (c) oraz (d) obliczeń prowadzonych dla f_λ z równania (4.53b), zaś rysunek (e) obliczeń prowadzonych dla f_λ z równania (4.53c).

Analizę mieszania przeprowadzono dla kwarków i gluonów zastąpionych cząstkami skalarnymi. Pozwoliło to uniknąć dodatkowych trudności technicznych zwią-



Rysunek 18: Jak na rysunku 17, ale wyłącznie zależność od jednej liczby kwantowej n_{hq} / nr_{hq} , i wykresy przeskalowane w taki sposób, aby uwidocznili maksimum dla $n \neq 0$. Dla obliczeń w przypadku jednowymiarowym, wykresy (a), (c) i (e) po lewej stronie pominięte zostały dodatkowo elementy macierzowe które są tożsamościowo równe zero ze względu na symetrię.

zanych z obecnością wielu członów spinowych i ich zależnością od pędów (kątów). Należy jednak pamiętać, że człony spinowe wprowadzają dodatkowe czynniki w hamiltonianie.

Nie było wiadome jednak, jaką dokładnie postać powinien mieć modelowy czynnik zależny od pędu, który należy uwzględnić w członie mieszania w modelu 1 + 1 wymiarowym. Dodatkowo redukcja wymiarów z 3 do 1 wymaga czynnika o wymiarze pędu. Efekt ten można było zauważyć w analizie ściśle rozwiązywalnego modelu mieszania stanów o różnej liczbie cząstek, przedstawionego w rozdziale 4.2. Porównanie elementów macierzowych hamiltonianu efektywnego pomiędzy stanami $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ i $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ dla trzech wymiarów i dla jednego wymiaru na wykresach odpowiednio po lewej i po prawej stronie rysunków 16– 18 także sugeruje konieczność dodania takiego czynnika. Wobec braku wiedzy jak dokładnie powinien zostać zdefiniowany człon mieszania, rozważono różne definicje tego członu.

Sumaryczny efekt czynnika spinowego w oryginalnym zagadnieniu mieszania sektora $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ z sektorem $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ można sprowadzić do modyfikacji czynnika podobieństwa f_λ , według podanych niżej wzorów:

$$f_\lambda = \exp \left[-\frac{(\mathcal{M}_{12}^2 - m_{g0}^2)^2}{\lambda^4} \right] \quad (4.53a)$$

$$f_\lambda = \frac{\mathbf{k}_{hq}^2}{m_d^2} \exp \left[-\frac{(\mathcal{M}_{12}^2 - m_{g0}^2)^2}{\lambda^4} \right] \quad (4.53b)$$

$$f_\lambda = \frac{(\mathcal{M}_{12}^2)^2}{m_d^4} \exp \left[-\frac{(\mathcal{M}_{12}^2 - m_{g0}^2)^2}{\lambda^4} \right] \quad (4.53c)$$

Na wykresach od (c) do (f) elementu macierzowego mieszania na rysunkach 16 i 17, widoczne jest, że dla podanych w (4.53) modyfikacji f_λ , następuje silne mieszanie między stanem bazowym $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ o $n_{gg} = 0$, a stanami bazowymi $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ o $n_{hq} \neq 0$. Oznacza to, że w wyniku mieszania tych sektorów stan hybrydy uzyskać może wkład stanu $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ o $n_{hq} > 0$, a zatem o efektywnej szerokości większej od β_{hq}^{bazy} . Zatem efektem mieszania $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ z $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ może być zwiększanie efektywnej szerokości β_{hq} w funkcji falowej będącej rozwiązaniem zagadnienia własnego mieszania.

Dodatkowy czynnik zależny od pędu w członie mieszania powoduje, że stan podstawowy $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ miesza się silnie ze stanem wzbudzonym $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$. Na podstawie drugiego rzędu rachunku zaburzeń dla stanów własnych hamiltonianu, można zauważyć, że dodatkowy czynnik prowadzić powinien do domieszki stanu wzbudzonego $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ o większej szerokości niż szerokość stanu podstawowego $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$.

4.7.2 Wyniki analizy mieszania

Metoda wyliczania macierzy Hamiltonianu w obciętej bazie (tutaj w bazie stanów własnych oscylatora harmonicznego) i rozwiązywania zagadnienia własnego dla wyliczonej macierzy, daje wynik na stany własne w postaci kombinacji liniowych stanów bazy:

$$|\psi_{\text{eig}}\rangle = \sum_{n_{hq}, n_{hg}} c_{n_{hq}, n_{hg}} |q\bar{q}g(n_{hq}, n_{hg})\rangle + \sum_{n_{gg}} c_{n_{gg}} |gg(n_{gg})\rangle, \quad (4.54)$$

gdzie $|q\bar{q}g(n_{hq}, n_{hg})\rangle$ oznacza stan bazy w sektorze $|q\bar{q}g\rangle$ o liczbach kwantowych n_{hq} i n_{hg} , zaś $|gg(n_{gg})\rangle$ oznacza stan bazy w sektorze $|gg\rangle$ o liczbie kwantowej n_{gg} .

Stan bazowy $|gg(n_{gg})\rangle$ w sektorze $|gg\rangle$ wybieramy w następującej postaci:

$$|gg(n_{gg})\rangle = \sum_{12} \int [12] p^+ \tilde{\delta}(1+2-p) \Psi_{n_{gg}}^g(1, 2) a_{\lambda_1}^\dagger a_{\lambda_2}^\dagger |0\rangle, \quad (4.55)$$

Funkcja falowa $\Psi_{n_{gg}}^g(1, 2)$ stanu bazowego wyraża się za pomocą pędu względnego k_{gg} jako funkcja falowa jednowymiarowego oscylatora harmonicznego o liczbie kwantowej n_{gg}

$$\Psi_{n_{gg}}^g(k_{gg}) = N_{n_{gg}} H_{n_{gg}} \left(\frac{k_{gg}}{\beta_{gg}} \right) \exp \left[-\frac{k_{gg}^2}{2\beta_{gg}^2} \right], \quad (4.56)$$

gdzie $H_n(k)$ jest odpowiednim wielomianem Hermite'a, zaś N_n czynnikiem normalizującym. Analogicznie zdefiniowany jest stan bazowy $|q\bar{q}g(n_{hq}, n_{hg})\rangle$.

Aby sprawdzić czy otrzymane rozwiązanie dla $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ ma oczekiwane charakterystyki, potrzebna była metoda oszacowania szerokości otrzymanego stanu w przestrzeni pędów. Jednym ze sposobów szacowania tej szerokości byłaby minimalizacja odległości pomiędzy otrzymanym stanem $|\psi_{\text{eig}}\rangle$ będącym rozwiązaniem równania własnego dla zagadnienia mieszania, a stanem próbnym o znanych szerokościach $|\psi_\beta\rangle$, ze względu na szerokości β :

$$\beta = \text{idxmin}_\beta \|\psi_{\text{eig}} - \psi_\beta\|.$$

idxmin_β oznacza położenie minimum przy minimalizacji ze względu na parametr β . Model stanu $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ w analizie rozpadu hybrydy w rozdziale 3 zakłada rozkład klastrów (faktoryzowalność funkcji falowej), tzn. funkcję falową postaci $\psi(k_{hq})\psi(k_{hg})$ (patrz wzór (3.13)) ale odległość w sensie normy mówi, jaki kształt funkcji falowej jest bardziej prawdopodobny.

Prostszym i szybszym rozwiązaniem jest jednak wyliczenie szerokości stanu β_{hq} , β_{hg} , β_{gg} na podstawie wartości średniej operatorów k_{hq}^2 , k_{hg}^2 , k_{gg}^2 w tym stanie. Szerokość otrzymanego stanu szacujemy jako:

$$\beta_{hq}^{\text{eff}} = \sqrt{2 \frac{\langle \psi | \hat{k}_{hq}^2 \hat{P}_{q\bar{q}g} | \psi \rangle}{\langle \psi | \hat{P}_{q\bar{q}g} | \psi \rangle}}, \quad (4.57)$$

gdzie $\hat{P}_{q\bar{q}g}$ jest operatorem rzutowym na przestrzeń stanów złożonych z kwarku, antykwarku i gluonu, którego wartością oczekiwaną jest prawdopodobieństwo stanu $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ w stanie hybrydy. Czynniki 2 pojawia się ze względu na to, że wartość średnia operatora \hat{k}^2 w stanie podstawowym o szerokości β wynosi $\frac{1}{2}\beta$.

Wielkość $\langle \psi | \hat{k}_{hq}^2 \hat{P}_{q\bar{q}g} | \psi \rangle$ można obliczyć dla znalezionej stanu własnego $|\psi_{\text{eig}}\rangle$ na podstawie czynników rozkładu $c_{n_{hq}, n_{hg}}$ i $c_{n_{gg}}$ na stany bazowe, oraz macierzy $h_{m,n}^{(2)}$ operatora \hat{k}^2 w bazie jednowymiarowego oscylatora harmonicznego o szerokości 1 (4.58).

$$\begin{aligned} h_{m,n}^{(2)} &= \int_{-\infty}^{\infty} dz z^2 \text{osc}_m(z) \text{osc}_n(z) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dz z^2 e^{-z^2} N_m H_m(z) N_n H_n(z) \end{aligned} \quad (4.58)$$

Macierz $h_{m,n}^{(2)}$ można wyliczyć analitycznie. Jest ona dana następującym wzorem:

$$\begin{cases} h_{n,n}^{(2)} &= \frac{1}{2}(1+2n) \\ h_{n-1,n+1}^{(2)} = h_{n+1,n-1}^{(2)} &= \frac{1}{2}\sqrt{n(n+1)} \end{cases} \quad (4.59)$$

Pozostałe elementy macierzowe $h_{m,n}^{(2)}$ operatora \hat{k}^2 są równe zero.

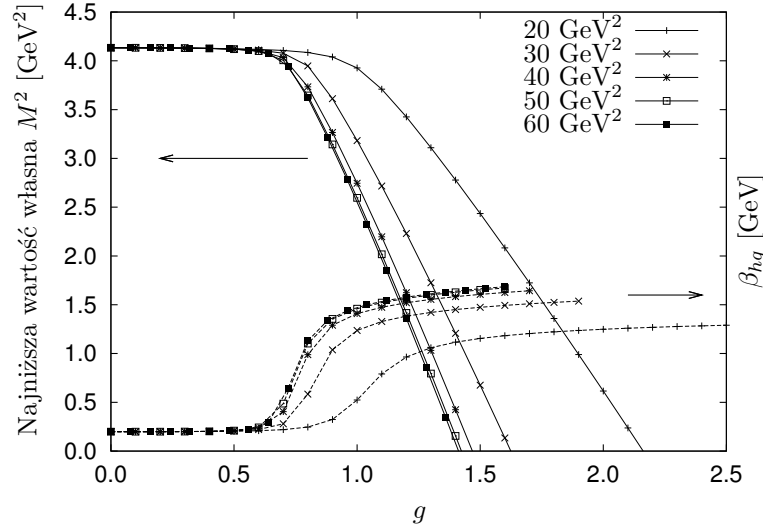
Zależność na $\langle \psi | \hat{k}_{hq}^2 \hat{P}_{q\bar{q}g} | \psi \rangle$ wyraża się za pomocą $c_{n_{hq},n_{hg}}$ i $c_{n_{gg}}$ oraz $h_{m,n}^{(2)}$ następująco:

$$\langle \psi | \hat{k}_{hq}^2 \hat{P}_{q\bar{q}g} | \psi \rangle = \beta_{hq}^2 \sum_{n_{hq}, n'_{hq}} \sum_{n_{hg}} c_{n_{hq},n_{hg}} h_{n_{hq},n'_{hq}}^{(2)} c_{n'_{hq},n_{hg}} \quad (4.60)$$

W podobny sposób można napisać wzory na $\langle \psi | \hat{P}_{q\bar{q}g} | \psi \rangle$ (składowa $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$) oraz $\langle \psi | \hat{P}_{gg} | \psi \rangle$ (składowa $|g_\lambda g_\lambda\rangle$) za pomocą $c_{n_{hq},n_{hg}}$ i $c_{n_{gg}}$:

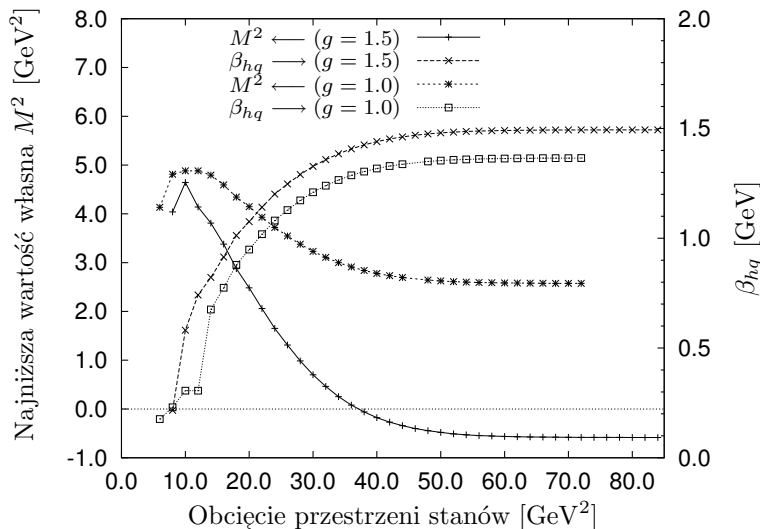
$$\langle \psi | \hat{P}_{q\bar{q}g} | \psi \rangle = \sum_{n_{hq}, n_{hg}} c_{n_{hq},n_{hg}}^2 \quad (4.61)$$

$$\langle \psi | \hat{P}_{gg} | \psi \rangle = \sum_{n_{gg}} c_{n_{gg}}^2 \quad (4.62)$$



Rysunek 19: Zależność najniższej wartości własnej w rozwiązaniu problemu mieszania (krzywe ciągłe zaczynające się od góry z lewej strony) oraz efektywnej szerokości najniższego stanu własnego (krzywe przerywane zaczynające się od dołu z lewej strony) od wielkości stałej sprzężenia g , dla $\lambda = 3$ GeV, przy różnych wartościach obięcia masy własnej przestrzeni stanów. Obydwa typy krzywych (krzywe dla wartości własnej i krzywe dla efektywnej szerokości stanu) zbiegają do odpowiednich krzywych (wartości) granicznych przy zwiększaniu energii obięcia (zwiększaniu liczby stanów bazowych).

Aby można było znaleźć numerycznie wartości własne i wektory (stany) własne macierzy Hamiltonianu w zadanej bazie ortonormalnej, potrzeba było opisanego



Rysunek 20: Zależność najniższej wartości własnej M^2 w rozwiązaniu problemu mieszania, oraz efektywnej szerokości β_{hq} stanu własnego o najniższej energii, od energii obcięcia przestrzeni stanów (czyli największej energii własnej oscylatora wśród stanów bazowych), przy różnych wielkościach stałej sprzężenia g , dla $\lambda = 3\text{GeV}$. Jest widoczne, że powyżej pewnej granicznej wielkości energii obcięcia wyniki nie zmieniają się, czyli przestają zależeć od obcięcia bazy.

