

Hamiltonowski opis kwarków efektywnych w QCD

Jakub Narębski



praca magisterska napisana pod kierunkiem
dra hab. Stanisława Głazka
w Instytucie Fizyki Teoretycznej
Uniwersytetu Warszawskiego

Warszawa, 2000

Streszczenie

Wyrażamy w drugim rzędzie rachunku zaburzeń hamiltonian QCD w bazie cząstek efektywnych, używając grupy renormalizacji przez podobieństwo dla operatorów. Uzyskane cząstki efektywne pozwalają opisywać hadrony jako stany związane kilku kwarków. Obliczamy efektywne masy kwarków i oddziaływania między nimi w przybliżeniu nierelatywistycznym (dla ciężkich kwarków). Wykorzystując mechanizm redukcji przestrzeni Focka do sektora kwark–antykwarik zaproponowany w pierwotnej wersji przez Perry'ego otrzymujemy logarytmiczny potencjał uwięzienia. Ważną rolę pełni skracanie się rozbieżności w obszarze małych pędów pomiędzy efektywnymi masami fermionów i potencjałem, zapewniające ograniczenie przestrzeni stanów fizycznych do stanów będących singletami kolorowymi. Otrzymujemy kolorowe siły van der Waalsa, których ilościowe porównanie z danymi doświadczalnymi wymaga rozwiązania dynamiki efektywnej, co wychodzi poza zakres tej pracy.

Spis treści

1	Wstęp	3
2	Metoda obliczeń	5
2.1	Hamiltonian kanoniczny QCD	5
2.2	Regularyzacja	7
2.3	Kontreczłony	8
2.4	Renormalizacja w podejściu Wilsona	8
2.5	Renormalizacja przez podobieństwo dla macierzy	9
2.6	Renormalizacja przez podobieństwo dla cząstek	10
2.7	Rodzaje wyrazów w transformacji podobieństwa	12
3	Zastosowanie	15
3.1	Efektywny wyraz masowy dla fermionu	15
3.2	Efektywne oddziaływanie fermion–antyfermion	23
3.3	Potencjały efektywne w przybliżeniu nierelatywistycznym	31
3.4	Problem uwięzienia	34
4	Fenomenologiczny model potencjalny i siły van der Waalsa	36
4.1	Fenomenologiczny model potencjalny	36
4.2	Kolorowe siły van der Waalsa	37
5	Podsumowanie	40
A	Dodatki	42
A.1	Konwencje frontu świetlnego	42
A.2	Rozwiązania swobodnego równania Diraca na froncie świetlnym	42
A.3	Własności macierzy Diraca	43

1 Wstęp

Praca ta dotyczy metody opisu hadronów za pomocą kilku efektywnych kwarków. Transformację do kwarków efektywnych oraz oddziaływania między nimi wyliczamy renormalizując hamiltonian QCD za pomocą transformacji podobieństwa. Wyniki porównujemy z właściwościami fenomenologicznego modelu potencjalnego.

Fundamentalną teorią oddziaływań silnych jest chromodynamika kwantowa (QCD), kwantowa teoria pola z nieabelową grupą cechowania. Z niezmienniczości względem cechowania wynika, że gluony są w niej bezmasowe. Ponieważ efektywna stała sprzężenia maleje wraz ze wzrostem przekazu pędu, za pomocą rachunku zaburzeń potrafimy opisywać procesy charakteryzujące się dużymi przekazami pędu. Podstawą opisu hadronów w perturbacyjnej QCD jest model partonowy, w którym hadrony opisuje się za pomocą wielkiej ilości kwarków i gluonów. Wzrost stałej sprzężenia dla dużych odległości (rozmiary hadronu są duże) powoduje produkcję par kwark–antykwarik oraz miękkich gluonów, co wyklucza opis hadronów za pomocą niewielkiej ilości składników w ramach kanonicznej QCD. Struktura próżni jest skomplikowana. Hadrony w QCD opisujemy jako skomplikowaną strukturę składającą się z wielu cząstek.

W modelu kwarkowym hadrony opisywane są jako stany związane kilku kwarków składnikowych. Powstał on w celu wyjaśnienia systematyki hadronów, zanim powstała QCD, i posługuje się minimalną ilością cząstek potrzebnych by opisać niskoenergetyczne własności hadronów. Kwarki w tym modelu mają duże masy, rzędu połowy masy mezonów. Oddziaływania między kwarkami opisujemy za pomocą danego *ad hoc* potencjału, dobranego by dać uwięzienie. Strukturę kolorową potencjału wybieramy zgodną ze strukturą kolorową wymiany pojedynczego gluonu. Gluonów w tym modelu nie ma. Przy ich uwzględnianiu potrzeba nadać im wysokie masy efektywne. Model ten opisuje bardzo dobrze zachowanie hadronów przy niskich energiach. Trudno jednak wprowadzać do niego poprawki kwantowe, gdyż brakuje mu połączenia z teorią fundamentalną. Nie możemy stosować perturbacyjnej QCD do opisu stanów związanych, gdyż przy małych energiach efektywna stała sprzężenia staje się bardzo duża. Mówimy, że próżnia w tym modelu jest trywialna, gdyż nie ma potrzeby uwzględniania efektów próżniowych.

Model kwarków konstytuentnych podpowiada nam, że opis za pomocą kilku cząstek jest w stanie dobrze opisywać właściwości hadronów. W QCD hadrony opisujemy jako stany związane wielu cząstek. Musimy uwzględnić w opisie wszystkie sektory Focka. Ponadto mamy skomplikowaną próżnię. Trudno jest w takim opisie wyznaczać własności hadronów. Powstaje pytanie, jak to możliwe, że QCD redukuje się do modelu niewielu oddziałujących

cząstek efektywnych. Do wyprowadzenia cząstek efektywnych i oddziaływań między nimi w QCD będziemy używać grupy renormalizacji w nowym ujęciu [1].

Aby dostać prosty opis struktury hadronów, podobny do tego w modelu kwarków konstytuentnych, musimy odciąć się od problemu próżni, by mieć prosty stan podstawowy teorii. W tym celu stosujemy kwantyzację na froncie świetlnym. Dzięki temu, że podłużna składowa pędu jest nieujemna, zaś próżnia musi mieć pęd całkowity równy zeru, proste obcięcie $k^+ > \delta^+$ wycina diagramy próżniowe, czyniąc próżnię trywialną. Zależność teorii od parametru δ obcięcia pędów podłużnych może prowadzić do efektów, które w normalnym sformułowaniu wiąże się z własnościami próżni.

Za zastosowaniem dynamiki na froncie świetlnym przemawia ponadto fakt, że pchnięcia Lorentza w tym sformułowaniu są transformacjami kinematycznymi, tzn. nie zależą od oddziaływania. Dla modelu partonowego naturalnym układem odniesienia jest układ nieskończonego pędu, który stosujemy w rachunkach QCD. Z kolei statyczne własności hadronów zazwyczaj rozważamy w układzie ich środka masy. Układ środka masy jest naturalnym układem dla modelu kwarkowego. Niezmienniczość frontu świetlnego względem pchnięć pozwala połączyć opis w układzie środka masy z opisem w układzie nieskończonego pędu.

Naturalnym sposobem opisu stanów związanych jest ujęcie hamiltonowskie. Chcemy opisać hadrony przy pomocy niewielkiej ilości cząstek. Równanie własne daje stany zawierające nieskończoną liczbę sektorów Focka, o dowolnych energiach kinetycznych. Rozwiązywanie zagadnienia własnego gdy hamiltonian łączy wiele stanów o dowolnych różnicach energii jest trudne. Żądamy więc by hamiltonian wyrażony w bazie cząstek efektywnych miał skończoną skalę energii. Macierz hamiltonianu w tej bazie powinna być więc przydiagonalna. Ponieważ zmiana bazy jest transformacją unitarną, więc hamiltonian kanoniczny i hamiltonian efektywny powiązane są ze sobą transformacją podobieństwa.

Wskutek eliminacji oddziaływań między stanami o dużo różniących się energiach kinetycznych, w hamiltonianie pojawiają się nowe człony oddziaływania typu oddziaływania potencjalnego. Jeśli szerokość macierzy hamiltonianu w bazie cząstek efektywnych jest dostatecznie mała, a cząstki przenoszące oddziaływanie są masywne, to oddziaływanie odbywa się głównie za pomocą tych właśnie potencjałów.

W rozdziale pierwszym przedstawiamy metodę wyprowadzenia efektywnych cząstek i efektywnego hamiltonianu z hamiltonianu QCD. Aby dostać skończone wyniki regularyzujemy hamiltonian i znajdujemy kontreczłony. Hamiltonian efektywny wyprowadzamy przez odcałkowanie równań różniczko-

wych dla grupy renormalizacji przez podobieństwo.

W rozdziale drugim stosujemy metodę z rozdziału pierwszego do wyliczenia efektywnych oddziaływań między efektywnymi kwarkami w mezonie. Dostajemy potencjał składający się z części coulombowskiej oraz potencjału wiążącego. Potencjał wiążący obliczony do drugiego rzędu nie ma symetrii obrotowej, zaś dla dużych odległości zachowuje się jak potencjał logarytmiczny. Ważną rolę odgrywa upraszczanie się rozbieżności podczerwonych między efektywnym wyrazem masowym dla fermionu, a potencjałem wiążącym.

Następnie, w rozdziale trzecim analizujemy efektywne potencjały wewnątrz mezonów oraz oddziaływania van der Waalsa między dwoma mezonami.

Podsumowania wyników dokonujemy w rozdziale czwartym.

2 Metoda obliczeń

2.1 Hamiltonian kanoniczny QCD

Oprócz standardowej, równoczesnej formy dynamiki, gdzie ewoluujemy stany od jednej podprzestrzeni ustalonego czasu do drugiej, można stosować dynamikę na froncie świetlnym. Potrzebę jej stosowania wyjaśniliśmy we wstępie. W dynamice na froncie świetlnym rolę podprzestrzeni ustalonego czasu przejmuje powierzchnia styczna do stożka świetlnego, a rolę czasu pełni $x^+ = x^0 + x^3$. Ta forma dynamiki została wprowadzona przez Diraca [2], omówienie jej znajdziemy także w przeglądowej pracy [3].

Z lagranżjanu QCD

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi \quad (2.1)$$

możemy wyprowadzić kanoniczny hamiltonian QCD w tym sformułowaniu dynamiki. Używamy cechowania na froncie świetlnym, t.j. $A^+ \equiv \frac{1}{2}A_- = 0$, gdzie $A^\pm = A^0 \pm A^3$ (z czego wynika, że $\partial_- A^+ = 0$). Równanie Diraca na froncie świetlnym (patrz dodatek A.2) w tym cechowaniu pozwala wyrazić dynamicznie zależne stopnie swobody przez niezależne zmienne, i wyeliminować je z hamiltonianu. Eliminacja zależnych stopni swobody prowadzi do członów typu oddziaływania natychmiastowego. Zależne stopnie swobody dla gluonów wyrażamy przez niezależne za pomocą kolorowego analogu prawa Gaussa.

Hamiltonian QCD na froncie świetlnym ma zatem postać

$$H = H_0 + V_1 + V_2 + V_3 + V_4, \quad (2.2)$$

gdzie H_0 oznacza część swobodną hamiltonianu, V_1 oddziaływanie trójcząstkowe, V_2 wierzchołek czterogluonowy (teoria nieabelowa), V_3 człon z wymianą

natychmiastowego gluonu (eliminacja zależnych stopni swobody za pomocą równania Gaussa), zaś V_4 to człon powstały z wyeliminowania zależnych stopni swobody fermionów.

Zgodnie z [3] można te człony zapisać jako:

$$H_0 = \frac{1}{2} \int d^3x \left(\tilde{\psi} \gamma^+ \frac{m^2 + (i\nabla_\perp)^2}{i\partial^+} \tilde{\psi} + \tilde{A}^{a\mu} \frac{(i\nabla_\perp)^2}{i\partial^+} \tilde{A}_\mu^a \right), \quad (2.3a)$$

$$V_1 = g \int d^3x \tilde{J}_a^\mu \tilde{A}_\mu^a, \quad (2.3b)$$

$$V_2 = \frac{g^2}{4} \int d^3x \tilde{B}_a^{\mu\nu} \tilde{B}_{\mu\nu}^a, \quad (2.3c)$$

$$V_3 = \frac{g^2}{2} \int d^3x \tilde{J}_a^+ \frac{1}{(i\partial^+)^2} \tilde{J}_a^+, \quad (2.3d)$$

$$V_4 = \frac{g^2}{2} \int d^3x \tilde{\psi} \gamma^\mu T^a \tilde{A}_\mu^a \frac{\gamma^+}{i\partial^+} (\gamma^\nu T^b \tilde{A}_\nu^b \tilde{\psi}), \quad (2.3e)$$

gdzie prąd \tilde{J} jest zdefiniowany jako

$$\tilde{J}_a^\nu = \tilde{j}_a^\nu + \tilde{\chi}_a^\nu, \quad (2.4a)$$

$$\tilde{j}_a^\nu = \tilde{\psi} \gamma^\nu T^a \tilde{\psi}, \quad (2.4b)$$

zaś $B^{\mu\nu}$ oraz χ^ν dane są wzorami

$$B_a^{\mu\nu} = f^{abc} A_b^\mu A_c^\nu, \quad (2.5a)$$

$$\chi_a^\nu = f^{abc} \partial^\nu A_b^\nu A_c^a. \quad (2.5b)$$

Dostaliśmy hamiltonian wyrażony za pomocą operatorów pola. Rozpisujemy je zgodnie ze wzorami

$$\tilde{\psi}_{acf}(x) = \sum_\lambda \int [p] \left(\tilde{b}(p) u_\alpha(p, \lambda) e^{-ipx} + \tilde{d}^\dagger(p) v_\alpha(p, \lambda) e^{+ipx} \right), \quad (2.6a)$$

$$\tilde{A}_\mu^a(x) = \sum_\lambda \int [p] \left(\tilde{a}(p) T^a \epsilon_\mu(p, \lambda) e^{-ipx} + \tilde{a}^\dagger(p) T^a \epsilon_\mu^\dagger(p, \lambda) e^{+ipx} \right). \quad (2.6b)$$

Korzystając z kanonicznych reguł komutacyjnych wyrażamy hamiltonian za pomocą odpowiednich operatorów kreacji i anihilacji. Ma on bardzo skomplikowaną strukturę. Będziemy wypisywać tylko te człony w hamiltonianie, które będą nam potrzebne. Pełną listę wyrazów można znaleźć m.in. w [3].

2.2 Regularyzacja

Hamiltonian kanoniczny jest operatorem źle zdefiniowanym. Działając na stany z przestrzeni Hilberta, hamiltonian wyprowadza je z tej przestrzeni. Objawia się to między innymi przy obliczaniu operatora ewolucji. Napotykamy na problem już przy wyliczaniu przy H^2 , które okazuje się nieskończoność. Zatem $\exp(-iHx^+/2)$ rozbiega. Przy obliczaniu wielkości fizycznych, np. przy rozwiązywaniu zagadnienia własnego pojawiają się nieskończoności wynikające z tego, że stany pośrednie mogą mieć dowolnie wysoką energię. Nieskończoności pojawiają się także przy wyliczaniu efektywnego hamiltonianu. Problem jest jeszcze poważniejszy niż nieskończony zakres energii oddziaływań: w gołej, kanonicznej QCD oddziaływanie rośnie, gdy rośnie różnica energii między oddziałującymi cząstkami.

Potrzebne jest zatem wprowadzenie czynników regularyzujących. Aby ograniczyć oddziaływania, żądany by przekazy pędów w wierzchołkach były ograniczone. Robimy to wprowadzając wierzchołkowe czynniki regularyzujące związane z operatorami kreacji i anihilacji. Dla każdego operatora kreacji i anihilacji wprowadzamy czynnik ograniczający pęd poprzeczny albo (co wygodniejsze w obliczeniach) energię cząstki w danym wierzchołku związanej z tym operatorem. Zamiast cząstek swobodnych posługujemy się zatem cząstkami „obciążonymi”, które nie oddziałują, gdy energia stanu biorącego udział w oddziaływaniu jest dużo większa od arbitralnie ustalonej skali Δ .

Regulator powinniśmy wybrać tak, by dawał ograniczenie wyłącznie na pędy względne. Dzięki temu nie naruszamy niezmienniczości dynamiki na froncie świetlnym względem pchnięć. Do celów regularyzacji nadfioletowej użyjemy funkcji wykładniczej tłumiącej oddziaływanie dla wysokich energii. Z każdym operatorem kreacji i anihilacji cząstki wchodzącej do oddziaływania wiążemy „energię” określoną wzorem

$$e_i = \frac{\kappa_i^2}{x_i}, \quad (2.7)$$

gdzie κ_i oraz x oznaczają odpowiednie pędy względne dla danego wierzchołka oddziaływania. Wprowadzając czynnik regularyzujący postaci $\exp(-e_i/\Delta^2)$ dostajemy dla wierzchołka, w którym cząstki 1 i 2 zamieniają się z cząstką 3 (lub odwrotnie), czynniki postaci:

$$\begin{aligned} r_\Delta(12, 3) &= \exp\left(-\frac{\kappa_1^2}{x_1\Delta}\right) \exp\left(-\frac{\kappa_2^2}{x_2\Delta}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{\kappa_{12}^2}{x(1-x)\Delta^2}\right) = \exp\left(-\frac{\mathcal{M}_{12}^2}{\Delta^2}\right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Wprowadziliśmy tutaj oznaczenie na masę niezmienniczą

$$\mathcal{M}_{12}^2 = (p_1 + p_2)^2, \quad \text{gdzie } p_i^- = \frac{p_i^{\perp 2}}{p_i^+} \quad (2.9)$$

Ponieważ QCD jest teorią z cechowaniem, zawierającą cząstki bezmasowe, więc pojawiają się rozbieżności dla małych pędów podłużnych. Odwrotności k^+ pojawiają się w wektorach polaryzacji gluonów oraz w członach oddziaływania natychmiastowego, powstałych z wyeliminowania niefizycznych stopni swobody. Potrzebny jest zatem dodatkowy czynnik regularyzujący.

Dla każdej cząstki wchodzącej do oddziaływania wprowadzamy regulator obcinający pędy podłużne, na przykład w postaci $\Theta\left(\frac{x_1}{x_3} - \delta\right)\Theta\left(\frac{x_2}{x_3} - \delta\right)$ dla wierzchołka typu $12 \leftrightarrow 3$, gdzie $\frac{x_1}{x_3} = \frac{p_1^+}{p_3^+}$, $\frac{x_2}{x_3} = \frac{p_2^+}{p_3^+}$ oznaczają odpowiednie ułamki (frakcje) pędu podłużnego (+) cząstki 3.

2.3 Kontrczłony

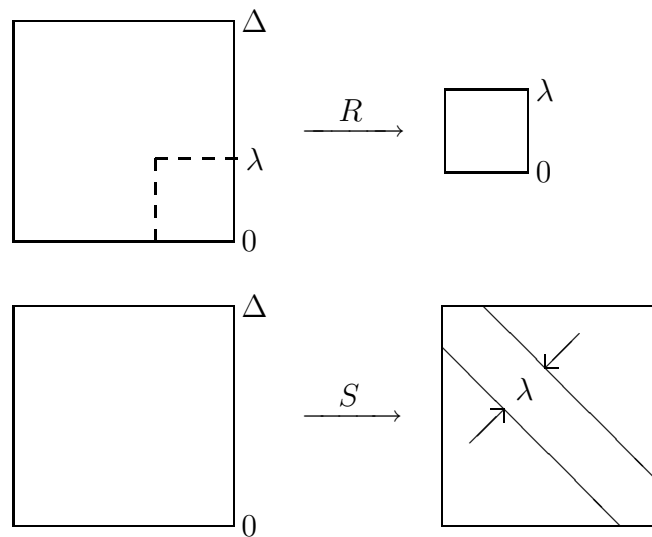
Dzięki wprowadzeniu regularyzacji otrzymujemy skończone wyniki. Jednak aby zregularizowany hamiltonian opisywał tę samą teorię co hamiltonian wyjściowy nie wystarczy samo wprowadzenie obcięć. W wyniku eliminacji stanów o energii większej niż Δ w hamiltonianie zregularizowanym pojawiają się kontrczłony: $H_{\text{eff}} = H_{\Delta} + X_{\Delta}$. Wyznaczamy je przez żądanie, by wyniki fizyczne, np. elementy macierzowe hamiltonianu nie zależały od regularyzacji.

2.4 Renormalizacja w podejściu Wilsona [4]

Zależność hamiltonianu od obciążenia (regularyzacji) możemy przeanalizować badając co się dzieje przy zmianie parametru obciążenia Δ .

Aby móc rozwiązać problem stanu związanego musimy sprowadzić zagadnienie do zagadnienia niskich energii i niewielu cząstek. W tym celu musimy umieć wyrażać wyjściowe zagadnienie w ten sposób, by energie cząstek/oddziaływań były ograniczone.

Idea renormalizacji Wilsona polega na obniżaniu obciążenia od skali Δ do pewnej skończonej skali λ . Podejście to wiąże się z eliminacją stopni swobody. W procesie renormalizacji do hamiltonianu wprowadzane są efektywne oddziaływania kompensujące zmianę skali w ten sposób, że najniższe wartości własne hamiltonianu efektywnego (obciętego) są takie same jak hamiltonianu pełnego. Transformację przeprowadzającą hamiltonian do hamiltonianu efektywnego znajdujemy w rachunku zaburzeń. W pobliżu granicy energii



Rysunek 1: Porównanie renormalizacji Wilsona i renormalizacji przez podobieństwo

pojawia się problem małych mianowników energetycznych. Ponadto w kwantowej teorii pola mamy wysoką degenerację stanów, więc potrzebowalibyśmy rachunku zaburzeń dla stanów zdegenerowanych, co wymaga rozwiązania zagadnienia z uwzględnieniem stanów wysokoenergetycznych. Metoda ta ma zatem ograniczone zastosowania w kwantowej teorii pola.

2.5 Renormalizacja przez podobieństwo dla macierzy [5]

Musimy zatem zastosować inne podejście. Zamiast eliminować stany o energiach większych niż parametr λ , możemy zażądać, by znikaly elementy macierzy hamiltonianu między stanami różniącymi się bardziej niż λ energią kinetyczną. Dostajemy macierz hamiltonianu, która ma znikające wyrazy poza elementami przydiagonalnymi. Postać ta ma tę zaletę, że jest niewrażliwa na obcięcie Δ w rachunku zaburzeń dla wartości własnych lub amplitud przejścia aż do rzędu $n \sim \Delta/(2\lambda)$, ponieważ osiągnięcie skali Δ wymaga wielu oddziaływań.