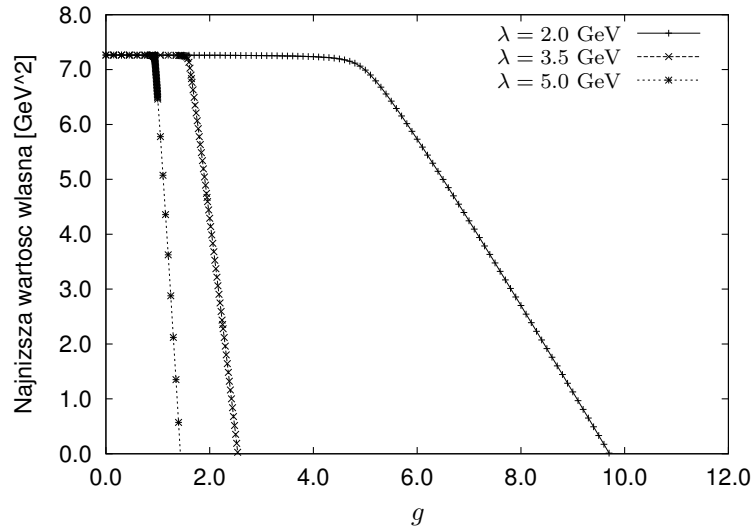
wcześniej obcięcia przestrzeni stanów. Jak widać z analizy zależności elementów macierzowych od liczb kwantowych stanów bazy, oddziaływanie mieszające jest ograniczonej szerokości (na przykład patrz rysunek 17 zależności $\langle n_{hq}n_{hg}|H_I|n_{gg}\rangle$ od n_{hq}). Oznacza to, że wynik nie zależy od obcięcia przestrzeni stanów, pod warunkiem, że obcięcie to jest wystarczająco wysokie, powyżej pewnej wartości progowej.

Obcięcie przestrzeni stanów było zadane przez ograniczenie na niezmienniczą masę własną stanów bazowych w języku liczb kwantowych bazy n_{hq} , n_{hg} , n_{gg} . Jak widać na rysunkach 19 oraz 20, powyżej pewnej wielkości ograniczenia przestrzeni stanów bazowych wyniki rzeczywiście nie zależą od obcięcia. Obliczenia zależności β_{hq} od λ zostały wyliczone dla λ w zakresie $\lambda = 2 - 5\text{ GeV}$. Dolna granica wynika z potrzeby odizolowania zależności od pozostałych parametrów masowych: m_q , m_g . Górną granicę wyznaczają ograniczenia możliwości obliczeń numerycznych, jako że duże λ wymaga dużej liczby stanów bazowych do uzyskania niezależności od obcięcia.

Z wyników obliczeń przedstawionych na rysunku 21 widać, że obszar wielkości stałej sprzężenia g , dla których efekt mieszania sektorów jest znaczący, zmienia się wraz z λ ,

Wraz ze wzrostem stałej sprzężenia g następuje przejście od stanu, w którym najniższy stan własny jest głównie zbudowany ze stanu podstawowego $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$, do stanu, w którym następuje mieszanie i zwiększa się β_{hq} . Jest to efekt, którego należało się spodziewać.

Wyniki są zależne od wielkości skali λ , o ile nie przeprowadzi się renormalizacji. Teoretyczne wyliczenie zależności g od λ wymagałoby obliczeń nieperturbacyjnych w tym zakresie λ . W szacunkowych rachunkach zamiast pełnych obliczeń można jednak zażądać aby energia stanu własnego miała zadaną wielkość. Dla zadanego



Rysunek 21: Zależność najmniejszej wartości własnej od wielkości stałej sprzężenia g , dla różnych wartości szerokości czynnika podobieństwa λ . Wykres demonstruje konieczność renormalizacji g , to znaczy doboru g_λ w zależności od λ , aby porównywać wyniki dla różnych λ , z tą samą wartością własną $M_{\text{eigen}(g_\lambda)}^2$. Strzałki w legendzie wskazują na której osi jest zaznaczona dana wielkość.

λ dobieramy g_λ w ten sposób, by energia stanu własnego dla tej wielkości g_λ była równa zadanej wielkości: $M_{\text{eigen}(g_\lambda)}^2 = \text{const}$. Jest to nieperturbacyjny warunek normalizacji.

W celu wyliczenia zależności β_{hq} od λ najpierw znajdujemy g_λ , dla którego energia stanu własnego ma zadaną ustaloną wartość. Następnie znajdujemy postać stanu własnego (funkcji falowej) dla znalezionej g_λ , a następnie na podstawie wielkości średniej \hat{k}_{hq}^2 w tym stanie wyliczamy β_{hq}^{eff} (patrz (4.60)).

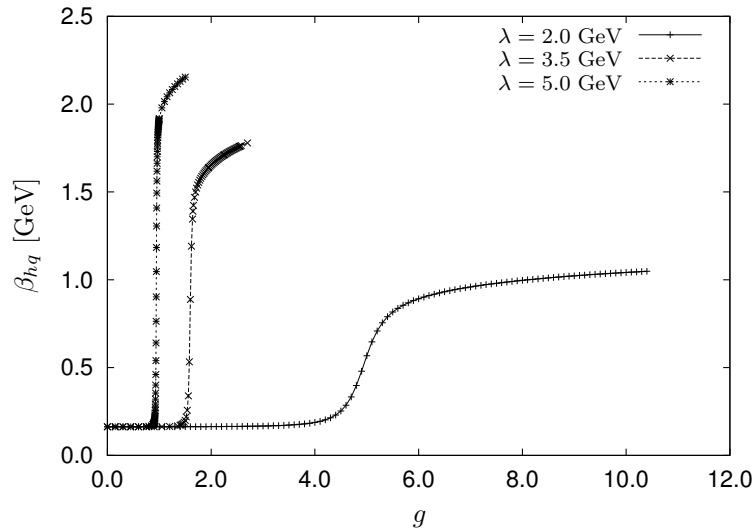
Na rysunku 22 przedstawiona została zależność szerokości β_{hq}^{eff} stanu własnego o najmniejszej masie (stanu podstawowego) przy różnych szerokościach czynnika podobieństwa λ .

Na rysunku 23 przedstawiono zależność szerokości β_{hq}^{eff} stanu hybrydy od szerokości czynnika podobieństwa λ , przy różnych wielkościach parametrów obcięcia. Widać, że wraz ze wzrostem parametru obcięcia przestrzeni stanów, zależność β_{hq}^{eff} od λ zbliża się do zależności liniowej.

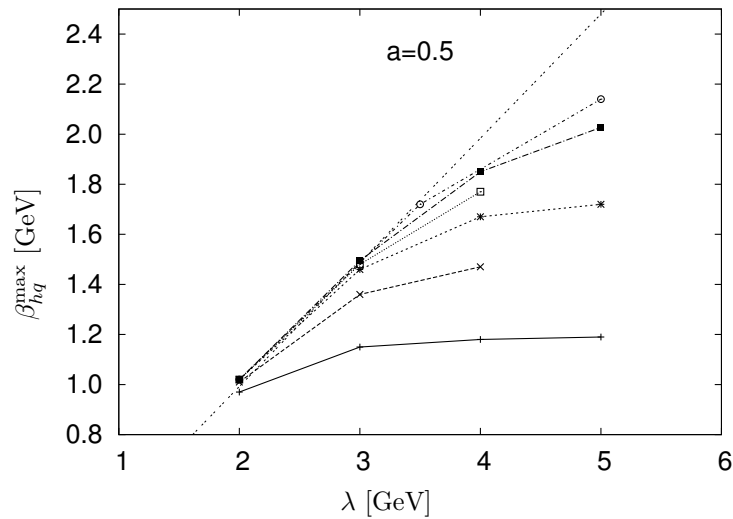
Narzucenie wymagania spełnienia symetrii relatywistycznych amplitudy rozpadu hybrydy daje zatem $\beta_{hq} \simeq \lambda$. Obydwie wielkości są rzędu 5 – 8 GeV, t.j. są dużo większe od pozostałych parametrów. Model mieszania stanów $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ oraz stanu $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ daje β_{hq}^{eff} proporcjonalne do λ , z czynnikiem proporcjonalności rzędu 1/2. Na rysunku 23 ten fakt jest oznaczony jako $a = 0.5$, gdzie a jest współczynnikiem proporcjonalności między λ i β_{hq}^{eff} we wzorze

$$\beta_{hq}^{\text{eff}} = a\lambda . \quad (4.63)$$

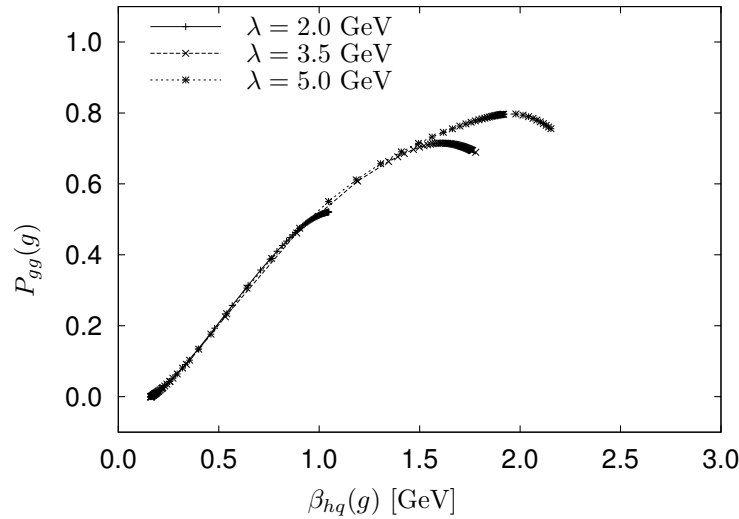
Analiza wyników dynamicznych nie określa jednak jaka powinna być wielkość parametru λ . Ponadto wyliczenie mieszania dla dużych λ nie jest łatwe, co wynika



Rysunek 22: Efektywna szerokość β_{hq}^{eff} stanu własnego o najmniejszej masie, wyliczona za pomocą wzoru (4.57), w zależności od stałej sprzężenia g , przy różnych wartościach szerokości czynnika podobieństwa λ .



Rysunek 23: Efektywna szerokość β_{hq}^{eff} stanu własnego o najmniejszej masie w zależności od szerokości λ czynnika podobieństwa, przy różnych wielkościach parametru obciążenia przestrzeni stanów bazowych. Wartość parametru obciążenia zmienia się od 20 GeV^2 (dolna krzywa) do 70 GeV^2 (górna krzywa). Ekstrapolacja liniowa zależności β_{hq}^{eff} od λ dla parametru obciążenia rosnącego do nieskończoności, daje współczynnik proporcjonalności około $\frac{1}{2}$.



Rysunek 24: Korelacja pomiędzy efektywną szerokością β_{hq}^{eff} stanu własnego o najmniejszej masie, a wkładem P_{gg} składnika $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ w tym stanie. Krzywe uzyskane przy różnych szerokościach λ czynnika podobieństwa i różnych wielkościach parametru obcięcia przestrzeni stanów bazowych.

z szybkiego wzrostu liczby stanów potrzebnych do uzyskania niezależności wyników od obcięcia.

Poza omawianym kształtem (szerokością β_{hq}) funkcji falowej stanu otrzymanego w wyniku mieszania sektorów Focka, ważną wielkością jest wkład stanu $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ do stanu hybrydy $|h\rangle$. Wartości średnie operatorów rzutowych \hat{P}_{gg} oraz $\hat{P}_{q\bar{q}g}$ oznaczono jako P_{gg} oraz $P_{q\bar{q}g}$; są to prawdopodobieństwa występowania odpowiednich sektorów w stanie hybrydy $|h\rangle$.

Przy analizie symetrii relatywistycznych rozpadu hybrydy na dwa mezony stan hybrydy był modelowany jako prosty stan $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$. Jeśli zatem stan hybrydy będzie zawierał więcej składowej $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ niż składowej $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ ($P_{q\bar{q}g} > 0.5$), to trudno będzie uważać, że odpowiada on stanowi użytemu w analizie rozpadu. Nawet jeśli stan ten ma oczekiwany kształt funkcji falowej, pozostaje pytanie dlaczego widzimy (i liczymy) rozpad stanu hybrydy złożonego tylko z sektora $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$. Stan o dominującej składowej $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ odpowiadać powinien gluonium, a nie hybrydzie.

Na rysunku 24 przedstawiona została zależność (korelacja) pomiędzy szerokością funkcji falowej $\beta_{hq}^{\text{eff}}(\lambda)$ a wielkością prawdopodobieństwa $P_{gg}(\lambda)$ składowej $|g_\lambda g_\lambda\rangle$. Ten wykres ilustruje fakt, że aby β_{hq}^{eff} rosło znacząco z λ , wymagany jest duży wkład składowej $|g_\lambda g_\lambda\rangle$. Wraz ze wzrostem β_{hq}^{eff} z rosnącym λ , także P_{gg} rośnie z λ (przynajmniej w zakresie zilustrowanym na wykresie; wartości P_{gg} są ograniczone do przedziału $0 \leq P_{gg} \leq 1$).

Wynika stąd, że oczekiwany wzrost β_{hq}^{eff} okupiony jest wzrostem prawdopodobieństwa P_{gg} składowej $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ w stanie hybrydy $|h\rangle$.

4.8 Model mieszania $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ z pozostałymi sektorami Focka

Rozwiązując numerycznie model mieszania stanów $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ i $|g_\lambda g_\lambda\rangle$, otrzymano stan hybrydy o efektywnej szerokości funkcji falowej β_{hq}^{eff} proporcjonalnej do λ . Mieszanie stanów $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ z $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ może więc służyć jako dynamiczny mechanizm uzasadnienia dla wyników otrzymanych z analizy rozpadu hybrydy. Pozostały jednak do rozważenia następujące problemy.

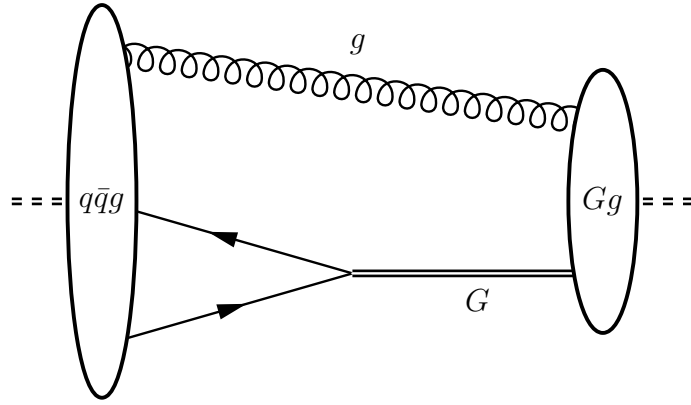
Po pierwsze, dla λ rzędu 4–5 GeV, czyli rzędu wielkości λ otrzymanych z analizy rozpadu hybrydy, wynikiem mieszania jest duże prawdopodobieństwo składowej $|g_\lambda g_\lambda\rangle$. Co więcej, wielkość prawdopodobieństwa P_{gg} jest skorelowana z β_{hq}^{eff} (patrz rysunek 24). Próby zmniejszenia P_{gg} dają zatem także mniejsze β_{hq}^{eff} . Wyklucza to najprostszą wersję mechanizmu mieszania, przedstawioną wcześniej. Tę niechcianą korelację można zaobserwować także w ściśle rozwiązywalnym modelu mieszania z oddziaływaniami separowalnymi (przedstawionym w rozdziale 4.2). W tym modelu zwiększenie szerokości funkcji falowej jest również okupione zwiększeniem wkładu sektora typu $|g_\lambda g_\lambda\rangle$. Można więc oczekiwać, że efekt ten jest ogólny i nie zależy od poczynionych uproszczeń i wybranej metody rozwiązania zagadnienia.