Przy obliczaniu hamiltonianu efektywnego o szerokości λ nie eliminujemy żadnych stopni swobody. Dobierając odpowiednio czynnik podobieństwa możemy spowodować, że nie będziemy mieli problemów z małymi mianownikami energetycznymi. W renormalizacji tej wyrażamy ten sam hamiltonian za po-

mocą innych stopni swobody. Hamiltonian wąski i hamiltonian wyjściowy są więc powiązane ze sobą transformacją podobieństwa.

Kontrcylony w tym podejściu wyznaczamy, żądając, by elementy macierze hamiltonianu efektywnego H_λ były niezależne od obciążenia.

Ponieważ transformację podobieństwa wyliczamy zazwyczaj w rachunku zaburzeń, nie możemy uczynić szerokości hamiltonianu λ dowolnie małą. Przestrzeń stanów swobodnych i stanów będących ścisłym rozwiązaniem zagadnienia własnego są powiązane zależnością nieperturbacyjną. Wiemy też, że efektywna stała sprzężenia g_λ rośnie w QCD, gdy $\lambda \rightarrow 0$ i rachunek zaburzeń stosować można tylko dla λ większych niż pewna skala nieperturbacyjna.

2.6 Renormalizacja przez podobieństwo dla cząstek [1]

Metoda renormalizacji za pomocą transformacji podobieństwa, ponieważ podlega na wyrażaniu tego samego hamiltonianu w innej bazie stanów, pozwala nam zatem zdefiniować cząstki efektywne o „skończonej szerokości”, które mogą wymieniać pęd tylko ograniczony przez λ . Szerokość hamiltonianu w ujęciu macierzowym przechodzi w odpowiedni czynnik wierzchołkowy w hamiltonianie oddziaływania cząstek efektywnych.

Żądamy, aby oddziaływania między cząstkami efektywnymi z większym przekazem energii kinetycznej niż λ były zaniedbywalne. Dla każdego wierzchołka oddziaływania wprowadzamy czynnik, który nam to zapewnia. Przy obliczaniu transformacji podobieństwa za pomocą równania różniczkowego grupy renormalizacji czynnik podobieństwa powinien być funkcją gładką. Powinien on także zachowywać symetrie frontu świetlnego, więc należy wyrazić go za pomocą niezmienników lorentzowskich. Aby w rachunku zaburzeń nie pojawiały się małe mianowniki energetyczne zarówno $1 - f_\lambda$, jak i $df_\lambda/d\lambda$ powinny zanikać szybciej niż liniowo w różnicy energii. W naszej pracy przyjmujemy czynnik podobieństwa dany przez czynnik wykładniczy zanikający jak kwadrat różnicy mas inwariantnych cząstek przed i po oddziaływaniu [7]:

$$f_\lambda(u, v) = \exp \left[-\frac{(\mathcal{M}_{uv}^2 - \mathcal{M}_{vu}^2)^2}{\lambda^4} \right], \quad (2.10)$$

gdzie \mathcal{M}_{uv}^2 oznacza masę niezmienniczą układu cząstek u biorących udział w oddziaływaniu z układem cząstek v :

$$\mathcal{M}_{uv}^2 = \left[\sum_{i \in u(v)} k_i \right]^2. \quad (2.11)$$

Dla skrócenia zapisu będziemy pisali $uv = \mathcal{M}_{uv}^2 - \mathcal{M}_{vu}^2$, oraz wprowadzimy f_{uv} jako oznaczenie na $f_\lambda(u, v)$

W renormalizacji za pomocą transformacji podobieństwa zakładamy, że cząstki efektywne mają te same liczby kwantowe co cząstki „gołe” (występujące w hamiltonianie wyjściowym). Założenie to oparte jest na tym, że kwarki w lagranżjanie QCD i kwarki w modelu kwarków składnikowych są opisane przez te same liczby kwantowe.

Transformacja podobieństwa zmienia operatory kreacji i anihilacji gołych cząstek w operatory kreacji i anihilacji cząstek efektywnych odpowiadających szerokości λ (t.j. oddziałujących ze sobą tylko dla różnic energii mniejszych od λ). Mamy

$$q_\lambda = \mathcal{U}_\lambda q_\infty \mathcal{U}_\lambda^\dagger, \quad (2.12)$$

gdzie q oznacza odpowiedni operator kreacji lub anihilacji. Transformacja \mathcal{U}_λ , jako operacja zmiany bazy, jest unitarna z konstrukcji.

Przepisanie hamiltonianu za pomocą innych stopni swobody nie zmienia go, zatem hamiltoniany wyjściowy (wyrażony za pomocą cząstek gołych), i hamiltonian „wąski” (wyrażony za pomocą cząstek efektywnych) są sobie równe jako operatory: $H_\lambda(q_\lambda) = H_\infty(q_\infty)$. Zakładając, że hamiltonian zawiera tylko skończone iloczyny operatorów kreacji i anihilacji, możemy wprowadzić operator $\mathcal{H}_\lambda \equiv H_\lambda(q_\lambda) = \mathcal{U}_\lambda^\dagger H_\infty(q_\infty) \mathcal{U}_\lambda$, który ma takie same współczynniki przed iloczynami q_∞ , jak H_λ przed iloczynami q_λ . Różniczkując wyrażenie na \mathcal{H}_λ dostajemy

$$\frac{d}{d\lambda} \mathcal{H}_\lambda = -[\mathcal{T}_\lambda, \mathcal{H}_\lambda], \quad (2.13a)$$

$$\mathcal{T}_\lambda = \mathcal{U}_\lambda^\dagger \frac{d}{d\lambda} \mathcal{U}_\lambda. \quad (2.13b)$$

Hamiltonian efektywny dany jest przez część diagonalną pewnego operatora G_λ tzn. $H_\lambda = F_\lambda[G_\lambda]$. Operator F_λ odpowiedzialny jest za to, by hamiltonian H_λ był wąski. Wprowadza on odpowiedni czynnik podobieństwa do operatora G_λ . Jego działanie dane jest wzorem $F_\lambda[G_\lambda]_{uv} = f_{uv} g_{uv}$, gdzie f_{uv} jest dane wzorem (2.10).

Wprowadzamy oznaczenie $\mathcal{G}_\lambda = \mathcal{U}_\lambda^\dagger G_\lambda \mathcal{U}_\lambda$, i analogiczne dla innych operatorów. Równanie na operator \mathcal{T}_λ , generujący transformację podobieństwa, zapisuje się następująco:

$$[\mathcal{T}_\lambda, \mathcal{H}_{0\lambda}] = \frac{d}{d\lambda} (1 - F_\lambda)[\mathcal{G}_\lambda] \quad (2.14)$$

Struktura komutatorowa zapewnia, że hamiltonian efektywny zawiera tylko oddziaływania połączone, spełniając warunek rozkładu gronowego [1].

Dzielimy operator \mathcal{G}_λ na dwie części: część „swobodną” i część oddziaływania. $\mathcal{G}_\lambda = \mathcal{G}_0 + \mathcal{G}_{I\lambda}$. $\mathcal{G}_{I\lambda}$ spełnia następujące równanie różniczkowe

$$\frac{d}{d\lambda}\mathcal{G}_{I\lambda} = \left[f\mathcal{G}_{I\lambda}, \left\{ \frac{d}{d\lambda}[(1-f)\mathcal{G}_{I\lambda}] \right\}_{\mathcal{G}_0} \right] \quad (2.15)$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenie

$$A = \{B\}_C \iff [A, C] = B \quad (2.16)$$

Hamiltonian efektywny liczymy w rachunku zaburzeń. Zapisujemy $\mathcal{G}_{I\lambda}$ jako

$$\mathcal{G}_I = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n \quad (2.17)$$

gdzie τ_n oznacza wszystkie operatory rzędu n w wybranej stałej sprzężenia, w \mathcal{G}_I . Z równania (2.15) dostajemy wyrażenie na $\mathcal{G}_{I\lambda}$ rząd po rzędzie w rachunku zaburzeń:

$$\tau_1' = 0, \quad (2.18a)$$

$$\tau_2' = [\{f'\tau_1\}, f\tau_1], \quad (2.18b)$$

...

$$\tau_n' = \sum_{k=1}^{n-1} [\tau_k, \{(1-f)\tau_{n-k}\}']. \quad (2.18c)$$

Pierwsze równanie (2.18a) oznacza, że τ_1 jest niezależne od λ , zatem $\tau_{\lambda 1} = \tau_{\infty 1}$. Zatem wyrazy pierwszego rzędu w hamiltonianie efektywnym dostajemy mnożąc odpowiednie wyrazy w hamiltonianie wyjściowym przez czynnik podobieństwa i zastępując operatory kreacji i anihilacji cząstek gołych przez efektywne.

2.7 Rodzaje wyrazów w transformacji podobieństwa

Ponieważ interesować nas będą głównie oddziaływania w sektorze kwark – antykwark, które są dosyć złożone, wprowadzamy więc pewien sposób oznaczania członów w hamiltonianie. W wyniku stosowania procedury renormalizacji, w hamiltonianie powstają nowe człony w stosunku do hamiltonianu wyjściowego. Dla uproszczenia będziemy oznaczać je w sposób dobrze zilustrowany przykładem: $f_{121,301}^{(2)}$ będzie oznaczać człon 2-go rzędu w stałej sprzężenia, z 1 operatorem kreacji fermionu, 2 operatorami kreacji antyfermionu, 1 operatorem kreacji gluonu. Liczby na prawo od przecinka oznaczają

liczbę operatorów anihilacji, w tym samym porządku, tzn. 3 anihilatory fermionowe, 0 antyfermionowych i 1 bozonu cechowania.

Rozważany przez nas hamiltonian QCD ma skomplikowaną strukturę. Podzielmy go na części działające w określonych sektorach Focka

$$H = H_0 + H_{qgg} + H_{qqqq} + \dots,$$

gdzie (pamiętając o członach oddziaływania natychmiastowego powstałych z eliminacji zależnych stopni swobody)

$$\begin{aligned} H_0 &= H_{100,100} + H_{010,010} + H_{001,001} \\ H_{qgg} &= H_{101,100} + H_{100,101} + \\ &\quad + H_{011,010} + H_{010,011} + \\ &\quad + H_{001,110} + H_{110,001} \\ H_{qqqq} &= H_{200,200} + H_{020,020} + H_{110,110} \end{aligned}$$

Podobny podział (ze względu na liczbę operatorów kreacji i anihilacji) możemy wprowadzić w operatorach τ_i . Należy pamiętać o tym, że obliczenie τ_2 będzie wymagało obliczenia kontrczłonów. Interesujące nas czynniki w τ_1 i τ_2 mają strukturę

$$\tau_1 = \alpha_{101,100} + \alpha_{100,101} + \alpha_{011,010} + \alpha_{010,011} + \dots \quad (2.19a)$$

$$\tau_2 = \beta_{200,200} + \beta_{020,020} + \beta_{110,110} + \beta_{100,100} + \beta_{010,010} + \dots \quad (2.19b)$$

gdzie przez α oznaczyliśmy człony pierwszego rzędu stojące przy odpowiednich operatorach, zaś przez β odpowiednie człony drugiego rzędu.