Aby stan otrzymany w wyniku mieszania odpowiadał stanowi z analizy symetrii rozpadu, w dalszych poszukiwaniach należało znaleźć model, zapewniający, że rozpad znalezionej hybrydy będzie zdominowany przez składową kwark–antykwar–gluon. Jeśli składowa gluon–gluon dominuje, oznacza to, że w wyniku mieszania otrzymano gluonium raczej niż mezon hybrydowy (hybrydę). Natomiast przeprowadzona wcześniej analiza symetrii rozpadu zakłada, że stan hybrydy daje się reprezentować w dobrym przybliżeniu za pomocą stanu $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ (cząstek efektywnych).

Po drugie znaleziono, że istnieją stany skalarnej hybrydy, rozpadającej się na dwa skalarnie mezony, które nie sprzęgają się z sektorem $g_\lambda g_\lambda$. Analiza rozpadu skalarnej hybrydy w rozdziale 3 była prowadzona dla izoskalarniej hybrydy rozpadającej się na dwa izoskalarnie mezony. Jest to najprostszy możliwy przypadek konfiguracji zapachów kwarków w hybrydzie, ale nie jedyny możliwy. Analiza roli czynnika izospinowego w rozpadach wskazuje, że podane poniżej kombinacje izospinów dają takie same (z dokładnością do stałego czynnika) wzory na amplitudy rozpadów

$$\begin{aligned}
 h^s &\rightarrow b^s + p^s \\
 &\rightarrow b^+ + p^- \\
 &\rightarrow b^- + p^+ \\
 &\rightarrow b^0 + p^0 \\
 h^+ &\rightarrow b^+ + p^s \\
 &\rightarrow b^s + p^+ \\
 h^0 &\rightarrow b^s + p^0 \\
 &\rightarrow b^0 + p^s
 \end{aligned} \tag{4.64}$$

Symbol h^s oznacza izoskalarną hybrydę z czynnikiem izospinowym $I_h \simeq \sigma^0 = 1_{2 \times 2}$ (przypadek rozważany w [42] i [43]), h^0 oznacza nienaładowaną (neutralną ładunkowo) hybrydę izowektorową z $I_h \simeq \sigma^3$, h^\pm oznacza naładowaną hybrydę izowektorową z $I_h \simeq \sigma^\pm$. Analogiczna notacja b^0, b^s, b^\pm i p^0, p^s, p^\pm była zastosowana także dla mezonów p i b , na które hybryda się rozpada.



Rysunek 25: Modelowanie sprzężenia (mieszania) sektora $q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda$ z pozostałymi sektorami Focka jako (w pierwszym rzędzie) sprzężenie z modelowym stanem złożonym z gluonu g_λ i efektywnego oktetu kolorowego $G_{h\lambda}$ (efektywnego rezonansu oktetowego).

Izoskalarna hybryda, rozważana wcześniej, składa się z kwarku i antykwarku o tym samym zapachu, zatem może zawierać składową $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ przez anihilację pary kwark–antykwark w gluon. Natomiast naładowana hybryda izowektorowa składa się z kwarku i antykwarku o różnych zapachach, zatem nie sprzęga się do stanu $|g_\lambda g_\lambda\rangle$. Jak pokazano powyżej, wzór na amplitudę rozpadu hybrydy z izospinem różni się tylko o stały czynnik od wzoru na amplitudę rozpadu dla hybrydy izoskalarnej. Tak więc wymagania symetrii amplitudy rozpadu narzucają takie same warunki na parametry funkcji falowych jak w pracach [42, 43]. Mieszanie stanów sektora $q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda$ i sektora $g_\lambda g_\lambda$ nie jest w stanie zatem wytlumaczyć kształtu hybrydy z niezerowym izospinem.

Po trzecie, sektor $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ nie jest jedynym sektorem Focka, który oddziaływać może z sektorem kwark–antykwark–gluon. Można rozważać także inne sektory Focka, które mają (jako całość) konfigurację singletu kolorowego. Dla różnych liczb kwantowych hybrydy różny może być zestaw sektorów Focka, które sprzęgają się z sektorem $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$.

Uwzględnienie efektów sprzęgania sektora $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ z innymi sektorami przestrzeni Focka pozwala, jak opisano dalej, wskazać drogę wyjścia w kierunku rozwiązania wszystkich przedstawionych w tym rozdziale problemów. Pełne rozwiązanie tego zagadnienia nie jest znane i z pewnością jest bardzo trudne. Można jednak zaproponować sposób modelowania sprzężenia $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ z innymi sektorami Focka.

4.9 Hipoteza rezonansu oktetowego $G_{h\lambda}$

Najprostszym możliwym opisem stanów, sprzęgających się z sektorem $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$, i mechanizmu sprzężenia jest opis za pomocą stanu dwucząstkowego $|g_\lambda G_{h\lambda}\rangle$ będącego singletem kolorowym, złożonego z gluonu g_λ i efektywnego rezonansu oktetowego $G_{h\lambda}$. Oktet ten sprzęga się z kwarkiem i antykwarkiem za pomocą efektywnego modelowego oddziaływania trójcząstkowego. Oddziaływanie to wprowadzić można

do równania własnego dla hybrydy, zapisanej w postaci $|h\rangle = |q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle + |g_\lambda G_{h\lambda}\rangle$. Na rysunku 25 została przedstawiona koncepcja tego modelu.

Liczby kwantowe efektywnego oktetu kolorowego $G_{h\lambda}$ nie są ograniczone do liczb kwantowych gluonu. W szczególności oktet kolorowy może się sprzęgać z parą kwark–antykwar w stanie $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ nawet jeśli para ta nie jest singletem izospinowym. Oznacza to, między innymi, że stan $|g_\lambda G_{h\lambda}\rangle$ może się sprzęgać z hybrydą o niezerowym izospinie, co nie było możliwe dla stanu $|g_\lambda g_\lambda\rangle$.

Efektywny oktet kolorowy może mieć inną masę niż gluon, a sprzężenie efektywnego oktetu kolorowego z parą kwark–antykwar może mieć różną postać efektywnego czynnika f_λ . Jako punkt startowy najprościej jednak przyjąć takie same parametry dla efektywnego oktetu kolorowego jak dla gluonu. Należy jednak pamiętać, że efektywny czynnik f_λ dla mieszania efektywnego oktetu kolorowego $G_{h\lambda}$ w modelowym stanie z parą kwark–antykwar może mieć szerokość większą od λ .

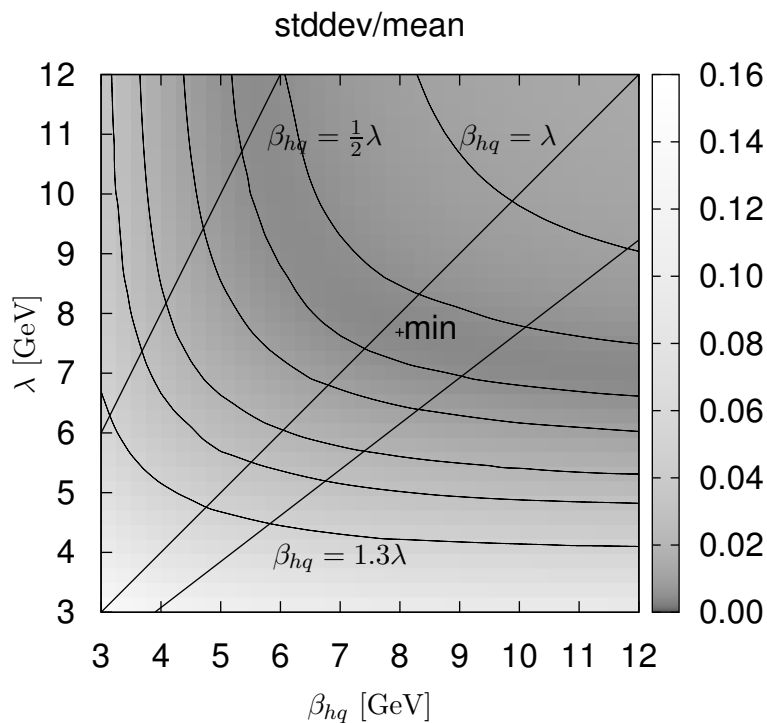
Przy tych założeniach można wykorzystać wprost przeprowadzone obliczenia mieszania sektora $q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda$ z sektorem $g_\lambda g_\lambda$ (sektorem dwucząstkowym), zmieniając interpretację stanu dwucząstkowego ze stanu gluon–gluon ($g_\lambda g_\lambda$) na gluon–rezonans oktetowy (oznaczany $g_\lambda G_{h\lambda}$).

Najważniejszą różnicą pomiędzy obliczeniami dla stanu dwu gluonów, a obliczeniami dla stanu gluon–oktet, jest to, że stan $g_\lambda G_{h\lambda}$ może nie sprzęgać się do stanu dwu mezonów za pomocą oddziaływania $H_{I\text{QCD}\lambda}$. Rozpad rezonansu oktetowego $G_{h\lambda}$ na parę kwark–antykwar następuje za pomocą składnika w modelowym hamiltonianie, który nie występuje w hamiltonianie QCD, ponieważ $G_{h\lambda}$ jest jedynie przybliżonym opisem efektywnym innych sektorów Focka niż $q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda$ w równaniu własnym dla stanu $|h\rangle$. O rezonansie oktetowym $G_{h\lambda}$ można również myśleć jako o wzbudzeniu stanu efektywnego gluonu g_λ . Wzbudzenie może wiązać się z niezerowym izospinem. Zatem naturalne wydaje się założenie, że stany te są ortogonalne, czyli że $\langle G_{h\lambda} | g_\lambda \rangle = 0$. Dzięki temu duża (większa niż 1/2) wartość P_{Gg} dla dużych λ nie stanowi problemu, jako że stan gluon–rezonans oktetowy nie daje wkładu do rozpadu hybrydy na dwa mezony za pośrednictwem $H_{I\text{QCD}\lambda}$.

Patrząc na wykres zależności efektywnej szerokości β_{hq}^{eff} od λ stanu hybrydy otrzymanego w wyniku mieszania na rysunku 23, widzimy jednak, że co prawda $\beta_{hq}^{\text{eff}} \sim \lambda$, ale czynnik proporcjonalności jest mniejszy od 1, bliski 1/2. Z analizy amplitudy rozpadu hybrydy parametrów modelu dostajemy, że łamanie symetrii obrotowej jest minimalne dla β_{hq} tej samej wielkości co λ , rzędu 4-8 GeV. Ponieważ ze względów technicznych została użyta redukcja wymiarów modelu mieszania z trzech do jednego, nie można użyć stanu będącego rozwiązaniem na stanu $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ do wyliczenia rozpadu hybrydy na dwa mezony. Nie można zatem bezpośrednio sprawdzić, czy istnieje takie λ , dla którego amplituda rozpadu otrzymanego stanu hybrydy spełnia żądania symetrii relatywistycznych.

Można jednak sprawdzić, czy w okolicach znalezionego minimum parametrów, stan hybrydy dla którego $\beta_{hq} = \frac{1}{2}\lambda$ spełnia z wystarczającą dokładnością wymagania symetrii.

Na rysunku 26 pokazano przykładowe oszacowanie stopnia odchylenia od symetrii obrotowej w zależności od β_{hq} (oś pozioma) i λ (oś pionowa) jednocześnie. Patrząc na linie oznaczone $\beta_{hq} = \lambda$ oraz $\beta_{hq} = \frac{1}{2}\lambda$ na tym wykresie widzimy, że wymagania



Rysunek 26: Zmiana stopnia łamania symetrii obrotowej jako funkcja parametru β_{hq} funkcji falowej hybrydy oraz parametru λ dla przypadku a) na wykresie 8, tzn. dla $S_h = \bar{u}\not{z}v$, z czynnikami $N \neq 1$, rozpad na dwa skalarnie mezony $J^{PC} = 0^{++}$. Optymalne wartości parametrów są dane w pierwszej kolumnie tabeli 3. Punkt oznaczony „min” wskazuje optymalne wartości parametrów. Oszacowanie łamania symetrii obrotowej, pokazane jako stopień szarości oraz za pomocą poziomic, określone jest na podstawie stosunku odchylenie standardowego („stddev”) zależności amplitudy rozpadu hybrydy od kąta θ do amplitudy uśrednionej po kącie θ („mean”).

symetrii relatywistycznych można spełnić także dla $\beta_{hq}^{\text{eff}} \simeq \frac{1}{2}\lambda$. Okupione jest to jednak koniecznością znacznego zwiększenia λ .

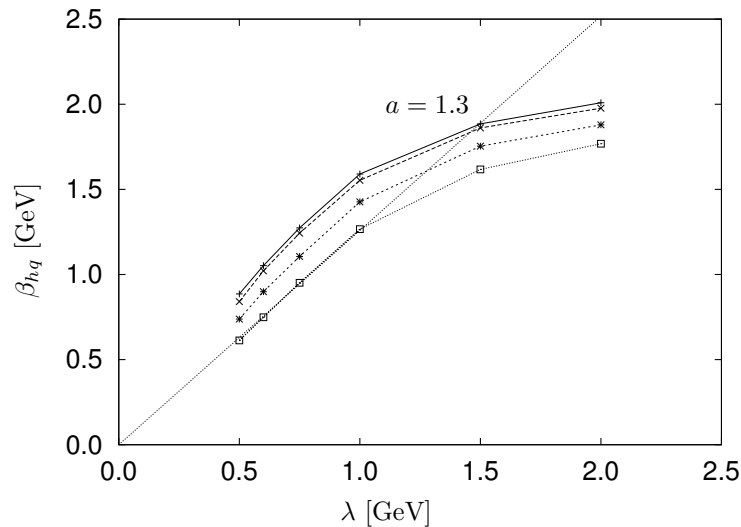
Jeśli λ jest dużo większe od skal energii w rozważanym zagadnieniu, wątpliwe staje się przybliżenie wycinania „okna” w hamiltonianie, patrz rozdział 2.3. Trudniej zatem uzasadnić przybliżenie minimalnej liczby składników na stany hybrydy i mezonów. Powstaje zatem pytanie, czy możliwe są alternatywne rozwiązania zamiast zwiększenia λ .

Należy zauważyć, że człon $H_{IG\lambda}$ w hamiltonianie modelowym, odpowiedzialny za mieszanie stanu $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ ze stanem $|g_\lambda G_{h\lambda}\rangle$, nie musi być dokładnie tej samej postaci co człon $H_{IQCD\lambda}$ w zrenormalizowanym hamiltonianie QCD, który jest odpowiedzialny za rozpad hybrydy.

W szczególności rozważmy efektywny czynnik $f_{G\lambda}$ w $H_{IG\lambda}$ postaci

$$f_{G\lambda} = \exp \left[-\frac{k_{hq}^2}{2\lambda^2} \right] \quad (4.65)$$

Na rysunku 27 przedstawiono zależność β_{hq}^{eff} od λ dla czynnika $f_{G\lambda}$ danego wzo-



Rysunek 27: Efektywna szerokość β_{hq}^{eff} stanu własnego o najniższej energii, dla czynnika $f_{G\lambda}$ danego wzorem (4.65), w zależności od szerokości λ czynnika podobieństwa, przy różnych wyborach wielkości energii renormalizacji $E(g) = E^*$. Ekstrapolacja liniowa (4.63) daje współczynnik proporcjonalności rzędu 1.3.

rem (4.65). Widać, że dopasowanie funkcji liniowej do ekstrapolacji dla dużych wartości parametru obcięcia, daje zależność liniową o stosunku bliskim jedności. Na rysunku 27 można odczytać wartość 1.3 stosunku β_{hq} do λ . Na rysunku 26 widać, że dla $\beta_{hq}/\lambda \sim 1.3$ można otrzymać zachowanie symetrii z dobrą dokładnością, nawet przy λ mniejszych niż otrzymano z minimalizacji.