Równania (2.18) i struktura hamiltonianu QCD implikują, że

$$\beta'_{200,200} = f_2[\alpha_{100,101}\alpha_{101,100}]_{200,200} \quad (2.20a)$$

$$\beta'_{020,020} = f_2[\alpha_{010,011}\alpha_{011,010}]_{020,020} \quad (2.20b)$$

$$\begin{aligned} \beta'_{110,110} &= f_2[\alpha_{110,001}\alpha_{001,110} + \\ &\quad + \alpha_{100,101}\alpha_{011,010} + \\ &\quad + \alpha_{010,011}\alpha_{101,100}]_{110,110} \end{aligned} \quad (2.20c)$$

$$\beta'_{100,100} = f_2[\alpha_{100,101}\alpha_{101,100}]_{100,100} \quad (2.20d)$$

$$\beta'_{010,010} = f_2[\alpha_{010,011}\alpha_{011,010}]_{010,010} \quad (2.20e)$$

Nawiasy kwadratowe oznaczają zastąpienie odpowiednich iloczynów $a_i a_j^\dagger$ przez komutatory $[a_i, a_j^\dagger]$. Indeks dolny przy zamykającym nawiasie kwadratowym oznacza, że bierzemy tylko człony odpowiedniej postaci, t.j. o określonej ilości operatorów danego rodzaju. Czynniki f_2 , pojawiający się pod całką

po pędach, pochodzi od funkcji podobieństwa i wynosi

$$f_2 = \{f'\}f - f\{f'\},$$

$$f_{2uv} = \left(\frac{f'_{u\pi}f_{\pi v}}{E_\pi - E_u} + \frac{f_{u\pi}f'_{\pi v}}{E_\pi - E_v} \right). \quad (2.21)$$

gdzie π oznacza stan pośredni, zaś f' pochodną po parametrze λ .

Czynnik f_2 jest jedynym czynnikiem zależnym od λ po prawej stronie równań (2.20). Możemy zatem w prosty sposób odcałkować te równania po parametrze λ . Uwzględniając wszystkie czynniki rzędu g oraz rzędu g^2 o odpowiedniej strukturze w wyjściowym hamiltonianie (włączając w to człony natychmiastowe) dostajemy następujące rozwiązania:

$$\beta_{\lambda 200,200} = \mathcal{F}_{\lambda 2}[\alpha_{100,101}\alpha_{101,100}]_{200,200} + \beta_{\infty 200,200} \quad (2.22a)$$

$$\beta_{\lambda 020,020} = \mathcal{F}_{\lambda 2}[\alpha_{010,011}\alpha_{011,010}]_{020,020} + \beta_{\infty 020,020} \quad (2.22b)$$

$$\begin{aligned} \beta_{\lambda 110,110} = \mathcal{F}_{\lambda 2}[\alpha_{110,001}\alpha_{001,110} + \\ + \alpha_{100,101}\alpha_{011,010} + \\ + \alpha_{010,011}\alpha_{101,100}]_{110,110} + \beta_{\infty 110,110} \end{aligned} \quad (2.22c)$$

$$\beta_{\lambda 100,100} = \mathcal{F}_{\lambda 2}[\alpha_{100,101}\alpha_{101,100}]_{100,100} + \beta_{\infty 100,100} + x_{\infty 100,100} \quad (2.22d)$$

$$\beta_{\lambda 010,010} = \mathcal{F}_{\lambda 2}[\alpha_{010,011}\alpha_{011,010}]_{010,010} + \beta_{\infty 010,010} + x_{\infty 100,100} \quad (2.22e)$$

gdzie przez $x_{\infty 100,100}$ oznaczyliśmy odpowiednie kontrczłony.

Potrzebujemy zatem wyliczyć ile wynosi czynnik $\mathcal{F}_{2\lambda} = \int_{\infty}^{\lambda} f_2$, który nazywamy wewnętrznym czynnikiem podobieństwa. Zgodnie ze wzorem (2.21) na f_2 , oraz definicją funkcji podobieństwa (2.10), czynnik $\mathcal{F}_{2\lambda}$ dany jest przez następujące wyrażenie [7].

$$\mathcal{F}_{2\lambda}(a, b, c) = \frac{P_{ba}^+ba + P_{bc}^+bc}{(ba)^2 + (bc)^2} (f_{\lambda}(a, b)f_{\lambda}(b, c) - 1), \quad (2.23)$$

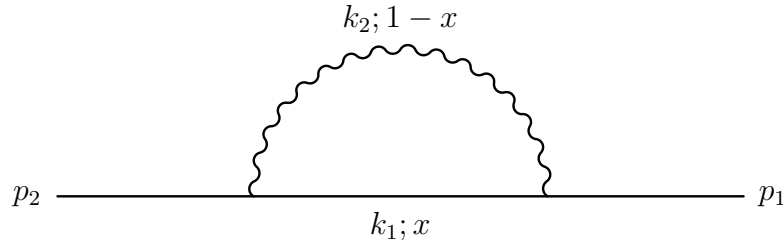
gdzie argumenty a, b, c oznaczają kolejne konfiguracje pędu pojawiające się w nawiasach w wyrażeniu (2.20). Konfiguracja b odpowiada konfiguracji pośredniej. Wprowadziliśmy oznaczenie P_{uv}^+ na pęd-rodzica dla całej połączonej sekwencji oddziaływań między układami u i v (sumę pędów wszystkich cząstek biorących udział w oddziaływaniu podzieloną przez 2). Symbole ba oznaczają odpowiednie różnice mas inwariantnych, jak w oznaczeniach we wzorze (2.10) na f_{ba} .

3 Zastosowanie: opis ciężkich mezonów przy pomocy kwarków efektywnych

Zastosujemy teraz powyższą metodę do hamiltonianu QCD, podanego w rozdziale 2.1. Interesować nas będą oddziaływania wewnątrz mezonu oraz między dwoma mezonami. Potrzebna nam więc będzie postać oddziaływania w sektorze dwucząstkowym (kwark – antykwark), a dla wyliczania oddziaływań van der Waalsa w sektorze dwumezonowym. Możemy zatem pominąć wszelkie człony z gluonami w stanie końcowym lub początkowym, tzn. wszystkie wyrażenia z operatorami kreacji bądź anihilacji gluonu.

3.1 Efektywny wyraz masowy dla fermionu

Jednym z ważnych wyrazów w hamiltonianie, istotnym dla struktury mezonów, jest wyraz masowy dla kwarków. Obok członu pochodzącego z hamiltonianu swobodnego, pojawia się człon uwzględniający efekty wyeliminowania oddziaływań między cząstkami o różnicy energii większej niż λ . Przy renormalizacji wyrazu masowego pojawia się potrzeba uwzględnienia kontrczłonu, gdyż te efekty są czułe na regularyzację wyjściowego hamiltonianu.



Rysunek 2: Kinematyka dla poprawki do masy fermionu

Oznaczmy przez k_1 odpowiedni pęd fermionu, zaś przez k_2 pęd gluonu. Z zasady zachowania pędu dostajemy, że

$$p_1 + p_2 = k_1 + k_2 := P \quad \text{dla składowych } + \text{ i } \perp$$

Możemy zatem pędy k_1 i k_2 rozisać za pomocą pędów względnych (pędów

Jacobiego na froncie świetlnym):

$$k_1^+ = xP^+, \quad (3.1a)$$

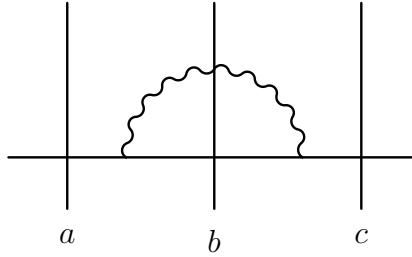
$$k_1^\perp = \kappa^\perp + xP^\perp; \quad (3.1b)$$

$$k_2^+ = (1-x)P^+, \quad (3.1c)$$

$$k_1^\perp = -\kappa^\perp + (1-x)P^\perp, \quad (3.1d)$$

Niezmienniczość względem pchnięć Lorentza pozwala nam położyć w tych wzorach $P^\perp = 0$, nie zmniejszając ogólności rozumowania.

Zewnętrzny czynnik podobieństwa f_{ac} dla wyrazu masowego w efektywnym hamiltonianie jest tożsamościowo równy 1 z powodu zachowania pędu. Pozostaje więc obliczyć wewnętrzny czynnik podobieństwa.



Rysunek 3: Energia własna fermionu

Dzięki temu, że konfiguracje początkowa i końcowa są identyczne, możemy w prosty sposób znaleźć wewnętrzny czynnik podobieństwa dla członu masowego. Nie potrzebujemy korzystać z ogólnego wzoru na \mathcal{F}_λ . Ze wzoru na transformację podobieństwa

$$\frac{d}{d\lambda}\mathcal{G}_{I\lambda} = \left[f\mathcal{G}_{I\lambda}, \left\{ \frac{d}{d\lambda}[(1-f)\mathcal{G}_{I\lambda}] \right\}_{\mathcal{G}_0} \right] \quad (3.2)$$

dostajemy następujący wzór na wyrazy drugiego rzędu w \mathcal{G}_I :

$$\tau_2' = [\{f'\tau_1\}, f\tau_1] \quad (3.3)$$

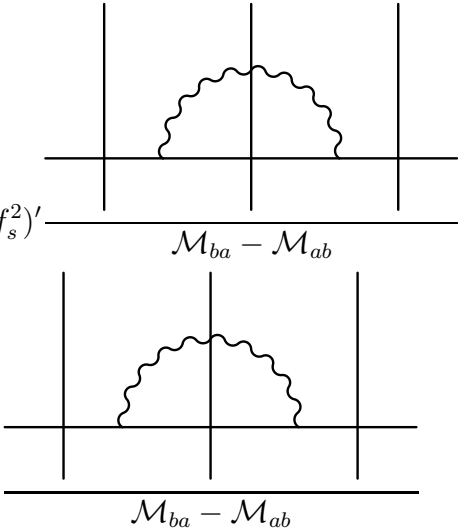
(gdzie τ_2 jest wyrazem drugiego rzędu w \mathcal{G}_I , zgodnie ze wzorem (2.17)).