Takie proste podstawienie funkcji gaussowskiej jako czynnika podobieństwa $f_{G\lambda}$ w hamiltonianie modelowym nie ma (dotychczas) uzasadnienia wynikającego z QCD. Ponadto użycie takiego czynnika podobieństwa wymaga, ze względu na wolniejszy

zanik elementów macierzowych modelowego hamiltonianu z różnicą energii mieszanych stanów, dużo większych wartości obciążenia przestrzeni stanów niż wymaga czynnik podobieństwa (4.53) używany w procedurze grupy renormalizacji. Zależność β_{hq}^{eff} od λ dla tej postaci czynnika podobieństwa w modelu została uzyskana dla małych λ i tylko ekstrapolowana do $\lambda = 5$ GeV.

Inną możliwością rozwiązania problemu, że w wyniku mieszania dostajemy $\beta_{hq}^{\text{eff}} \simeq \frac{1}{2}\lambda$ raczej niż $\beta_{hq}^{\text{eff}} \simeq \lambda$, jest zauważenie, że oddziaływanie $H_{G,q\bar{q}\lambda}$ z czynnikiem $f_{G\lambda}$ w modelu mieszania z innymi sektorami Focka, powstaje w wyniku złożenia co najmniej dwu oddziaływań z f_λ w zrenormalizowanym hamiltonianie QCD. „Splot” dwu czynników podobieństwa f_λ

$$f_{G\lambda} \sim f_\lambda \star f_\lambda \quad (4.66)$$

tworzyć mógłby efektywnie czynnik o szerokości 2λ

$$f_{G\lambda} \sim f_{2\lambda} \quad (4.67)$$

Gdyby taka zależność zachodziła, co jest prawdopodobne, to $\beta_{hq}^{\text{eff}} \simeq \frac{1}{2}\lambda_G$ w modelu oznaczałoby $\beta_{hq} \simeq \lambda$ w stanie hybrydy używanym do analizy rozpadu.

5 Podsumowanie i wnioski

Procedura grupy renormalizacji dla cząstek efektywnych (RGPEP) otwiera drogę do systematycznej analizy stanów związanych kwarków i gluonów w QCD. W tej pracy oceniamy perspektywy zastosowania tej metody do wyprowadzenia hamiltonianu efektywnego dla stanu związanego złożonego z kwarku, antykwarku i gluonu, zwanego hybrydą. Wcześniej znane wyniki [42, 43] sugerują, że metoda RGPEP może pozwolić w przyszłości znaleźć zastosowanie w rozwiązywaniu problemu hybrydy i powiązać QCD z jej modelami konstytuencyjnymi. Niniejsza praca jest pierwszym znanym autorowi krokiem w tym kierunku.

Obliczenia zostały przeprowadzone przy użyciu dynamiki hamiltonowskiej w sformułowaniu Diraca na froncie świetlnym. Ten wybór formy dynamiki pozwolił ominąć problem znalezienia stanu próżni, czyniąc możliwym opis hadronów za pomocą niewielkiej liczby cząstek. Ponadto symetria ze względu na pchnięcia Lorentza jest w tym podejściu symetrią ściśle spełnioną. Daje to możliwość opisu stanów cząstek poruszających się z wielkimi prędkościami, w tym produktów rozpadu hybrydy przy rozpadzie dużo powyżej progu.

Amplituda rozpadu skalarnej hybrydy na skalarnie mezony, jako wielkość fizyczna, musi być sferycznie symetryczna. Symetria obrotowa jest jednak w dynamice na froncie świetlnym symetrią dynamiczną. Wynika stąd, że oddziaływania nie mają jawnej symetrii obrotowej. Żądanie sferycznej symetrii amplitudy rozpadu hybrydy narzuca zatem warunki na stany cząstek biorących udział w rozpadzie.

W przedstawionych badaniach założono, że stan hybrydy i stany mezonów w rozpadzie hybrydy można przedstawić jako stany o minimalnej liczbie cząstek efektywnych. W tym ujęciu hybryda zawiera stan $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$, zaś mezony stany $|q_\lambda \bar{q}_\lambda\rangle$. Brak symetrii obrotowej zachodzi wówczas, gdy przynajmniej jedna z cząstek biorących udział w rozpadzie porusza się z relatywistycznymi prędkościami. Można jednak tak dobrać parametry funkcji falowych hybrydy i mezonów, aby sferyczna symetria amplitudy rozpadu hybrydy była zapewniona. Jakościowym warunkiem do spełnienia jest aby szerokość pary kwark–antykwark w przestrzeni pędów, charakteryzowana parametrem β_{hq} , była tego samego rzędu co szerokość λ czynnika kształtu w zre-normalizowanym hamiltonianie oddziaływania QCD. Ponadto zarówno β_{hq} jak i λ muszą być rzędu 4-5 GeV, czyli dużo większe niż pozostałe szerokości w rozważanych funkcjach falowych.

Badania wielu przypadków wieloma różnymi metodami uwzględniania spinu gluonu i różnych czynników spinowych mezonów dały taki sam obraz hybrydy. Oznacza to, że znaleziona struktura stanu hybrydy jest niezależna od spinu składników hybrydy i szczegółów funkcji falowych modelu.

Otrzymany obraz hybrydy, w którym gluon i ciasno związana para kwark–antykwark krążą wokół siebie, różni się od typowego wyobrażenia stanu hybrydy, gdzie gluon tworzy wzbudzoną strunę pomiędzy kwarkiem i antykwarkiem [22, 23, 24, 25]. Różni się on także od postaci funkcji falowych hybrydy, używanych w modelach konstytuencyjnych, gdzie szerokość β_{hq} jest tego samego rzędu co szerokość β_{hg} [13, 15]. Wobec przedstawionych różnic w budowie między hybrydą znaną w niniejszej pracy i jej typowym obrazem, nasuwa się pytanie, jaki efekt dynamiczny może być odpowiedzialny za tę nową postać hybrydy.

Jak można było przypuszczać, taki nietypowy obraz hybrydy mógłby powstawać dynamicznie według mechanizmu, w którym jeden z gluonów w stanie $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ zamienia się w parę kwark–antykwarik przez oddziaływanie o szerokości λ . Rachunek zaburzeń sugeruje, że powstała w ten sposób para kwark–antykwarik w hybrydzie będzie miała szerokość rzędu szerokości tego oddziaływania. Oczekiwano, że badania dynamicznego modelu mieszania stanu $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ ze stanem $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ pozwolą wyjaśnić w jaki sposób powstaje nowa postać hybrydy.

Przed przeprowadzeniem zaawansowanych obliczeń numerycznych, modelujących mechanizm mieszania, należało uzyskać jakościowy wgląd w możliwe efekty mieszania stanu $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ ze stanem $|g_\lambda g_\lambda\rangle$. W tym celu został stworzony i przeanalizowany prosty model matematyczny mieszania stanów 0– i 1–cząstkowego z oddziaływaniem separowalnym. Przedstawiony on został w rozdziale 4.2. Model ten daje się rozwiązać ściśle w postaci analitycznej. O ile niektóre właściwości rozwiązania tego modelu są charakterystyczne tylko dla niego, część właściwości jest ogólna i przenosi się na analizę mieszania stanów $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ i $|g_\lambda g_\lambda\rangle$. W szczególności spodziewać się można było, że korelacja pomiędzy zwiększaniem szerokości pędowej funkcji falowej w podukładzie 1–cząstkowym, a wielkością wkładu składowej 0–cząstkowej, jest ogólnym wnioskiem dla problemów mieszania różnych sektorów.

Obliczenia mieszania zostały przeprowadzone dla najprostszego przypadku cząstek skalarnych, co wynikało stąd, że relatywistyczne symetrie amplitudy rozpadu hybrydy są jakościowo niezależne od spinów cząstek i postaci czynników spinowych. Uproszczenie takie było konieczne w obliczeniach nieperturbacyjnych ze względów praktycznych. Sumaryczne efekty czynników spinowych zostały uwzględnione za pomocą dodatkowych efektywnych czynników zależnych od pędu.

W obliczeniach szczegółowych oddziaływania wiążące pomiędzy kwarkami oraz kwarkiem a gluonem przybliżono za pomocą potencjału oscylatora harmonicznego z czynnikiem kolorowym. Oddziaływanie mieszające zostało wyliczone w sposób relatywistyczny, na froncie świetlnym. Znalezione numeryczne rozwiązanie modelu mieszania stanu kwark–antykwarik–gluon ze stanem gluon–gluon potwierdza możliwość dynamicznego wygenerowania stanu hybrydy o kształcie wymaganym przez symetrie relatywistyczne (amplitudy rozpadu). Stan własny będący rozwiązaniem modelu mieszania sektora $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ z sektorem $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ ma (w podukładzie $q\bar{q}g$) szerokość β_{hq} stanu rosnącą wraz ze wzrostem λ .

Równocześnie przeprowadzone obliczenia ujawniły dwa problemy. Po pierwsze, aby uzyskać duże β_{hq} , otrzymany w wyniku mieszania stan musi zawierać dużą domieszkę stanu $|g_\lambda g_\lambda\rangle$. Oznaczałoby to, że w stanie hybrydy nie dominuje składowa $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$, jak założone zostało przy analizie rozpadu hybrydy. Po drugie, mieszanie $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ z $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ nie zachodzi dla stanów hybrydy, w których para $q_\lambda \bar{q}_\lambda$ ma liczby kwantowe niemożliwe do uzyskania przez gluony. Przykładem takiego stanu hybrydy, który nie miesza się ze stanem $|g_\lambda g_\lambda\rangle$, jest stan hybrydy o niezerowym izospinie, na który warunki symetrii rozpadu także narzucają nietypową postać.

Powyższe zastrzeżenia powodują, że wyjaśnienia powstawania znalezionej postaci hybrydy nie można szukać wyłącznie za pomocą mieszania stanu $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ ze stanem $|g_\lambda g_\lambda\rangle$. Pozostając przy idei, że wymagany nietypowy obraz hybrydy powstaje w wyniku dynamicznego mieszania sektorów Focka, wymagany nietypowy obraz hybrydy mógłby być jednak generowany przez sprzężenie z innymi sektorami. Pełne

rozwiązanie problemu mieszania jest poza możliwościami współczesnej matematyki i metod numerycznych.

Dla przybliżonego rozwiązania tego problemu, w rozdziale 4.9 sprzężenie z pozostałymi sektorami Focka modelowano za pomocą sprzężenia z dwucząstkowym stanem związanym $|g_\lambda G_{h\lambda}\rangle$, złożonym z gluonu g_λ i z efektywnego rezonansu oktetowego $G_{h\lambda}$. Stan efektywnego kolorowego rezonansu oktetowego mógłby pełnić rolę podobną np. do rezonansu σ w efektywnej teorii pola (patrz np. [62, 63]).

Obliczenia przeprowadzone w modelu sprzęgania przy użyciu $|g_\lambda G_{h\lambda}\rangle$ sugerują, że mieszanie z pozostałymi sektorami Focka może generować stan hybrydy spełniający symetrię rozpadu. Mieszanie stanu $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ ze stanem $|g_\lambda G_{h\lambda}\rangle$ daje β_{hq} rzędu λ w stanie własnym. Postulowany stan rezonansu oktetowego $G_{h\lambda}$ może mieć inne liczby kwantowe niż gluon. Oznacza to między innymi, że mieszanie zachodzi także dla hybrydy o niezerowym izospinie.

Oddziaływanie mieszające stan $G_{h\lambda}$ z parą kwark–antykwar, odpowiedzialne za mieszanie stanu $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ ze stanem $|g_\lambda G_{h\lambda}\rangle$, jest efektywnym oddziaływaniem pojawiającym się w modelowym hamiltonianie mieszania. Zatem stan $G_{h\lambda}$ nie sprzęga się do stanu g_λ za pośrednictwem $H_{I\text{QCD}\lambda}$. Przy braku tego sprzęgania $G_{h\lambda}$ do g_λ , stan złożony z gluonu i efektywnego oktetu kolorowego $|g_\lambda G_{h\lambda}\rangle$ jest „niewidoczny” w rozpadzie hybrydy. Rozpad hybrydy jest zatem zdominowany przez sektor $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$, nawet jeśli prawdopodobieństwo P_{gG} sektora $|g_\lambda G_{h\lambda}\rangle$ w stanie hybrydy jest większe niż $1/2$.

W modelu sprzęgania przy użyciu $|g_\lambda G_{h\lambda}\rangle$ można także uzyskać stosunek β_{hq}^{eff} do λ_G około 1, zamiast jak w przypadku mieszania z $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ około 0.5 (co wymaga zwiększenia λ , aby pozostać w obszarze parametrów dla których symetria amplitudy rozpadu jest dobrze zachowana). Jest to efektem uwzględnienie czynnika kształtu rezonansu oktetowego w postaci $f_\lambda \star f_\lambda = f_{2\lambda} = f_{G\lambda}$ w modelowym hamiltonianie mieszania. ($f_\lambda \star f_\lambda$ oznacza tutaj „spot” dwu czynników podobieństwa.)

Powyżej opisane wyniki sugerują, że hybryda o kształcie zadanym przez wymagania symetrii relatywistycznych amplitudy rozpadu może być generowana przez mieszanie stanu $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ z pozostałymi sektorami Focka.

Obliczenia w niniejszej pracy przeprowadzone zostały dla najprostszego przypadku skalarnej hybrydy, rozpadającej się na dwa skalarnie mezony, lub na dwa pseudoskalarnie mezony. Z doświadczalnego punktu widzenia interesująca jest hybryda o egzotycznych liczbach kwantowych $J^{PC} = 1^{-+}$. Zastosowana metoda analizy symetrii amplitudy rozpadu mogłaby być zastosowana także i do tego przypadku. Dla hybrydy 1^{-+} należałoby zapewne minimalizować odstępstwo amplitudy rozpadu hybrydy od kształtu wymaganego przez liczby kwantowe cząstek biorących udział w rozpadzie. Analiza taka byłaby jednak dużo trudniejsza, chociaż możliwa.

Hipoteza efektywnego rezonansu oktetowego jako ansatzu modelującego oddziaływanie z innymi sektorami Focka wymaga dalszych badań. W szczególności należałoby wyjaśnić, czy hipoteza ta może być zastosowana do innych zagadnień oddziaływania pomiędzy wieloma sektorami Focka w QCD. Zagadnienie, czy teoretyczne rezonanse oktetowe mogłyby być zauważone eksperymentalnie, wymaga zbadania.