Dla wyrazu drugiego rzędu będącego poprawką do masy fermionu, zauwa-

zając że stany wejściowy i wyjściowy są takie same, dostajemy

$$\begin{aligned}
\beta'_{100,100} &= [\{f'\tau_1\}, f\tau_1]_{100,100} = (\{f'\}f - f\{f'\})[\alpha_{100,101}\alpha_{101,100}]_{100,100} = \\
&= (f^2)'(\{1 - 1\})[\alpha_{100,101}\alpha_{101,100}]_{100,100} = \\
&= (f^2)' \left[\frac{1}{E_k - E_i} 1 - 1 \frac{1}{E_i - E_k} \right] [\alpha_{100,101}\alpha_{101,100}]_{100,100} = \\
&= (f^2)' \frac{2[\alpha_{100,101}\alpha_{101,100}]_{100,100}}{E_k - E_i}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Ponieważ wyrazy pierwszego rzędu τ_1 nie zależą od λ , a zależą od niej tylko funkcje f_{ab} , zatem możemy łatwo odcałkować to równanie różniczkowe na masę efektywną

$$\begin{aligned}
\beta_{\lambda 100,100} &= \beta_{\infty 100,100} + \int_{\infty}^{\lambda} ds 2(f_s^2)' \frac{\text{Diagram 1}}{\mathcal{M}_{ba} - \mathcal{M}_{ab}} = \\
&= \beta_{\infty 100,100} + 2(f_{\lambda}^2 - 1) \frac{\text{Diagram 2}}{\mathcal{M}_{ba} - \mathcal{M}_{ab}}
\end{aligned} \tag{3.5}$$


Z faktu iż stany końcowy i początkowy są identyczne wynika, że $ba = bc$ (patrz oznaczenia z rysunku 3). Obliczmy różnicę mas inwariantnych ba dla tego przypadku:

$$\begin{aligned}
ba &= (k_1 + k_2)^2 - p_1^2 = (k_1 + k_2 - p_1)^- p_1^+ \\
&= \left[\frac{\kappa_{\perp}^2 + m^2}{xP^+} + \frac{\kappa_{\perp}^2}{(1-x)P^+} \right] P^+ - m^2
\end{aligned}$$

Skorzystaliliśmy tutaj z tego, że $k_1^{+,\perp} + k_2^{+,\perp} = p_1^{+,\perp}$, oraz ze wzoru, że $p^- = \frac{k_{\perp}^2 + m^2}{k^+}$.

Możemy ten wzór zapisać w innej postaci:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\kappa_{\perp}^2 + m^2}{x} + \frac{\kappa_{\perp}^2}{(1-x)} \right] - m^2 &= \frac{\kappa_{\perp}^2}{x(1-x)} + \frac{m^2}{x} - m^2 = \\ &= \frac{\kappa_{\perp}^2}{x(1-x)} + \frac{m^2(1-x)}{x} \end{aligned}$$

Oznaczmy masę niezmienniczą stanu pośredniego złożonego z fermionu i gluonu $(k_1 + k_2)^- p_1^+ = \frac{\kappa_{\perp}^2 + m^2}{x(1-x)}$ jako \mathcal{M}^2 . Wypiszmy za jej pomocą funkcję podobieństwa dla członu masowego:

$$f_{ab} = \exp \left[-\frac{(ab)^2}{\lambda^4} \right] = \exp \left[-\frac{(\mathcal{M}^2 - m^2)^2}{\lambda^4} \right] \quad (3.6)$$

Człon dający wkład do masy efektywnej dany jest wzorem

$$\mathcal{G}_{1,1} = \int [P] \beta_{100,100} \left(b_P^\dagger b_P + d_P^\dagger d_P \right)$$

Czynnik $\beta_{100,100}$ otrzymujemy w następującej postaci

$$\mathcal{G}_{1,1} = \int [k] \frac{k_{\perp}^2 + m_{\lambda}^2}{k^+} \left(b_k^\dagger b_k + d_k^\dagger d_k \right).$$

Współczynnik $\beta_{100,100}$ spełnia równanie grupy renormalizacji (3.4). Zapiszmy równanie na $\mathcal{G}_{1,1}$ korzystając z równania na $\beta_{100,100}$ i oznaczając kontrybucję (całkę z $\beta_{\infty 100,100}$) przez $X_{1,1}^{(2)}(k)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{1,1} &= \int [p_1 p_2] a_{p_1}^\dagger a_{p_2} \int [k_1 k_2] \delta(p_1 - k_1 - k_2) \delta(k_1 + k_2 - p_1) \times \\ &\quad \times \frac{2g^2(f_{ab}^2 - 1)}{k_1^- + k_2^- - p_1^-} \sum_{\sigma_1 \sigma_2} \bar{u} \not{\epsilon}_1^{*a} u_2 \bar{u}_2 \not{\epsilon}_1^a u \ r_{\Delta}(ab) r_{\Delta}(bc) r_{\delta}^2 + \\ &\quad + \int [k] X_{1,1}^{(2)}(k) a_k^\dagger a_k = \\ &= \int [P] \frac{1}{P^+} a_P^\dagger a_P \left[g^2 \int [x \kappa] \frac{1}{P^+} \frac{2(f_{ab}^2 - 1)}{k_1^- + k_2^- - p_1^-} \times \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{\sigma} (\bar{u} \not{\epsilon}_{\sigma}^{*a} (\not{k}_1 + m) \not{\epsilon}_{\sigma}^a u) r_{\Delta}^2 r_{\delta}^2 + P^+ X_{1,1}^{(2)}(P) \right] \end{aligned}$$

Obliczając $\mathcal{G}_{1,1}$ skorzystaliśmy z zachowania pędu $P = p_1 = p_2$, wyrażając pędy za pomocą pędów względnych (pędów Jacobiego), oraz skorzystaliśmy ze wzoru $\sum_{\text{spin}} u \bar{u} = \not{p} + m$.

Zatem z postaci $\mathcal{G}_{1,1}$ widzimy, że zrenormalizowana masa fermionu dana jest wzorem:

$$m_\lambda^2 = m_\infty^2 + g^2 \sum_a \int [x\kappa] \frac{\exp[-2(\mathcal{M}^2 - m^2)^2/\lambda^4] - 1}{\mathcal{M}^2 - m^2} r_\Delta^2 r_\delta^2 \bar{u} \not{x}^{*a} (\not{k}_1 + m) \not{x}^a u$$

gdzie m_∞^2 (wyraz dla λ równego nieskończoności) zawiera kontrczłon masowy.

Suma po polaryzacjach gluonów daje znane wyrażenie

$$\sum_\varsigma \epsilon^\mu(k, \varsigma) \epsilon^{*\nu}(k, \varsigma) = -g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu g^{+\nu} + g^{+\mu} k^\nu}{k^+}, \quad (3.7)$$

zaś czynnik spinorowy wynosi

$$\begin{aligned} & \bar{u}_{m\sigma p} \gamma_\alpha (\not{k}_{1m} + m) \gamma_\beta u_{m\sigma p} \left[-g^{\alpha\beta} + \frac{k_2^\alpha g^{+\beta} + g^{+\alpha} k_2^\beta}{k_2^+} \right] \\ &= \frac{2}{x} \left[(1-x)^2 m^2 + \kappa^2 \frac{1+x^2}{(1-x)^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Korzystając z tych wzorów dostajemy następujące równanie na efektywną masę fermionu

$$\begin{aligned} m_\lambda^2 &= m_\infty^2 + \frac{g^2 C_2(F)}{2(2\pi)^3} \int \frac{dx d^2\kappa^\perp}{x(1-x)} \frac{\exp[-2(\mathcal{M}^2 - m^2)^2/\lambda^4] - 1}{\mathcal{M}^2 - m^2} \\ &\times \frac{2}{x} \left[(1-x)^2 m^2 + \kappa^2 \frac{1+x^2}{(1-x)^2} \right] r_\Delta^2 r_\delta^2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

gdzie $\delta_{ij} C_2(F) = T_{ik}^a T_{kj}^a$ jest odpowiednim operatorem Casimira. Będziemy go oznaczać dla skrócenia zapisu przez $C_F \equiv C_2(F)$. Niech $m_\lambda^2 = m^2 + \delta m_\infty^2 + \delta m_\lambda^2$.

Zakładając regularyzację nadfioletową za pomocą czynnika (2.8), oraz przeprowadzając odpowiednią zamianę zmiennych, dostajemy, że całka ta dzieli się na dwie części: jedną gdzie odcałkowujemy funkcję typu e^{-z} i drugą gdzie mamy całkę typu $\frac{1}{z} e^{-z}$.

Rozpatrzmy najpierw przypadek masy fermionu równej zero, dla której wszystkie całki daje się wykonać analitycznie. Dzięki rozpatrzeniu tego przypadku poznamy strukturę członu masowego. Dostajemy następujące równanie na poprawkę do wyrazu masowego

$$\delta m_\lambda^2 = \frac{g^2 C_F}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^2\kappa dx}{x(1-x)} \frac{\exp\left[\frac{2\kappa^2}{x(1-x)}\right]^2 / \lambda^4 - 1}{\frac{\kappa^2}{x(1-x)}} \frac{\kappa^2}{x(1-x)} \frac{1+x^2}{(1-x)} e^{-\frac{2\kappa^2}{x(1-x)\Delta^2}} r_\Delta^2 r_\delta^2 \quad (3.10)$$

Obliczmy najpierw część nie zawierającą czynnika podobieństwa, t.j. część z 1, pochodzącą od $\lambda = \infty$. Zamieniając zmienne na biegunowe, a następnie podstawiając

$$z = \frac{\kappa^2}{x(1-x)}, \quad (3.11)$$

i odcałkowując po z dostajemy:

$$\delta m_\lambda^2 = \frac{\alpha_s C_F \Delta^2}{2\pi} \frac{1}{4} \int_0^1 dx \frac{1+x^2}{1-x} r_\delta^2, \quad (3.12)$$

gdzie $\alpha_s = g^2/4\pi$.

Widać więc, że całka jest nieokreślona dla $x \rightarrow 1$. Dlatego wyjściowy hamiltonian wymagał regularyzacji w obszarze małych x -ów. W najprostszym przypadku regularyzacji przez obcięcie, przy pomocy czynnika regularyzującego w postaci $r_\delta(x) = \Theta(\delta - x)$, dostajemy wyrażenie

$$\delta m_\lambda^2 = \frac{\alpha_s C_F \Delta^2}{2\pi} \frac{1}{4} \int_0^{1-\delta} dx \frac{1+x^2}{1-x} = \frac{\alpha_s C_F \Delta^2}{2\pi} \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1}{\delta} - \frac{3}{4} + \dots \right) \quad (3.13)$$

gdzie położyliśmy równe zero te wyrazy, które mają granicę 0 przy $\delta \rightarrow 0$. Wynik (3.13) zależy od parametru Δ , nie zależy zaś od szerokości λ . Jest więc usuwany przez kontreczłon. Widzimy tutaj mieszanie rozbieżności nadfioletowej (tylko kwadratowa dla cząstek bezmasowych) oraz rozbieżności małych x -ów.

Dla składnika z czynnikiem podobieństwa dostajemy

$$\begin{aligned} \delta m_\lambda^2 &= \frac{\alpha_s C_F}{4\pi} \int_0^1 dx \frac{1+x^2}{1-x} r_\delta^2(1-x) \int_0^\infty dz e^{-2z^2/\lambda^4} e^{-2z/\Delta^2} = \\ &= \frac{\alpha_s C_F}{4\pi} e^{\frac{1}{2}\frac{\lambda^4}{\Delta^2}} \int_0^1 dx \frac{1+x^2}{1-x} r_\delta^2(1-x) \frac{\lambda^2}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \operatorname{erf} \frac{1}{\Delta^2} \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Człon ten ma skończoną granicę przy $\Delta \rightarrow \infty$. W tej granicy dostajemy:

$$m_\lambda^2 = m_\infty^2 + \frac{\alpha_s C_F \lambda^2 \sqrt{\pi}}{2\pi \cdot 2\sqrt{2}} \left(\ln \frac{1}{\delta} - \frac{3}{4} \right) \quad (3.15)$$

Widzimy ponadto, że człon ten zależy od szerokości energetycznej λ , a jednocześnie jest rozbieżny dla małych x -ów. Zatem podanie postaci kontreczłonu nie jest proste. Efektywna masa fermionu zawierać będzie rozbieżności podczerwone, gdyż nie da się usunąć kontreczłonem (który zależy tylko od Δ i δ) zależności od δ , będącej jednocześnie nietrywialną funkcją λ .