6 Spis literatury

Literatura

- [1] R. P. Feynman. *Phys. Rev. Lett.*, **23**, 1415 (1969).
- [2] H. J. Lipkin. *Phys. Rept.*, **8**, 173 (1973).
- [3] W.-M. Yao, C. Amsler, D. Asner, R. Barnett, *et al.* *Journal of Physics G*, **33**, 1 (2006).
- [4] O. W. Greenberg, H. J. Lipkin. *Nucl. Phys.*, **A370**, 349 (1981).
- [5] D. P. Stanley, D. Robson. *Phys. Rev.*, **D21**, 3180 (1980).
- [6] S. Godfrey, N. Isgur. *Phys. Rev.*, **D32**, 189 (1985).
- [7] K. G. Wilson. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, **140**, 3 (2005).
- [8] S. Durr, *et al.* *Science*, **322**, 1224 (2008).
- [9] F. Wilczek. *Nature*, **456**, 449 (2008).
- [10] S. D. Głazek, K. G. Wilson. *Phys. Rev.*, **D48**, 5863 (1993).
- [11] S. D. Głazek, K. G. Wilson. *Phys. Rev.*, **D49**, 4214 (1994).
- [12] S. D. Głazek. *Acta Phys. Polon.*, **B29**, 1979 (1998).
- [13] Y. S. Kalashnikova. *Z. Phys.*, **C62**, 323 (1994).
- [14] F. Iddir, S. Safir, O. Pene. *Phys. Lett.*, **B433**, 125 (1998).
- [15] F. Iddir, L. Semmlala (2002). hep-ph/0211289.
- [16] D. Horn, J. Mandula. *Phys. Rev.*, **D17**, 898 (1978).
- [17] K. G. Wilson, *et al.* *Phys. Rev.*, **D49**, 6720 (1994), i referencje tamże.
- [18] P. Lacock, C. Michael, P. Boyle, P. Rowland. *Phys. Lett.*, **B401**, 308 (1997).
- [19] C. W. Bernard, *et al.* *Phys. Rev.*, **D56**, 7039 (1997).
- [20] C. McNeile, C. Michael, P. Pennanen. *Phys. Rev.*, **D65**, 094505 (2002).
- [21] C. McNeile, C. Michael. *Phys. Rev.*, **D73**, 074506 (2006).
- [22] N. Isgur, J. E. Paton. *Phys. Rev.*, **D31**, 2910 (1985).
- [23] R. Kokoski, N. Isgur. *Phys. Rev.*, **D35**, 907 (1987).
- [24] F. E. Close, P. R. Page. *Nucl. Phys.*, **B443**, 233 (1995).
- [25] E. S. Swanson, A. P. Szczepaniak. *Phys. Rev.*, **D56**, 5692 (1997).

- [26] P. R. Page, E. S. Swanson, A. P. Szczepaniak. *Phys. Rev.*, **D59**, 034016 (1999).
- [27] A. P. Szczepaniak, E. S. Swanson. *Phys. Rev.*, **D65**, 025012 (2002).
- [28] N. J. Poplawski, A. P. Szczepaniak, J. T. Londergan. *Phys. Rev.*, **D71**, 016004 (2005).
- [29] K. J. Juge, J. Kuti, C. J. Morningstar. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, **63**, 326 (1998).
- [30] K. J. Juge, J. Kuti, C. J. Morningstar. *Phys. Rev. Lett.*, **82**, 4400 (1999).
- [31] P. A. M. Dirac. *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 392 (1949).
- [32] S. J. Brodsky, H.-C. Pauli, S. S. Pinsky. *Phys. Rept.*, **301**, 299 (1998).
- [33] S. D. Głazek. *Phys. Rev.*, **D60**, 105030 (1999).
- [34] S. D. Głazek. *Phys. Rev.*, **D63**, 116006 (2001). i referencje tamże.
- [35] S. D. Głazek, J. Młynik. *Phys. Rev.*, **D67**, 045001 (2003).
- [36] S. D. Głazek, J. Młynik. *Acta Phys. Polon.*, **B35**, 723 (2004).
- [37] F. Iddir, A. S. Safir. *Phys. Lett.*, **B507**, 183 (2001).
- [38] N. Isgur, R. Kokoski, J. E. Paton. *Phys. Rev. Lett.*, **54**, 869 (1985).
- [39] F. E. Close, H. J. Lipkin. *Phys. Lett.*, **B196**, 245 (1987).
- [40] C. Amsler, N. A. Tornqvist. *Phys. Rept.*, **389**, 61 (2004).
- [41] D. V. Amelin, *et al.* *Phys. Lett.*, **B356**, 595 (1995).
- [42] S. D. Głazek, A. P. Szczepaniak. *Phys. Rev.*, **D67**, 034019 (2003).
- [43] S. D. Głazek, J. Narębski. *Acta Phys. Polon.*, **B37**, 389 (2006).
- [44] P. Danielewicz, J. M. Namysłowski. *Phys. Lett.*, **B81**, 110 (1979).
- [45] P. Lacock, C. Michael, P. Boyle, P. Rowland. *Phys. Rev.*, **D54**, 6997 (1996).
- [46] C. W. Bernard, *et al.* *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, **53**, 228 (1997). Talk given at Lattice 96: 14th International Symposium on Lattice Field Theory, St. Louis, MO, 4–8 Jun 1996.
- [47] G. P. Lepage. *J. Comput. Phys.*, **27**, 192 (1978).
- [48] G. P. Lepage. *VEGAS: An Adaptive Multi-dimensional Integration Program*. CLNS-80/447, March 1980.
- [49] M. Galassi, J. Davies, J. Theiler, B. Gough, *et al.* *GNU Scientific Library: Reference Manual*. Network Theory Limited (2009). <http://www.gnu.org/software/gsl/>.

- [50] W. Press, B. Flannery, S. Teukolsky, W. Vetterling. *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press (1992).
- [51] L. Ingber. *Math. Comput. Modelling*, **11**, 457 (1988). http://www.ingber.com/asa89_vfsr.pdf.
- [52] L. Ingber. *Math. Comput. Modelling*, **18**, 29 (1993). http://www.ingber.com/asa93_savpt.pdf.
- [53] S. D. Glazek, K. G. Wilson. *Phys. Rev.*, **D57**, 3558 (1998).
- [54] M. Brisudová, R. J. Perry. *Phys. Rev.*, **D54**, 1831 (1996).
- [55] S. D. Głazek. *Phys. Rev.*, **D69**, 065002 (2004).
- [56] S. D. Głazek, J. Młynik. *Phys. Rev.*, **D74**, 105015 (2006).
- [57] J. Narębski. *Mod. Phys. Lett.*, **A19**, 307 (2004).
- [58] H. J. Lipkin. *Phys. Lett.*, **B45**, 267 (1973).
- [59] R. P. Feynman, M. Kislinger, F. Ravndal. *Phys. Rev.*, **D3**, 2706 (1971).
- [60] R. Piessens, E. de Doncker-Kapenga, C. Ueberhuber, D. Kahaner. *QUADPACK: A Subroutine Package for Automatic Integration*. Springer Verlag (1983).
- [61] E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, S. Blackford, *et al.* *LAPACK Users' guide (third ed.)*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA (1999). <http://www.netlib.org/lapack/lug/>.
- [62] M. Gell-Mann, M. Levy. *Nuovo Cim.*, **16**, 705 (1960).
- [63] S. Weinberg. *Phys. Rev. Lett.*, **18**, 188 (1967).

A Notacja położeń i pędów na froncie świetlnym

Współrzędne frontu świetlnego zdefiniowane są następująco:

$$x^+ = x^0 + x^3, \quad x^- = x^0 - x^3, \quad x^\perp = (x^1, x^2) \quad (\text{A.1})$$

Jak można łatwo zauważyć, p^+ zdefiniowane analogicznym wzorem jest nieujemne, $p^+ > 0$.

Niezerowe składowe tensora metrycznego $g^{\mu\nu}$ na froncie świetlnym to $g^{+-} = g^{-+} = 2$ oraz $g^{11} = g^{22} = 1$. Metryka na froncie świetlnym

$$g_{\mu\nu} = \begin{matrix} & + & - & 1 & 2 \\ + & \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & & & \\ - & & & & \\ 1 & & & & \\ 2 & & & & \end{matrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{matrix} & + & - & 1 & 2 \\ + & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & & & \\ - & & & & \\ 1 & & & & \\ 2 & & & & \end{matrix}. \quad (\text{A.2})$$

Iloczyn skalarny dwu czterowektorów a i b określony jest więc wzorem

$$ab = \frac{1}{2}a^+b^- + \frac{1}{2}a^-b^+ - \mathbf{a}^\perp \mathbf{b}^\perp. \quad (\text{A.3})$$

Pochodne cząstkowe

$$\partial^\pm = 2\partial_\mp = 2\frac{\partial}{\partial x^\pm}. \quad (\text{A.4})$$

Dla dowolnych dwóch pędów cząstek p_1 i p_2 możemy wprowadzić rozkład na pęd całości P^μ oraz pęd względny x, κ^\perp :

$$P^{+,\perp} = p_1^{+,\perp} + p_2^{+,\perp} \quad (\text{A.5})$$

$$x_1 = \frac{p_1^+}{P^+} \quad (\text{A.6})$$

$$\kappa^\perp = \frac{p_2^+ p_1^\perp - p_1^+ p_2^\perp}{P^+} \quad (\text{A.7})$$

Zmiana ta wiąże się ze zmianą całkowania z $[p_1 p_2]$ na $[P][x\kappa]$, co pozwala zazwyczaj na rozdzielenie zmiennych

$$[p_1 p_2] = [P][x\kappa] \quad (\text{A.8})$$

gdzie $[x\kappa]$ jest dane przez

$$[x\kappa] = \frac{d^2 \kappa^\perp dx}{16\pi^3 x(1-x)} \Theta(x)\Theta(1-x) \quad (\text{A.9})$$

B Spinory na froncie świetlnym

Spinory których używano w niniejszej pracy, zdefiniowane są wzorami

$$u_{m\rho\lambda} = B(p, m) u_{0\lambda}, \quad v_{m\rho\lambda} = B(p, m) v_{0\lambda}, \quad (\text{B.1})$$

gdzie operator $B(p, m)$

$$B(p, m) = \frac{1}{\sqrt{mp^+}} [\Lambda_+ p^+ + \Lambda_- (m + \alpha^\perp p^\perp)] \quad (\text{B.2})$$

jest reprezentacją pchnięcia, które zmienia masę m w stanie spoczynku w czteropęd p . Spinory kwarków w stanie spoczynku $u_{0\lambda}$ dane są przez

$$u_{0\uparrow} = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \chi_+ \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_{0\downarrow} = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \chi_- \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

a dla antykwarków w stanie spoczynku $v_{0\lambda}$ przez

$$v_{0\uparrow} = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_- \end{pmatrix}, \quad v_{0\downarrow} = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 0 \\ -\chi_+ \end{pmatrix}, \quad (\text{B.4})$$

gdzie χ_\pm są dwuskładnikowymi spinorami, $\chi_+ = (1, 0)$ i $\chi_- = (0, 1)$. Używamy notacji w której $\Lambda_\pm = \frac{1}{2}\gamma_0\gamma^\pm$, gdzie $\gamma^\pm = \gamma^0 \pm \gamma^3$.

C Szczegóły obliczeniowe wyliczania rozpadu hybrydy

Miara całkowania po pędach mezonu, oznaczona przez $[k_1 k_2]$ albo po prostu [12], wynosi

$$\frac{dk_1^+ d^2 k_1^\perp}{2(2\pi)^3 k_1^+} \frac{dk_2^+ d^2 k_2^\perp}{2(2\pi)^3 k_2^+} = \frac{dx_{12} d^2 k_{12}^\perp}{2(2\pi)^3 x_{12}(1-x_{12})} \frac{dP_{12}^+ d^2 P_{12}^\perp}{2(2\pi)^3 P_{12}^+}. \quad (\text{C.1})$$

Jako funkcja trójpędu względnego \vec{k}_{12} , miara całkowania dla dwu składników z tą samą masą m_q dana jest przez

$$\frac{dx_{12} d^2 k_{12}^\perp}{2(2\pi)^3 x_{12}(1-x_{12})} = \frac{4d^3 \vec{k}_{12}}{2(2\pi)^3 \mathcal{M}_{12}}. \quad (\text{C.2})$$

Zatem,

$$N_{pm}(\vec{k}_{12}) = \sqrt{\frac{\mathcal{M}_{12}}{2m_q}}. \quad (\text{C.3})$$

Podobnie,

$$N_{ps}(\vec{k}_{12}) = \sqrt{\frac{1}{\text{Tr} [S_p^\dagger(1, 2) S_p(1, 2)]}}. \quad (\text{C.4})$$

W równaniu normalizacji dla hybrydy mamy następującą miarę całkowania po trzech cząstkach

$$\prod_{i=1}^3 \frac{dk_i^+ d^2 k_i^\perp}{16\pi^3 k_i^+} = \frac{4d^3 k_q}{2(2\pi)^3 \mathcal{M}_q} \frac{d^3 k_g \mathcal{M}_{qg}}{2(2\pi)^3 \sqrt{m_g^2 + k_g^2} \sqrt{\mathcal{M}_q^2 + k_g^2}}. \quad (\text{C.5})$$

Zatem,

$$N_{hs}(\vec{k}_q, \vec{k}_g) = \sqrt{\frac{\mathcal{M}_q}{2m_q}} \sqrt{\frac{2m_q + m_g}{\mathcal{M}_{qg}}} \sqrt{\frac{\sqrt{m_g^2 + \vec{k}_g^2}}{m_g}} \sqrt{\frac{\sqrt{\mathcal{M}_q^2 + \vec{k}_g^2}}{2m_q}}, \quad (\text{C.6})$$

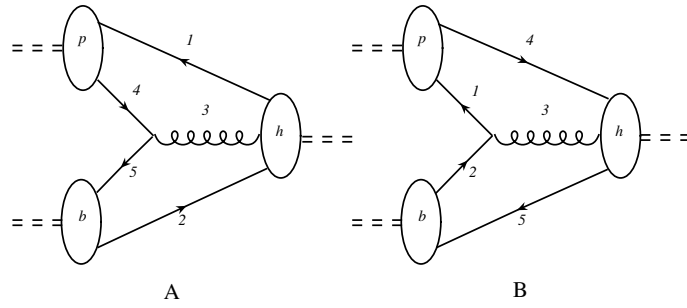
oraz

$$N_{hs}(\vec{k}_q, \vec{k}_g) = \sqrt{\frac{1}{\sum_{\text{pol}} \text{Tr} [S_h^\dagger(1, 2, 3) S_h(1, 2, 3)]}}, \quad (\text{C.7})$$

gdzie \sum_{pol} oznacza sumę po dwu poprzecznych (po dwu fizycznych) polaryzacjach gluonu.