Zobaczmy, jak wygląda człon z 1 w ogólnym przypadku masy fermionu różnej od zera. Mamy

$$\mathcal{M}^2 - m^2 = \frac{\kappa^2}{x(1-x)} + \frac{m^2}{x} - m^2 \quad (3.16)$$

Wprowadzamy oznaczenie

$$M(x) = \frac{m^2(1-x)}{x}$$

Dostajemy po zamianie zmiennych jak w (3.11), że całkowanie rozpada się na dwie części. Pierwsza z nich, postaci

$$\int_0^1 dx \int_0^\infty dz \frac{A(x)}{z + M(x)} e^{-2z/\Delta^2} \quad \text{gdzie} \quad A(x) = \frac{2\pi m^2}{2(2\pi)^3} \quad (3.17)$$

daje rozbieżność logarytmiczną w Δ oraz człon skończony, ale nie zawiera rozbieżności małych x -ów. Druga, takiej samej postaci jak dla przypadku z masą fermionu równą zero, jest kwadratowa w Δ , i zawiera rozbieżność małych x -ów.

Zatem dostajemy człon z nadfioletową rozbieżnością logarytmiczną (plus wyrazy skończone), ale bez rozbieżności małych x -ów, oraz człon rozbieżny kwadratowo w Δ , będący jednocześnie rozbieżnym podczerwono. Składniki te usuwane są przez odpowiedni kontrczłon.

Dla pełnego wyznaczenia kontrczłonu nadfioletowego, usuwającego zależność od regularyzacji r_Δ , żądajmy, by dla szerokości $\lambda = \lambda_0$ efektywna masa kwarku miała zadaną wartość, równą $m_{\lambda_0}^2 \stackrel{\text{ozn}}{=} m_0^2$. Wartość m_0^2 ustalimy tak, jak należałoby to zrobić w QED.

Widzimy, że obliczając wyraz masowy dla kwarków w hamiltonianie efektywnym H_λ^δ , napotykamy na rozbieżności dużych pędów prostopadłych (dużych energii własnych), oraz na rozbieżności małych pędów podłużnych. Rozbieżności nadfioletowe usuwamy za pomocą kontrczłonu. Rozbieżności małych x -ów, charakterystyczne dla bozonów cechowania, nie dają się usunąć w prosty sposób, gdyż czynnik rozbieżny zależy od szerokości λ . Nawet gdybyśmy dobrali kontrczłon w taki sposób, by m_0^2 było wolne od rozbieżności małych x -ów, to dla innych wielkości parametru λ nadal mielibyśmy rozbieżności.

Popatrzmy na przypadek elektrodynamiki kwantowej. W QED ustalamy wartość m_0^2 rozwiązując zagadnienie własne dla hamiltonianu efektywnego przy skali λ_0 dla swobodnego elektronu

$$H_{\lambda_0}^{\text{eff}} |e(p)\rangle = \frac{p_\perp^2 + \tilde{m}^2}{p^+} |e(p)\rangle, \quad (3.18)$$

gdzie \tilde{m} oznacza skończoną, fizyczną masę elektronu, nie zawierającą rozbieżności.

Wyprowadzając hamiltonian efektywny musimy uwzględnić istnienie innych sektorów Focka poza jednoelektronowym. Robimy to za pomocą transformacji R Blocha, podanej przez Wilsona. Transformację R , sprowadzającą równanie własne do sektora jednego elektronu (eliminując inne sektory Focka, z efektywnymi elektronami, pozytonami i fotonami) wyliczamy w rachunku zaburzeń. W drugim rzędzie (dla dostatecznie małego λ_0) jedynym dodatkowym sektorem, który daje wkład do problemu jednoelektronowego, jest sektor z dodatkowym fotonem. Obliczamy hamiltonian efektywny ze wzoru

$$H_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{P + R^\dagger R}} (P + R^\dagger) H_\lambda (P + R) \frac{1}{\sqrt{P + R^\dagger R}} \quad (3.19)$$

w którym P jest operatorem rzutowym na stany o jednym elektronie efektywnym, a operator R wyliczamy z równania

$$[R, H_0] = QH_I P + QH_I R - RH_I P - RHR. \quad (3.20)$$

Dominującym wyrazem (najniższego rzędu) jest wyraz $QH_I P$.

W rachunku zaburzeń do drugiego rzędu w stałej sprzężenia dostajemy następującą postać równania własnego dla elektronu (wyrażając hamiltonian modelowy za pomocą operacji R i pisząc $H_{AB} = AH B$).

$$\begin{aligned} \frac{p_\perp^2 + \tilde{m}^2}{p^+} |e(p)\rangle &= H_{PP} |e(p)\rangle + H_{PQ} \frac{1}{H_0 - H_{QQ}} H_{QP} |e(p)\rangle \\ &= \frac{p_\perp^2 + m_{\lambda_0}^2}{p^+} |e(p)\rangle - H_{100,101}^{\lambda_0} \frac{1}{H_{101,101}^{\lambda_0} - H_0} H_{101,100}^{\lambda_0} |e(p)\rangle \end{aligned} \quad (3.21)$$

Ponieważ masa elektronu, jako wielkość fizyczna, jest skończona, więc rozbieżności w masie efektywnej muszą się kasować z nieskończonościami pochodzącymi z redukcji przestrzeni stanów do sektora jednoelektronowego. Nieskończoności te pochodzą z oddziaływania z niskoenergetycznymi (miękkimi) fotonami.

Możemy zastosować taki sam schemat w celu zaproponowania nadfioletowo skończonej części kontrczłonu dla wyrazu masowego dla kwarku efektywnego w QCD. Tym razem jednak rozpatrywane zagadnienie jest fikcyjne, nie występują bowiem swobodne kwarki. Dobrze przeprowadzone postępowanie musi ten fakt wyjaśnić. Jak dla QED, musimy rozważyć obecność dodatkowych sektorów. Ale w przeciwieństwie do QED, chromodynamika kwantowa

jest teorią z cechowaniem nieabelowym. Duża efektywna stała sprzężenia potrzebna w opisie hadronów (asymptotyczna swoboda) powoduje, że nie możemy stosować rachunku zaburzeń do wyliczania operacji R . Jest to zatem procedura, która proponuje postać kontrczłonu a la QED, i dopiero analiza problemu własnego H_λ powie nam, do jakich konsekwencji prowadzi ten wybór. W oryginalnym podejściu Perry’ego [8, 9] podobny wybór skończonej części kontrczłonu był oparty na argumentach, że odpowiadająca mu masa efektywna rozwiązuje równanie grupy renormalizacji, co oczywiście jest i tutaj prawdziwe w rachunku zaburzeń [1].

Musimy jeszcze powiedzieć, jakiej wielkości powinien być parametr \tilde{m} . Mówimy, że jest to masa konstytuentna (dana w przybliżeniu przez model kwarków konstytuentnych).

Ostatecznie przy skali λ_0 dostajemy następujący wzór na wartość wyrazu masowego (zgodnie z (3.21)):

$$\begin{aligned}
m_0^2 &= \tilde{m}^2 + \frac{\alpha_s C_F}{4\pi} \int \frac{dx}{x(1-x)} \int dz \\
&\times \exp \left[-\frac{(\mathcal{M}^2 - m^2)^2}{\lambda_0^4} \right] \frac{1}{\mathcal{M}^2 - m^2} \exp \left[-\frac{(\mathcal{M}^2 - m^2)^2}{\lambda_0^4} \right] \\
&\times \frac{2}{x} \left[(1-x)^2 m^2 + \kappa^2 \frac{1+x^2}{(1-x)^2} \right] r_\delta^2,
\end{aligned} \tag{3.22}$$

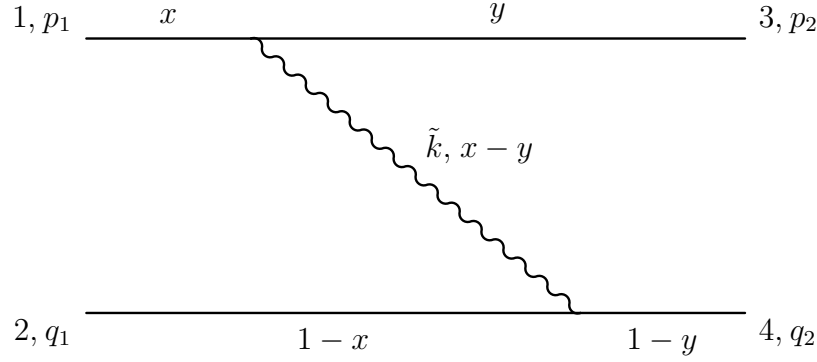
gdzie pominęliśmy człon regularyzujący zachowanie dla dużych pędów, gdyż dla skończonego λ całka jest skończona nadfioletowo. Usunęliśmy zatem w ten sposób zależność wyrazu masowego od regularyzacji r_Δ .

3.2 Efektywne oddziaływanie fermion–antyfermion

Do rozważania struktury mezonów oraz oddziaływań van der Waalsa między mezonami potrzebna jest nam znajomość postaci oddziaływania kwark–antykwar (oraz, analogiczne, kwark–kwark) w hamiltonianie efektywnym.

Wprowadźmy następujące oznaczenia dla pędów poprzecznych: oznaczmy pęd prostopadły dla pędów o indeksie 1 przez κ^\perp , zaś dla pędów o indeksie 2 przez ρ^\perp . Pędy p_1, p_2 oraz q_1, q_2 są pędami na powłoce masy, zaś pęd \tilde{k} jest pędem wirtualnego bozonu cechowania (gluonu).

Ponieważ mamy zachowany trójpęd: $p_1^+ + q_1^+ = p_2^+ + q_2^+$ oraz $p_1^\perp + q_1^\perp = p_2^\perp +$



Rysunek 4: Kinematyka dla pojedynczej wymiany

q_2^\perp , możemy pędy zapisać za pomocą pędów Jacobiego na froncie świetlnym,

$$\begin{aligned} p_1^+ &= xP^+, \\ p_1^\perp &= xP^\perp + \kappa^\perp, \\ q_1^+ &= (1-x)P^+, \\ q_1^\perp &= (1-x)p^\perp - \kappa^\perp, \end{aligned}$$

i analogicznie dla pozostałych zmiennych (z zachowania trójpędu wynika że P jest to samo dla pędów o indeksach 2, co dla pędów o indeksach 1), tylko zamiast x jest y , zaś zamiast κ^\perp : ρ^\perp . Dla uproszczenia wybierzemy układ, dla którego $P^\perp = 0$ (niezmienniczość dynamiki względem pchnięć Lorentza powoduje, że to uproszczenie nie traci nic z ogólności rozumowania).