Amplituda rozpadu hybrydy na dwa mezony wynosi

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(p, b, h) &= (-1) \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{g_\lambda}{(16\pi^3)^2} \int \frac{dx_{14} d^2 \kappa_{14}^\perp}{x_{14}(1-x_{14})} \int \frac{dx_{52} d^2 \kappa_{52}^\perp}{x_{52}(1-x_{52})} \\ &\times N_p N_b N_h \psi_p^*(1, 4) \psi_b^*(5, 2) [\mathfrak{A}(1, 2, 3, 4, 5) + \mathfrak{B}(1, 2, 3, 4, 5)] \\ &= -\frac{16}{3} \frac{g_\lambda}{(16\pi^3)^2} \int \frac{d^3 k_{52}}{\mathcal{M}_b} \int \frac{d^3 k_{14}}{\mathcal{M}_p} N_p N_b N_h \psi_p^*(\vec{k}_{14}) \psi_b^*(\vec{k}_{52}) \\ &\times [\mathfrak{A}(1, 2, 4, 5) + \mathfrak{B}(1, 2, 4, 5)], \end{aligned}$$



Rysunek 28: Amplituda rozpadu hybrydy na dwa mezony p (lekki) i b (ciężki).

gdzie

$$\mathfrak{A}(1, 2, 4, 5) = \frac{1}{x_3} T_A(1, 2, 3, 4, 5) A(1, 2, 3, 4, 5) \Big|_{k_3=k_4+k_5}, \quad (\text{C.8})$$

$$\mathfrak{B}(1, 2, 4, 5) = \frac{1}{x_3} T_B(1, 2, 3, 4, 5) B(1, 2, 3, 4, 5) \Big|_{k_3=k_1+k_2}, \quad (\text{C.9})$$

$$A(1, 2, 3, 4, 5) = \psi_h(1, 2, 3) f_\lambda(\mathcal{M}_{45}^2), \quad (\text{C.10})$$

$$B(1, 2, 3, 4, 5) = \psi_h(5, 4, 3) f_\lambda(\mathcal{M}_{12}^2), \quad (\text{C.11})$$

zaś czynniki spinowe w amplitudzie rozpadu są dane przez

$$T_A(1, 2, 3, 4, 5) = \text{Tr} \left[S_p^\dagger(1, 4) S_h(1, 2, 3) S_b^\dagger(5, 2) S_{QCD}(5, 4, 3) \right], \quad (\text{C.12})$$

$$T_B(1, 2, 3, 4, 5) = \text{Tr} \left[S_p^\dagger(1, 4) S_{QCD}(1, 2, 3) S_b^\dagger(5, 2) S_h(5, 4, 3) \right]. \quad (\text{C.13})$$

Części A i B odnoszą się do dwu możliwych ustawień kwarków pokazanych na rysunku 28. S_{QCD} jest czynnikiem spinowym pochodzącym z członu oddziaływania w hamiltonianie QCD:

$$\chi_{s_1}^\dagger S_{QCD}(1, 2, 3) \chi_{s_2} = \bar{u}_1 \varepsilon_3^\mu \gamma_\mu v_2. \quad (\text{C.14})$$

W obu częściach amplitudy, A i B , mamy $x_p = p^+/h^+$, $x_b = b^+/h^+ = 1 - x_p$. Dla mezonu p , mamy $\vec{k}_{14} \equiv \vec{k}_p$, tak więc $\mathcal{M}_{14} \equiv \mathcal{M}_p = 2\sqrt{m_q^2 + \vec{k}_p^2}$, i zachodzą następujące związki:

$$x_{14} = (\sqrt{m_q^2 + \vec{k}_p^2} + k_p^3)/\mathcal{M}_p, \quad (\text{C.15})$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{14} x_p, & k_1^+ &= x_{14} p^+, & k_1^\perp &= x_{14} p^\perp + k_p^\perp, \\ x_4 &= (1 - x_{14}) x_p, & k_4^+ &= (1 - x_{14}) p^+, & k_4^\perp &= (1 - x_{14}) p^\perp - k_p^\perp. \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

W mezonie b , mamy $\vec{k}_{52} \equiv \vec{k}_b$, zatem $\mathcal{M}_b \equiv \mathcal{M}_{52} = 2\sqrt{m_q^2 + \vec{k}_b^2}$, i analogicznymi zależnościami są:

$$x_{52} = (\sqrt{m_q^2 + \vec{k}_b^2} + k_b^3)/\mathcal{M}_b, \quad (\text{C.17})$$

$$\begin{aligned} k_5^+ &= x_{52}b^+, & x_5 &= x_{52}x_b, & k_5^\perp &= x_{52}b^\perp + k_b^\perp, \\ k_2^+ &= (1 - x_{52})b^+, & x_2 &= (1 - x_{52})x_b, & k_2^\perp &= (1 - x_{52})b^\perp - k_b^\perp. \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

Wyliczając masę niezmienniczą kwarków w hybrydzie i w wierzchołku oddziaływania odpowiedzialnym za rozpad hybrydy, dostajemy

$$\mathcal{M}_{12}^2 = (x_1 + x_2) \left[\frac{k_1^{\perp 2} + m_q^2}{x_1} + \frac{k_2^{\perp 2} + m_q^2}{x_2} \right] - (k_1^\perp + k_2^\perp)^2, \quad (\text{C.19})$$

oraz

$$\mathcal{M}_{54}^2 = (x_5 + x_4) \left[\frac{k_5^{\perp 2} + m_q^2}{x_5} + \frac{k_4^{\perp 2} + m_q^2}{x_4} \right] - (k_5^\perp + k_4^\perp)^2. \quad (\text{C.20})$$

Trójwektory pędu względnego: \vec{k}_{12} dla mezonów, oraz \vec{k}_{hq} i \vec{k}_{hg} dla hybrydy są zdefiniowane przy użyciu następującego warunku:

$$\left(\sqrt{\vec{k}^2 + m_1^2} + \sqrt{\vec{k}^2 + m_2^2} \right)^2 = \frac{\kappa^2 + m_1^2}{x} + \frac{\kappa^2 + m_2^2}{1-x} = \mathcal{M}^2, \quad (\text{C.21a})$$

$$\vec{k}^\perp = \kappa. \quad (\text{C.21b})$$

Dla $m_1 = m_2 = m$, otrzymujemy

$$4 \left(\vec{k}^2 + m^2 \right) = \frac{\kappa^2 + m^2}{x(1-x)} = \mathcal{M}^2, \quad (\text{C.22a})$$

$$\vec{k}^\perp = \kappa. \quad (\text{C.22b})$$

W części A amplitudy rozpadu, uzyskujemy

$$\vec{k}_q^2 = \mathcal{M}_{12}^2/4 - m_q^2, \quad (\text{C.23})$$

oraz

$$\vec{k}_g^2 = \frac{[\mathcal{M}_{123}^2 - (\mathcal{M}_{12} + m_g)^2][\mathcal{M}_{123}^2 - (\mathcal{M}_{12} - m_g)^2]}{4\mathcal{M}_{123}^2}, \quad (\text{C.24})$$

gdzie

$$\mathcal{M}_{123}^2 = \frac{k_1^{\perp 2} + m_q^2}{x_1} + \frac{k_2^{\perp 2} + m_q^2}{x_2} + \frac{(k_1 + k_2)^{\perp 2} + m_g^2}{1 - x_1 - x_2} - (k_1 + k_2 + k_3)^{\perp 2}. \quad (\text{C.25})$$

Podobnie w części B :

$$\vec{k}_q^2 = \mathcal{M}_{54}^2/4 - m_q^2, \quad (\text{C.26})$$

oraz

$$\vec{k}_g^2 = \frac{[\mathcal{M}_{543}^2 - (\mathcal{M}_{54} + m_g)^2][\mathcal{M}_{543}^2 - (\mathcal{M}_{54} - m_g)^2]}{4\mathcal{M}_{543}^2}, \quad (\text{C.27})$$

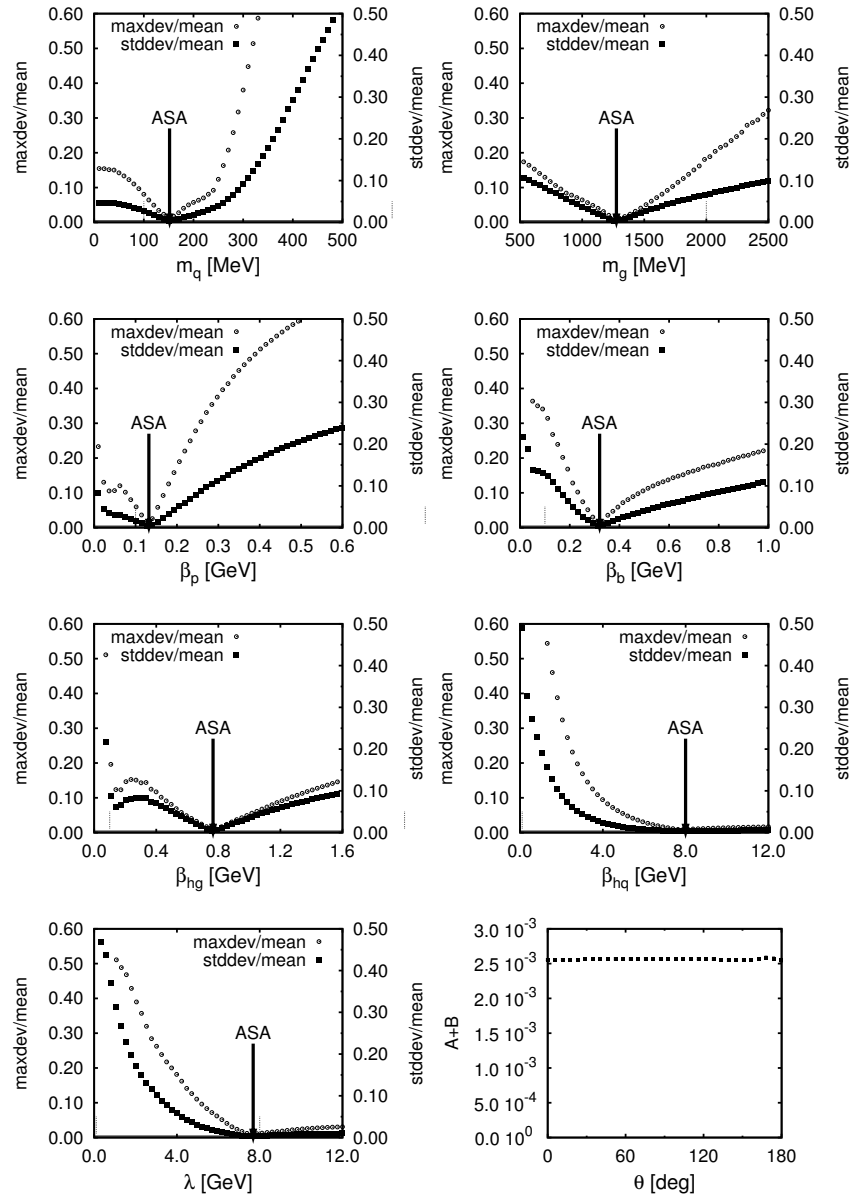
gdzie

$$\mathcal{M}_{543}^2 = \frac{k_5^{\perp 2} + m_q^2}{x_5} + \frac{k_4^{\perp 2} + m_q^2}{x_4} + \frac{(k_5 + k_4)^{\perp 2} + m_g^2}{1 - x_5 - x_4} - (k_5 + k_4 + k_3)^{\perp 2}. \quad (\text{C.28})$$

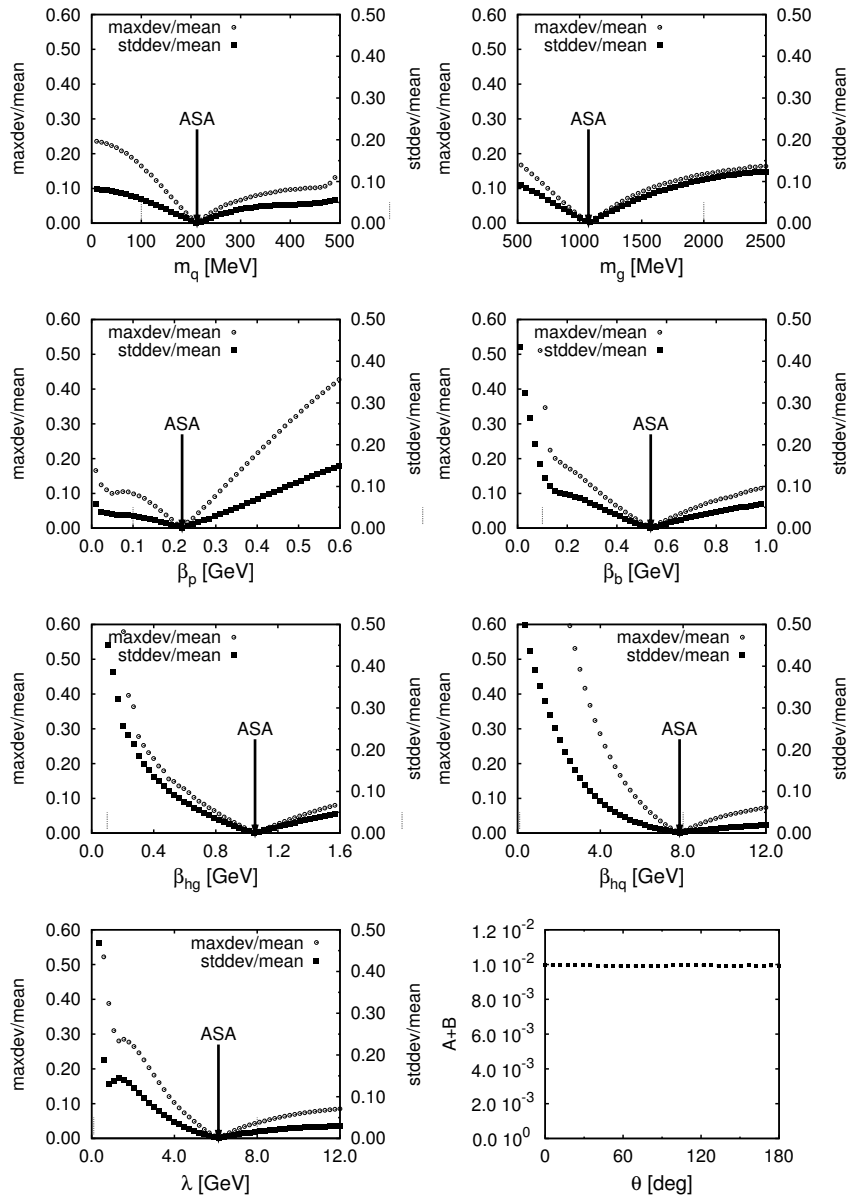
D Wybrane przykłady analizy rozpadu hybrydy

Ten przypis przedstawia przykłady numerycznych dowodów które zgromadziliśmy dla wszystkich studiowanych przypadków (wiele więcej niż podane tutaj). Wykresy wskazują jak oszacowania stopnia łamania symetrii obrotowej: „stddev” (odchylenie standardowe) oraz „maxdev” (maksymalna wartość bezwzględna odchylenia), oba w stosunku do amplitudy uśrednionej po kącie θ , zmieniają się w okolicach globalnego minimum gdy zmieniamy tylko jeden z parametrów funkcji falowych lub szerokość efektywnego hamiltonianu λ . Zmieniany parametr pokazany jest na osi poziomej, zaś oszacowanie odstępstwa od symetrii na osi pionowej, „stddev” na osi po prawej stronie (wykreślone za pomocą czarnych kwadratów), „maxdev” po lewej stronie (wykreślone za pomocą okręgów).