Warunek, że pędy fermionów są na powłoce masy ($p_1^2 = m_1^2$ itp.) oznacza, że np. (dla uproszczenia założymy, że obie oddziałujące cząstki mają te same masy, $m_1 = m_2 = m$)

$$p_1^- = \frac{p_1^{\perp 2} + m^2}{p_1^+} = \frac{\kappa^{\perp 2} + m^2}{xP^+}$$

Oznaczmy $\tilde{k}_1 = p_1 - p_2$. Wtedy (uwaga: zazwyczaj $p_1^- - p_2^- \neq q_1^- - q_2^-$)

$$\begin{aligned} \tilde{k}_1^+ &= (x-y)P^+ \\ \tilde{k}_1^\perp &= \kappa^\perp - \rho^\perp \\ \tilde{k}_1^- &= \frac{\kappa^{\perp 2} + m^2}{xP^+} - \frac{\rho^{\perp 2} + m^2}{yP^+} = (y-x)\mathcal{M}_1^2 \frac{1}{P^+} \end{aligned}$$

gdzie przez \mathcal{M}_1^2 oznaczyliśmy niezmienniczą masę układu fermionów 1:

$$\mathcal{M}_1^2 = (p_1 + q_1)^2 = \frac{\kappa^{\perp 2} + m^2}{x(1-x)}$$

Przez k oznaczamy czterowektor pędu bozonu na powłoce masy t.j. $k^{+, \perp} = \tilde{k}_1^{+, \perp} = \tilde{k}_2^{+, \perp}$, natomiast

$$k^- = \frac{k^{\perp 2}}{k^+} = \frac{(\kappa^\perp - \rho^\perp)^2}{(x-y)P^+},$$

Efektywne oddziaływanie kwark–antykwarok ma strukturę

$$\mathcal{G}_{110,110} = \int [P] \frac{1}{P^+} \sum_{\text{spiny}} \int [x\kappa] [y\rho] \beta_{110,110} b_{xP+\kappa}^\dagger b_{(1-x)P-\kappa}^\dagger b_{yP+\rho} d_{(1-y)P-\rho}$$

gdzie współczynnik $\beta_{110,110}$ spełnia równanie (patrz rozdział 2)

$$\beta'_{110,110} = f_2 [\alpha_{110,001} \alpha_{001,110} + \alpha_{100,101} \alpha_{011,010} + \alpha_{010,011} \alpha_{101,100}]_{110,110}$$

Po prawej stronie tylko czynnik f_2 zależy od λ , więc równania te łatwo się rozwiązuje. Należy pamiętać jednak o wyrazach natychmiastowych w wyjściowym hamiltonianie (z natychmiastową wymianą gluonu między kwarkiem i antykwarkiem), pochodzących z eliminacji zależnych stopni swobody, które to wyrazy mają strukturę 110, 110. Dają one warunek początkowy (w $\lambda = \infty$) dla równania na β .

Z pojedynczej wymiany gluonu dostaniemy czynnik

$$\beta_{110,110} = \frac{-g^2 \mathcal{F}_{2\lambda}}{(x-y)P^+} r_{\Delta\delta} \sum_{\sigma} \bar{u}_1 \not{\epsilon}_{k_5 \sigma}^a u_2 \bar{v}_4 \not{\epsilon}_{k_5 \sigma}^{*a} v_3 \quad (3.23)$$

Suma po polaryzacjach gluonu dana jest wyrażeniem

$$\sum_{\varsigma} \epsilon^\mu(k, \varsigma) \epsilon^{*\nu}(k, \varsigma) = -g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu g^{+\nu} + g^{+\mu} k^\nu}{k^+}. \quad (3.24)$$

Korzystamy tutaj z zapisu lorentzowskiego, aby móc złożyć ten czynnik z członem natychmiastowej wymiany.

Mamy $k = k_1 - k_2$ dla składowych przestrzennych. Zatem korzystając z równania Diraca możemy zapisać

$$\begin{aligned} \bar{u}(k_1) \not{k} u(k_2) &= \bar{u}_1 \left[\tilde{k}_2 - \tilde{k}_1 + \frac{\gamma^+}{2} [(k_2 - k_1)_0^- - \tilde{k}_2^- + \tilde{k}_1^-] \right] u_2 \\ &= \bar{u}_1 \gamma^+ u_2 \frac{-(\tilde{k}_2 - \tilde{k}_1)^2}{2(k_2^+ - k_1^+)} \end{aligned} \quad (3.25)$$

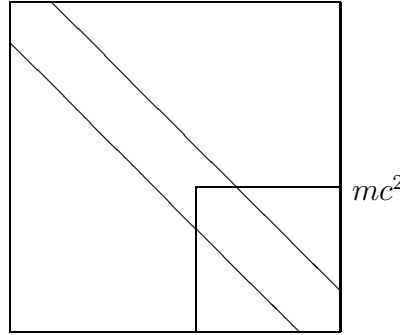
Korzystając z powyższego wzoru dostajemy, że

$$\begin{aligned} \beta_{110,110} = & -g^2 r_{\Delta\delta} \frac{\mathcal{F}_{2\lambda}}{(x-y)P^+} \\ & \times \left[-g^{\mu\nu} - g^{\mu+} g^{\nu+} \frac{\tilde{k}_2^2 + \tilde{k}_1^2}{2(x-y)^2 P^{+2}} \right] \bar{u}_1 \gamma_\mu T^a u_2 \bar{v}_4 \gamma_\nu T^a v_3 + \\ & + (x \leftrightarrow y) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Musimy uwzględnić jeszcze człon natychmiastowy który ma postać

$$\beta_{\text{seagull}} = -g^2 r_{\Delta\delta} \frac{1}{(x-y)^2 P^{+2}} \bar{u}_1 \gamma^+ u_2 \bar{v}_4 \gamma^+ v_3 \quad (3.27)$$

Aby uprościć rozważania i móc jak najwięcej powiedzieć o oddziaływaniach między kwarkami, będziemy prowadzić obliczenia w przybliżeniu nierelatywistycznym, t.j. dla ciężkich kwarków. Dzięki temu, że hamiltonian jest przydiagonalny w energiach, to jeśli jego szerokość jest dużo mniejsza od energii spoczynkowej cząstek które rozważamy, możemy obciąć przestrzeń stanów do stanów nierelatywistycznych, t.j. o energii kinetycznej dużo mniejszej od energii spoczynkowej. Dzięki temu, że hamiltonian jest wąski wyjęcie z macierzy hamiltonian, okna o szerokości dużo większej od szerokości hamiltonianu nie powoduje znaczących poprawek. Sprzężenie do stanów o wyższych energiach jest małe (rysunek 5). Szersze rozważania n.t. redukcji dynamiki do obszaru nierelatywistycznego znaleźć można w [10].



Rysunek 5: Przybliżenie nierelatywistyczne w renormalizacji przez podobieństwo

Aby móc prowadzić przybliżenie nierelatywistyczne szerokość hamiltonianu powinna być dużo mniejsza od mc^2 . Potrzebne są ciężkie kwarki, aby λ

nie musiało być zbyt małe i mogło być duże w porównaniu z Λ_{QCD} . Przy bardzo małym λ nie możemy stosować rachunku zaburzeń, gdyż efektywna stała sprzężenia g_λ rośnie, gdy λ dąży do zera.

Aby zdefiniować przybliżenie nierelatywistyczne wprowadzamy zmienną k_3 , tak by niezmiennicza masa układu dwu fermionów dana była wzorem

$$\mathcal{M} = 2E_{\text{rel}} = 2\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$$

gdzie $\mathbf{k} = (k^\perp, k_3)$. Zakładamy, że $k^\perp = \kappa^\perp$, i powyższy wzór służy nam do zdefiniowania k_3 . Znając \mathbf{k} będziemy mogli powiedzieć, co oznacza że pęd jest mały w porównaniu z masą.

Dostajemy

$$\frac{\kappa^{\perp 2} + m^2}{x(1-x)} = \mathcal{M}^2 = 4(\kappa^{\perp 2} + k_3^2 + m^2) \quad (3.28a)$$

zatem

$$k_3 = \left(x - \frac{1}{2}\right)\mathcal{M} \quad (3.28b)$$

$$x = \frac{1}{2} + \frac{k_3}{\mathcal{M}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{k_3}{\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}}\right) \quad (3.28c)$$

Mówimy, że pędy fermionów są nierelatywistyczne, gdy wszystkie składowe trójwektora \mathbf{k} są małe w porównaniu z mc . Oznacza to, między innymi, że x jest bliskie $\frac{1}{2}$:

$$x \approx \frac{1}{2} \left(1 + \frac{k_3}{m} - \frac{1}{2} \frac{k_3}{m} \frac{\mathbf{k}^2}{m^2} + o\left(\frac{k^5}{m^5}\right)\right)$$

Wzory te można uogólnić na przypadek różnych mas obu fermionów tworzących rozważany przez nas stan [9].

Ostatecznie dostajemy

$$x = \frac{1}{2} + \eta \quad (3.29)$$

gdzie η w przybliżeniu nierelatywistycznym jest małe.

Do wyliczenia hamiltonianu efektywnego potrzebna nam jest znajomość wewnętrznego czynnika podobieństwa. W drugim rzędzie rachunku zaburzeń dany jest on wzorem (2.23):

$$\mathcal{F}_{2\lambda}(a, b, c) = \frac{P_{ba}^+ ba + P_{bc}^+ bc}{(ba)^2 + (bc)^2} (f_\lambda(a, b)f_\lambda(b, c) - 1)$$

W naszej notacji (patrz rysunek 4) mamy

$$\begin{aligned} P_{ab}^+ &= P_{ba}^+ = p_1^+ & \mathcal{M}_{ab}^2 &= p_1^2 \\ P_{bc}^+ &= P_{cb}^+ = q_2^+ & \mathcal{M}_{ba}^2 &= (p_2 + k)^2 \\ & & \mathcal{M}_{bc}^2 &= (k + q_1)^2 \\ & & \mathcal{M}_{cb}^2 &= q_2^2 \end{aligned}$$

gdzie, zgodnie z definicją energii na froncie świetlnym, pęd gluonu k ma współrzędną k^- daną wzorem

$$k^- = \frac{(\kappa^\perp - \rho^\perp)^2}{(x - y)P^+}.$$

Obliczamy ile wynoszą różnice energii własnych ba oraz bc , potrzebne do wyliczenia wewnętrznego czynnika podobieństwa

$$ba = \mathcal{M}_{ba}^2 - \mathcal{M}_{ab}^2 = (p_2 + k)^2 - p_1^2 = (p_2 + k - p_1)(p_2 + k + p_1) \quad (3.30a)$$

$$bc = \mathcal{M}_{bc}^2 - \mathcal{M}_{cb}^2 = (k + q_1)^2 - q_2^2 = (k + q_1 - q_2)(k + q_1 + q_2) \quad (3.30b)$$

Korzystając z własności pędu k oraz wyrażając pędy cząstek za pomocą pędów względnych, dostajemy

$$ba = x \left[\frac{\rho^{\perp 2} + m^2}{y} + \frac{(\kappa^\perp - \rho^\perp)^2}{x - y} - \frac{\kappa^{\perp 2} + m^2}{x} \right] \quad (3.31a)$$

$$bc = (1 - y) \left[\frac{(\kappa^\perp - \rho^\perp)^2}{x - y} + \frac{\kappa^{\perp 2} + m^2}{1 - x} - \frac{\rho^{\perp 2} + m^2}{1 - y} \right] \quad (3.31b)$$

W przybliżeniu nierelatywistycznym, charakterystyczną różnicą energii pojawiającą się przy wyliczaniu ab i ba ,

$$- \Delta \mathcal{W}_p := P^+ \tilde{k}_1^- = \frac{\kappa^{\perp 2} + m^2}{x} - \frac{\rho^{\perp 2} + m^2}{y}, \quad (3.32)$$

rozwijamy, używając wzoru (3.29) (i analogicznego dla y), otrzymując

$$\frac{\kappa^{\perp 2} + m^2}{\frac{1}{2} - \eta_x} - \frac{\rho^{\perp 2} + m^2}{\frac{1}{2} - \eta_y}$$

Ponieważ κ^\perp, ρ^\perp i η_i są małe (przy czym $\eta_i \ll 1$)

$$- \Delta \mathcal{W}_p \simeq 4m^2(\eta_x - \eta_y) + o(\mathbf{k}^2). \quad (3.33)$$

Wypisaliśmy tylko wyrazy najniższego rzędu w pędach. Dokładnie taki sam rezultat dostaniemy dla $\Delta\mathcal{W}_q$, czyli dla analogicznej różnicy energii, pojawiającej się wzorze (3.31b) na bc . Korzystając z powyższego wzoru i wstawiając go do (3.31) dostajemy:

$$\begin{aligned} \frac{ba}{x} &= \left[\frac{\rho^\perp{}^2 + m^2}{y} - \frac{\kappa^\perp{}^2 + m^2}{x} + \frac{(\kappa^\perp - \rho^\perp)^2}{x - y} \right] = \\ &= \left[4m^2(\eta_y - \eta_x) + \frac{(\kappa^\perp - \rho^\perp)^2}{\eta_y - \eta_x} \right] = \\ &= \frac{1}{\eta_y - \eta_x} (q_z^2 + q^\perp{}^2), \end{aligned} \quad (3.34)$$

gdzie $q^\perp = \kappa^\perp - \rho^\perp$ oraz $q_z = 2m(\eta_x - \eta_y) = 2m(x - y)$.