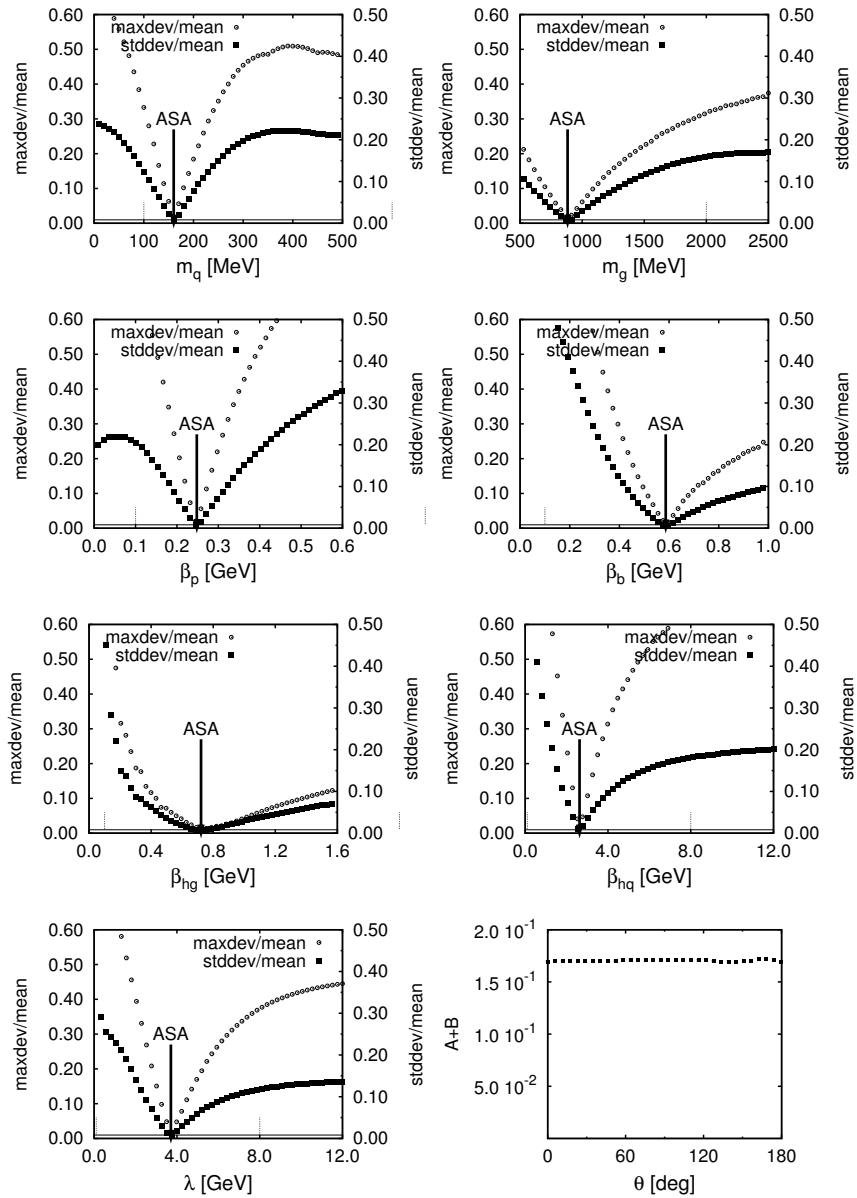
Przykład ten ilustruje dominującą cechę, to jest że parametry β_{hq} i λ są silnie ze sobą skorelowane i dużo większe niż pozostałe parametry. Przykład ten ilustruje nasze uzasadnienie dla wniosku, że parametry β_{hq} i λ muszą oba być większe niż wszystkie pozostałe parametry: minimum w tych parametrach wygląda jak szeroka dolina otwarta w kierunku wysokich wartości tych parametrów. Pozostałe cztery przykłady pokazują przypadki z różnymi czynnikami spinowymi, zawsze dla $N = 1$.



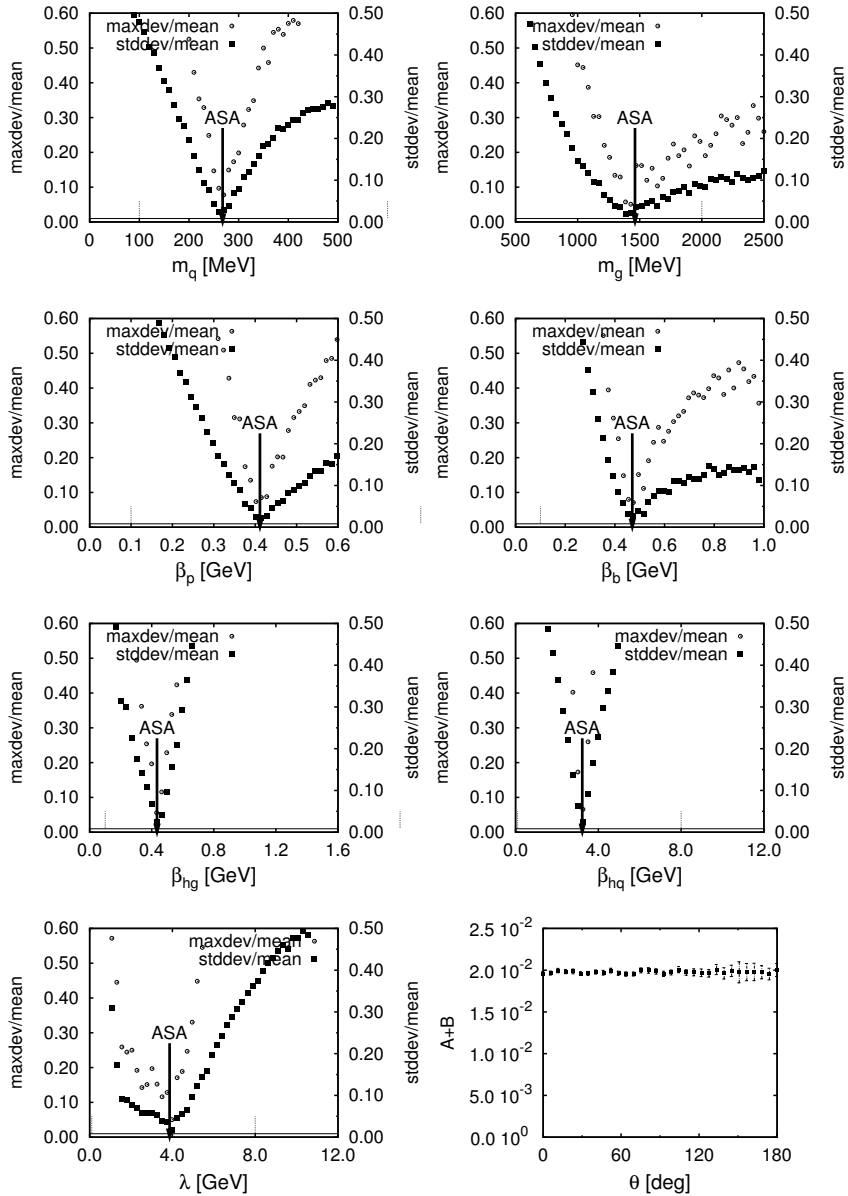
Rysunek 29: Zmiana stopnia łamania symetrii obrotowej jako funkcja parametrów funkcji falowych dla przypadku a) na wykresie 8, tzn. dla $S_h = \bar{u}\not{z}v$, z czynnikami $N \neq 1$, rozpad na dwa skalarnie mezony $J^{PC} = 0^{++}$. Optymalne wartości parametrów są dane w pierwszej kolumnie tabeli 3. Strzałka oznaczona „ASA” wskazuje optymalne wartości parametrów. Ostatni wykres pokazuje amplitudę rozpadu dla parametrów z minimum.



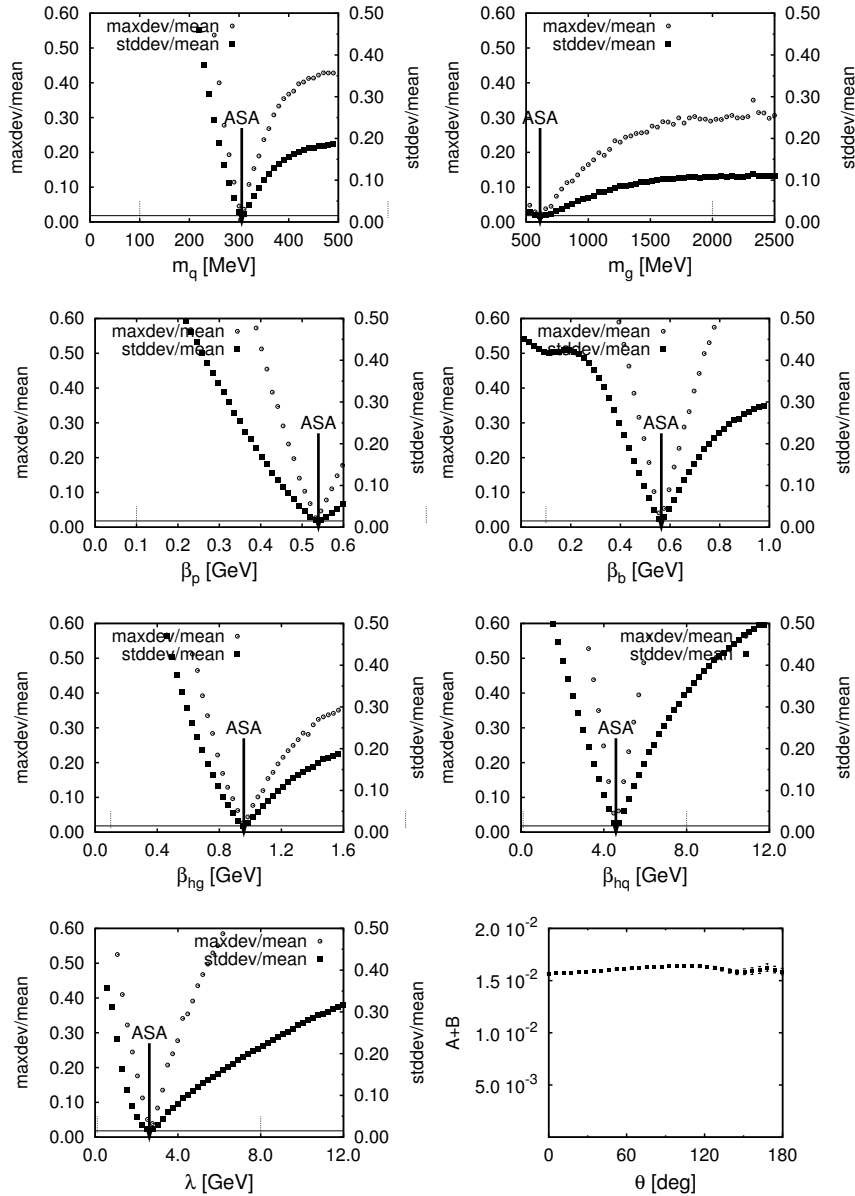
Rysunek 30: Jak na rysunku 29, ale z czynnikami $N = 1$, jak dla przypadku b) na wykresie 8, tzn. $S_h = \bar{u}\not{\epsilon}v$, $N = 1$, rozpad na $J^{PC} = 0^{++}$. Optymalne wartości parametrów są dane w drugiej kolumnie tabeli 3.



Rysunek 31: Jak na rysunku 30, ale rozpad na dwa pseudoskalarne mezony $J^{PC} = 0^{-+}$, jak dla przypadku b) na wykresie 10, tzn. $S_h = \bar{u}\not{\epsilon}v$, $N = 1$, rozpad na $J^{PC} = 0^{-+}$. Optymalne wartości parametrów są dane w drugiej kolumnie tabeli 5.



Rysunek 32: Jak na rysunku 30, ale dla czynnika spinorowego hybrydy danym wzorem $S_h = \bar{u}\tilde{G}\tilde{P}v$, jak dla przypadku f) na wykresie 9, tzn. $S_h = \bar{u}\tilde{G}\tilde{P}v$, $N = 1$, rozpad na $J^{PC} = 0^{++}$. Optymalne wartości parametrów są dane w szóstej kolumnie tabeli 4.



Rysunek 33: Jak na rysunku 31, ale dla czynnika spinorowego hybrydy danym wzorem $S_h = \bar{u}\tilde{G}\tilde{P}v$, jak dla przypadku f) na wykresie 11, tzn. $S_h = \bar{u}\tilde{G}\tilde{P}v$, $N = 1$, rozpad na $J^{PC} = 0^{-+}$. Optymalne wartości parametrów są dane w szóstej kolumnie tabeli 6.

E Szczegóły rozwiązania ściśle rozwiązywalnego modelu separowalnego mieszania

Oznaczenia (pojawiają się przy wyjaśnianiu postaci modelu, a wynikają z jego rozwiązywania i analizy):

$$I_{hh} = m^{2-d} \int [k] \frac{h^2(k)}{4(k^2 + m^2) - M^2} \quad (\text{E.1})$$

$$I_{ff} = m^{2-d} \int [k] \frac{f^2(k)}{4(k^2 + m^2) - M^2} \quad (\text{E.2})$$

$$I_{fh} = m^{2-d} \int [k] \frac{f(k)h(k)}{4(k^2 + m^2) - M^2} \quad (\text{E.3})$$

$$\tilde{M}^2 = 4m^2 - M^2 \quad (\text{E.4})$$

$$4k_5^2 = 4m^2 - M^2 \quad (\text{E.5})$$

$$H = \int [k] h(k)\psi(k) \quad (\text{E.6})$$

$$F = \int [k] f(k)\psi(k) \quad (\text{E.7})$$

$$\xi = \frac{g^2 m_Y^2}{m_g^2 - M^2} \quad (\text{E.8})$$

$$\xi_0 = \frac{g^2 m_Y^2}{m_g^2} \quad (\text{E.9})$$

$$\xi_{2m} = \frac{g^2 m_Y^2}{m_g^2 - 4m^2} \quad (\text{E.10})$$

\tilde{M} można nazwać „energiją wiązania”, zaś k_5 „pędem charakterystycznym”.

Zakładamy, że $m_g \geq 2m \geq M$ (jak w przypadku wyników dla opracowanego modelu rozpadu hybrydy), zatem $\xi \geq 0$; mamy także $\alpha \geq 0$. W powyższych oznaczeniach mamy $I_{xx} > 0$ dla $M \in [0, 2m]$, przy czym I_{hh} zależy tylko od stosunku ρ/m (i odpowiednio dla pozostałych całek).

Całkowanie uwzględnia także całkę po kątach; gdy funkcje nie zależą od kątów (jak zakładamy) dostajemy dodatkowo powierzchnię sfery d -wymiarowej.

$$[k] = dk \quad \text{dla } d = 1 \quad (\text{E.11-1})$$

$$[k] = 2\pi k dk \quad \text{dla } d = 2 \quad (\text{E.11-2})$$

$$[k] = 4\pi k^2 dk \quad \text{dla } d = 3 \quad (\text{E.11-3})$$

Hamiltonian opracowanego modelu zapisany za pomocą operatorów kreacji i anihilacji oraz stanu próżni ma postać:

$$H = \int [k] a_k^\dagger a_k 4(m^2 + k^2) + \frac{gm_Y}{m_\xi^{d-2}} \int [k] f(k) (a_k^\dagger + a_k) - \frac{\alpha}{m_\alpha^{d-2}} \int [kk'] h(k)h(k') a_k^\dagger a_{k'} + m_g^2 |0\rangle \langle 0| \quad (\text{E.12})$$

Dodanie m_Y do członu mieszania jest potrzebne aby wymiary (masowe) zgadzały się. Dla uproszczenia możemy założyć że $m_\alpha = m_\xi = m$. Wtedy całki I_{hh} zależą tylko od stosunku ρ/m .

Stan który badamy

$$|\Psi\rangle = \phi|0\rangle + \int [k] \psi(k) a_k^\dagger |0\rangle \quad (\text{E.13})$$

Równanie własne dla przestrzeni ograniczonej do powyższego stanu:

$$\begin{cases} 4(m^2 + k^2)\psi(k) - \alpha' \int [k'] h(k) h(k') \psi(k') + g' m_Y f(k) \phi = M^2 \psi(k) \\ g' m_Y \int [k'] f(k') \psi(k') + m_g^2 \phi = M^2 \phi \end{cases} \quad (\text{E.14})$$

Równanie na ϕ

$$\phi = -\frac{g' m_Y}{m_g^2 - M^2} \int [k'] f(k') \psi(k') \quad (\text{E.15})$$

Równanie na $\psi(k)$

$$\begin{aligned} \psi(k) = \frac{1}{4(k^2 + m^2) - M^2} & \left[\alpha' h(k) \int [k'] h(k') \psi(k') + \right. \\ & \left. + \frac{g'^2 m_Y^2}{m_g^2 - M^2} f(k) \int [k'] f(k') \psi(k') \right] \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

sprowadza się do

$$H = \alpha H I_{hh} + \xi F I_{fh} \quad (\text{E.17a})$$

$$F = \alpha H I_{fh} + \xi F I_{ff} \quad (\text{E.17b})$$

Wymaganie by F i H były skończone sprowadza się do równania

$$1 = \alpha I_{hh} + \xi I_{ff} - \alpha \xi (I_{ff} I_{hh} - I_{fh}^2) \quad (\text{E.18})$$

Jest to równanie własne na M .

Rozwiązanie na $\psi(k)$ można zapisać za pomocą jednego z czterech poniższych wzorów, które są równoważne dla M^2 spełniającego równanie własne (E.18):

$$\psi(k) = \left[\alpha h(k) + \xi \frac{1 - \alpha I_{hh}}{\xi I_{fh}} f(k) \right] \frac{H}{4(k^2 + m^2) - M^2} \quad (\text{E.19a})$$

$$= \left[\alpha h(k) + \xi \frac{\alpha I_{fh}}{1 - \xi I_{ff}} f(k) \right] \frac{H}{4(k^2 + m^2) - M^2} \quad (\text{E.19b})$$

$$= \left[\alpha \frac{1 - \xi I_{ff}}{\alpha I_{fh}} h(k) + \xi f(k) \right] \frac{F}{4(k^2 + m^2) - M^2} \quad (\text{E.19c})$$

$$= \left[\alpha \frac{\xi I_{fh}}{1 - \alpha I_{hh}} h(k) + \xi f(k) \right] \frac{F}{4(k^2 + m^2) - M^2} \quad (\text{E.19d})$$

Zależności (E.19) można przedstawić w następującej postaci

$$\psi(k) = [h_c h(k) + f_c f(k)] \frac{C}{4(k^2 + m^2) - M^2}, \quad (\text{E.20})$$

F Wyliczenie elementów macierzowych $h_{k,l}^{(2)}$ operatora \hat{k}^2 w bazie stanów własnych jednowymiarowego oscylatora harmonicznego

Wprowadźmy oznaczenie $\psi_n^{\text{osc}}(z)$ na funkcję falową stanu własnego jednowymiarowego kwantowego oscylatora harmonicznego o jednostkowej szerokości:

$$\psi_n^{\text{osc}}(z) = \frac{H_n(z)e^{-z^2/2}}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi}}. \quad (\text{F.1})$$

$H_n(x)$ oznacza tutaj wielomian Hermite'a n -tego rzędu.

Wielomiany Hermite'a można zdefiniować za pomocą następującej wykładniczej funkcji tworzącej:

$$\exp(2xt - t^2) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)t^n}{n!} \quad (\text{F.2})$$

Elementy macierzowe $h_{k,l}^{(2)}$ operatora \hat{k}^2 w bazie stanów własnych jednowymiarowego oscylatora harmonicznego przedstawiają się w postaci następującej całki:

$$\begin{aligned} h_{k,l}^{(2)} &= \int_{-\infty}^{\infty} dz z^2 \text{osc}_k(z) \text{osc}_l(z) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dz z^2 e^{-z^2} N_k H_k(z) N_l H_l(z), \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

gdzie

$$N_k = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-1/2} \quad (\text{F.4})$$

jest czynnikiem normalizującym dla wielomianów Hermite'a, jak we wzorze (F.1).

Wprowadźmy oznaczenie $\tilde{h}_{k,l}^{(2)}$ na analogiczną do (F.3) całkę dla nieznormalizowanych $H_n(z)$:

$$\tilde{h}_{k,l}^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} dz z^2 e^{-z^2} H_k(z) H_l(z), \quad (\text{F.5})$$

Do znalezienia wzoru na $\tilde{h}_{k,l}^{(2)}$, a zatem i na $h_{k,l}^{(2)}$, dogodnie jest wprowadzić następującą funkcję tworzącą:

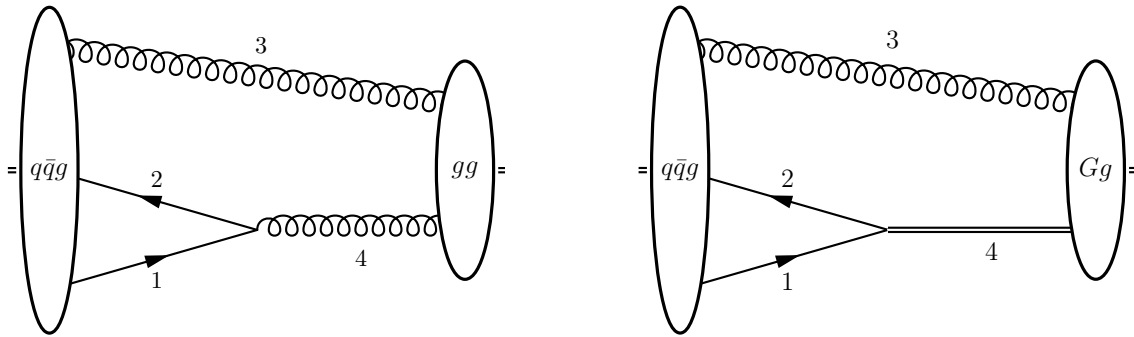
$$J_2(s, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dz z^2 e^{-z^2} H_k(z) H_l(z) \right) \frac{t^k}{k!} \frac{s^l}{l!}. \quad (\text{F.6})$$

Zamieniając kolejność sumowania i całkowania oraz korzystając z rozwinięcia funkcji tworzącej (F.2) dostajemy, że

$$\begin{aligned} J_2(s, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dz z^2 e^{2zt-t^2} e^{2zs-s^2} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{2st} (1 + 2(s+t)^2) \end{aligned} \quad (\text{F.7})$$

Porównując rozwinięcie prawej strony związku (F.7) i przyrównania jej do (F.6), dostajemy następujący wzór na $h_{k,l}^{(2)}$:

$$h_{k,l}^{(2)} = \frac{1}{2}(1 + 2k)\delta_{k,l} + \frac{1}{2}\sqrt{k(k+1)}[\delta_{k-1,k+1} + \delta_{k+1,k-1}] . \quad (\text{F.8})$$



Rysunek 34: Mieszanie stanu $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ ze stanem $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ (po lewej) lub ze stanem $|g_\lambda G_{h\lambda}\rangle$ (po prawej).

G Szczegóły obliczeniowe wyliczania mieszania stanu trójcząstkowego $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ ze stanem dwucząstkowym $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ lub $|g_\lambda G_{h\lambda}\rangle$

Elementy macierzone członu mieszania pomiędzy stanem kwark–antykwar–gluon $|q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda\rangle$ o liczbach kwantowych n_{hq}, n_{hg} , oraz stanem gluon–gluon $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ lub stanem gluon–rezonans oktetowy $|g_\lambda G_{h\lambda}\rangle$, można przedstawić w następującej postaci

$$\begin{aligned} H_{n_{hq}n_{hg},n_{gg}} &= g_\lambda \int [x_{12}x_3] f_\lambda(x_{12}, x_3) \phi_{n_{hq}n_{hg}}^h(x_{12}, x_3) \phi_{n_{gg}}^g(x_4(x_{12}, x_3)) \frac{1}{x_4}. \\ &= g_\lambda \int [k_{hq}k_{hg}] f_\lambda(k_{hq}, k_{hg}) \phi_{n_{hq}n_{hg}}^h(k_{hq}, k_{hg}) \phi_{n_{gg}}^g(k_{gg}) / (1 - x_3). \end{aligned} \quad (\text{G.1})$$

We wzorze tym $[k_{hq}k_{hg}]$ oznacza niezmienniczą miarę całkowania po pędach względnych w stanie kwark–antykwar–gluon, $\phi_{n_{hq}n_{hg}}^h$ i $\phi_{n_{gg}}^g$ jest odpowiednio funkcją falową bazy w sektorze $q_\lambda \bar{q}_\lambda g_\lambda$ i w sektorze $g_\lambda g_\lambda$ lub $g_\lambda G_{h\lambda}$, zaś f_λ jest czynnikiem podobieństwa grupy renormalizacji i zawiera dodatkowe czynniki zależne od pędu związane m.in. z redukcją wymiarów z trzech do jednego. Wzory na k_{gg} oraz x_3 wyrażone za pomocą k_{hq} i k_{hg} zostały przedstawione dalej.

Równanie (G.1) przedstawione jest dla uproszczonego przypadku modelu jednowymiarowego; dla pełnego przypadku trójwymiarowego wzór na element mieszania stanów w różnych sektorach wygląda podobnie, ale elementy bazy charakteryzują się odpowiednio 6 i 3 liczbami kwantowymi, a nie 2 i 1.

Niezmiennicza miara całkowania $[k_{hq}k_{hg}]$ (jedna z możliwości wyboru zmiennych całkowania) przedstawia się wzorem analogicznym do wzoru (C.5) na miarę całkowania w hybrydzie dla rozpadu hybrydy

$$\int [k_{hq}k_{hg}] = \frac{4dk_{hq}}{2(2\pi)\mathcal{M}_{12}} \frac{dk_{hg}\mathcal{M}_{123}}{2(2\pi)\sqrt{k_{hg}^2 + m_g^2} \sqrt{k_{hg}^2 + \mathcal{M}_{12}^2}}. \quad (\text{G.2})$$

Wszystkie pędy obliczone zostały na froncie świetlnym (LF), korzystając z następującego zapisu na pędy względne k :

$$\sqrt{k^2 + m_1^2} + \sqrt{k^2 + m_2^2} = \mathcal{M}, \quad (\text{G.3})$$

gdzie k jest pędem względnym dwu cząstek o masach m_1 i m_2 o całkowitej masie niezmienniczej \mathcal{M} .

Wyliczając masę niezmienniczą kwarków w stanie kwark–antykwar–gluon, oraz masę niezmienniczą całego układu, dostajemy

$$\mathcal{M}_{12} = 2\sqrt{k_{hq}^2 + m_q^2}, \quad (\text{G.4})$$

$$\mathcal{M}_{123} = \sqrt{k_{hg}^2 + m_g^2} + \sqrt{k_{hg}^2 + \mathcal{M}_{12}^2}. \quad (\text{G.5})$$

Dla pędów względnych w stanie kwark–antykwar–gluon zachodzą następujące związki:

$$x_{12} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{k_{hq}}{\sqrt{k_{hq}^2 + m_q^2}} \right], \quad (\text{G.6})$$

$$x_3 = \frac{k_{hg} + \sqrt{k_{hg}^2 + m_g^2}}{\mathcal{M}_{123}}. \quad (\text{G.7})$$

Z zachowania pędów frontowych w wierzchołku mieszania, tzn. w wierzchołku rozpadu gluonu lub rezonansu oktetowego na parę kwark–antykwar, dostajemy następujące wyrażenie na masę niezmienniczą układu dwucząstkowego $|g\lambda g\lambda\rangle$ lub $|g\lambda G_{h\lambda}\rangle$

$$\mathcal{M}_{43}^2 = \frac{\kappa_{43}^{\perp 2} + m_g^2}{x_3(1-x_3)} \quad \text{d} = 3 \quad (\text{G.8a})$$

$$= \frac{m_g^2}{x_3(1-x_3)} \quad \text{d} = 1 \quad (\text{G.8b})$$

Wektor pędu względnego k_{gg} dany jest

$$k_{gg} = \left(x_3 - \frac{1}{2} \right) \mathcal{M}_{43}. \quad (\text{G.9})$$

Funkcja falowa stanu bazowego oscylatora harmonicznego o liczbie kwantowej n_{gg} dana jest wzorem

$$\phi_{n_{gg}}^g(k_{gg}) = \mathcal{N}_{n_{gg}} H_{n_{gg}} \left(\frac{k_{gg}}{\beta_{gg}} \right) \exp \left[-\frac{k_{gg}^2}{2\beta_{gg}^2} \right], \quad (\text{G.10})$$

gdzie H_n jest n -tym wielomianem Hermite'a. Wzór (G.10) jest podobny do wzoru na funkcje falową mezonu (3.6) przy obliczaniu rozpadu hybrydy; dla analizy dynamicznego mieszania zakładamy, że możliwy do dodania ekstra czynnik normalizacji N_m związany z miarą całkowania jest równy 1 (przypadek oznaczany $N = 1$ w analizie rozpadu hybrydy).

Funkcja falowa stanu bazowego w sektorze kwark–antykwar–gluon o liczbach kwantowych n_{hq} , n_{hg} dana jest wzorem

$$\begin{aligned} \phi_{n_{hq}, n_{hg}}^h(k_{hq}, k_{hg}) &= \mathcal{N}_{n_{hq}} H_{n_{hq}} \left(\frac{k_{hq}}{\beta_{hq}} \right) \exp \left[-\frac{k_{hq}^2}{2\beta_{hq}^2} \right] \\ &\times \mathcal{N}_{n_{hg}} H_{n_{hg}} \left(\frac{k_{hg}}{\beta_{hg}} \right) \exp \left[-\frac{k_{hg}^2}{2\beta_{hg}^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{G.11})$$

W obliczeniach zakładano dominację stanu $n_{gg} = 0$ w sektorze $|g_\lambda g_\lambda\rangle / |g_\lambda G_{h\lambda}\rangle$.

H Spis treści załączonego CD-ROM

Na załączonej do tej pracy płytce CD-ROM znajdują się:

- Źródła do tej pracy w \LaTeX -u, bibliografia i plik stylu do tworzenia bibliografii oraz wersja gotowa do wydruku w Postscriptie i w PDF. Wszystko to znajduje się w głównym katalogu płytki.
- Niestandardowe pakiety \LaTeX -owe wymagane do kompilacji źródeł znajdują się w podkatalogu `texmf/`. Należy zapewnić, że \LaTeX , Metapost / Metafont i Bib \TeX znajdą je, przez odpowiednią modyfikację zmiennych środowiskowych `TEXINPUTS`, `MPINPUTS`, `BSTINPUTS` aby z nich korzystać.
- Rysunki do pracy (w formacie EPS) znajdują się w podkatalogu `rysunki/`.
- Dane do rysunków (pliki `*.dat`) i pliki z poleceniami dla programu Gnuplot służące do wygenerowania w.w. rysunków znajdują się w podkatalogu `dane/`.
- Programy które posłużyły do wygenerowania danych znajdują się w katalogu `programy/`, w podkatalogu `rozpad-hybrydy/` program do wyliczania amplitudy rozpadu (i programy testowe), a w podkatalogu `mieszanie/` znajdują się programy służące do rozwiązania zagadnienia mieszania.
- Katalog `lib/` zawiera dodatkowe, zewnętrzne biblioteki potrzebne do skompilowania programu.