Zatem, wyrażając ba i bc za pomocą trójwektora \mathbf{q} otrzymujemy

$$ba = x \frac{\mathbf{q}^2}{x - y} \quad (3.35a)$$

$$bc = (1 - y) \frac{\mathbf{q}^2}{x - y} \quad (3.35b)$$

Dostajemy więc następujący wzór na wewnętrzny czynnik podobieństwa

$$\mathcal{F}_{2\lambda} = \frac{(x - y)P^+}{\mathbf{q}^2} (f_{ab}f_{bc} - 1) \quad (3.36)$$

Dla $f_\lambda(ab)$ danego wzorem (2.21), przyjmując że ab oraz bc są zdefiniowane przez (3.31), dostajemy

$$(ba)^2 + (bc)^2 = (x^2 + (1 - y)^2) \left[\frac{(\kappa^\perp - \rho^\perp)^2}{x - y} + \Delta\mathcal{W} \right] \quad (3.37)$$

Zgodnie z przybliżeniem nierelatywistycznym na ba i bc , danym równaniem (3.35), możemy napisać

$$(ba)^2 + (bc)^2 = (x^2 + (1 - y)^2) \left[\frac{\mathbf{q}^2}{x - y} \right]. \quad (3.38)$$

Uwzględniając zatem tylko wyrazy najniższego rzędu w pędach, otrzymujemy

$$f_\lambda(ab)f_\lambda(bc) = \exp \left[-\frac{\mathbf{q}^4}{q_z^2} \frac{4m^2}{2\lambda^4} \right] \quad (3.39)$$

Do wyliczenia postaci członu oddziaływania w hamiltonianie efektywnym potrzebna jest nam także postać zewnętrznego czynnika podobieństwa, mnożącego operator \mathcal{G}_λ . Ponieważ stan przed i po oddziaływaniu zawiera te same

cząstki, a w przybliżeniu nierelatywistycznym dominuje energia spoczynkowa, więc możemy przyjąć, że zewnętrzny czynnik podobieństwa jest w wiodącym rzędzie równy 1, bo rośnięcie energii kinetycznych dla fermionów jest małe w porównaniu z λ w dominujących konfiguracjach kwarków.

Aby wyliczyć efektywne oddziaływanie między kwarkami musimy znać postać czynników spinorowych $\bar{u}\gamma^+u$ oraz $\bar{u}\gamma^\mu u$. W ogólnym przypadku dają one skomplikowaną zależność od spinu. Jednak w przybliżeniu nierelatywistycznym wzory na czynniki spinorowe upraszczają się.

Potrzebny nam będą czynniki $\bar{u}\gamma^+u$ oraz $\bar{v}\gamma^+v$, pojawiające się w oddziaływaniu efektywnym.

Mamy $\bar{u}\gamma^+u = u^\dagger\gamma^0\gamma^+u = u^\dagger 2\Lambda_+u$. Rozpisując wzorki na spinory (A.9) dostajemy

$$\bar{u}_{p_1m\lambda_1}\gamma^+u_{p_2m\lambda_2} = u_{p_1m\lambda_1}^\dagger 2\Lambda^+ u_{p_2m\lambda_2} = \zeta_{\lambda_1}^\dagger 4\sqrt{p_1^+ p_2^+}\Lambda_+\zeta_{\lambda_2}$$

Analogicznie dostajemy wzór dla $\bar{v}\gamma^+v$. Z postaci macierzy $\Lambda_\pm = \frac{1}{2}(1\pm\alpha^3)$ w reprezentacji Diraca dostajemy, że

$$\begin{aligned} u_\uparrow^\dagger\Lambda_\pm u_\uparrow &= u_\downarrow^\dagger\Lambda_\pm u_\downarrow = \frac{1}{2}2m \\ u_\uparrow^\dagger\Lambda_\pm u_\downarrow &= u_\downarrow^\dagger\Lambda_\pm u_\uparrow = 0 \end{aligned}$$

i podobnie dla antykwarków.

Zatem wyrażenie $\bar{u}\gamma^+u\bar{v}\gamma^+v$ redukuje się do $2\sqrt{x(1-x)y(1-y)}P^{+2}$

Pozostaje obliczyć ile wynosi $\bar{u}\gamma^\mu u\bar{v}\gamma_\mu v$. Rozpisujemy iloczyn skalarny macierzy γ :

Rozpisując $\bar{u}\gamma^-u$ dostajemy

$$\bar{u}_{p_1m\lambda_1}\gamma^-u_{p_2m\lambda_2} = u_{p_1m\lambda_1}^\dagger 2\Lambda^- u_{p_2m\lambda_2} \approx \frac{4m^2}{\sqrt{p_1^+ p_2^+}}\zeta_{\lambda_1}^\dagger\Lambda_-\zeta_{\lambda_2},$$

gdyż w przybliżeniu nierelatywistycznym dominuje człon z m^2 . Natomiast

$$\bar{u}_{p_1m\lambda_1}\gamma^i u_{p_2m\lambda_2} = u_{p_1m\lambda_1}^\dagger \alpha^i u_{p_2m\lambda_2} \approx \frac{2m}{\sqrt{p_1^+ p_2^+}}\zeta_{\lambda_1}^\dagger \alpha^i (p_1^+\Lambda_- + p_2^+\Lambda_+)\zeta_{\lambda_2}$$

gdzie w przybliżeniu nierelatywistycznym pozostawiliśmy człon dominujący w pędach. Macierze $\alpha^i\Lambda_\pm$ mają niezerowe elementy, gdy cząstki mają przeciwny spin.

Korzystając z faktu, że $\zeta_{\lambda_1}^\dagger\alpha^\perp\Lambda_-\zeta_{\lambda_2} = -\zeta_{\lambda_1}^\dagger\alpha^\perp\Lambda_+\zeta_{\lambda_2}$, dostajemy że człon ten jest proporcjonalny do różnicy pędów $p_1^+ - p_2^+$. Człon zmieniający spin jest zatem pomijalnie mały w przybliżeniu nierelatywistycznym.

Zatem $\bar{u}\gamma^\mu u \bar{v}\gamma_\mu v \approx \sqrt{x(1-x)y(1-y)}4m^4$. Oddziaływanie nie zmienia spinu cząstek.

Pomijając czynnik $\sqrt{x(1-x)y(1-y)}$ który się skraca z analogicznym czynnikiem w potencjale, przy definicji funkcji falowej mezonu wzorem

$$|P\rangle = \int \frac{d^2\kappa dx}{2(2\pi)^3 \sqrt{x(1-x)}} \phi(\kappa, x) b^\dagger d^\dagger |0\rangle, \quad (3.40)$$

dostajemy, że w przybliżeniu nierelatywistycznym struktura spinorowa wyrazu oddziaływania dana jest następującymi wzorami:

$$\bar{u}\gamma^+ u \bar{v}\gamma^+ v \longrightarrow 4p^{+2} \quad (3.41a)$$

$$\bar{u}\gamma^\mu u \bar{v}\gamma_\mu v \longrightarrow 4m^2 \quad (3.41b)$$

3.3 Potencjały efektywne w przybliżeniu nierelatywistycznym

W drugim rzędzie rachunku zaburzeń dostajemy także człon anihilacyjny, ale ponieważ macierze kolorowe są bezśladowe, więc nie daje on wkładu do oddziaływania dla układu $q\bar{q}$, będącego singletem kolorowym. Nie zawiera on również czynnika rozbieżnego. Człon ten mógłby mieć znaczenie przy rozważaniu oddziaływań van der Waalsa między dwoma mezonami, ale daje on potencjał krótkozasięgowy, więc można go pominąć w rozważaniach.

Rozpatrzmy teraz pełną postać oddziaływania kwark–antykwar w przybliżeniu nierelatywistycznym.

Człon coulombowski przybiera postać

$$\beta_c = -g^2 \mathcal{F}_{2\lambda} \frac{\theta(x-y)}{(x-y)P^+} \bar{u}_1 \gamma^\mu u_2 \bar{v}_1 \gamma_\mu v_2 + (\text{analogiczny z } x \leftrightarrow y)$$

Korzystając z przybliżenia nierelatywistycznego na wewnętrzny czynnik podobieństwa oraz na strukturę spinorową otrzymujemy

$$h_c = \beta_c f_{ac} = \frac{g_\lambda^2 4m^2 \text{FF}}{\mathbf{q}^2} (f_{ab} f_{bc} - 1) f_{ac} \quad (3.42)$$

gdzie FF oznacza czynnik kolorowy dla wymiany. Ponieważ zewnętrzny czynnik podobieństwa w granicy nierelatywistycznej jest w przybliżeniu równy jeden, więc będziemy go pomijać w dalszych wzorach.

Używając operatora Casimira

$$C_2(\psi) = (F_q + F_{\bar{q}})^2 = F_q^2 + 2F_q \cdot F_{\bar{q}} + F_{\bar{q}}^2 = C_2(3) + 2F_q \cdot F_{\bar{q}} + C_2(3^*) \quad (3.43)$$

dostajemy, że czynnik kolorowy daje się zapisać w postaci

$$2\mathbb{F}\mathbb{F} = 2F_q \cdot F_{\bar{q}} = C(\psi) - 2C(3), \quad (3.44)$$

w zależności od stanu kolorowego w którym znajduje się mezon. Dla mezonu w singlcie kolorowym dostajemy identyczny czynnik kolorowy jak ten, który mamy w masie efektywnej.

Kolorowe oddziaływanie Coulomba zawiera obcięcie przekazów pędów od dołu (przez czynnik pochodzący z transformacji podobieństwa), zapewniające, że pęd niesiony przez gluon jest dostatecznie duży. Wyraz ten pojawia się w hamiltonianie jako rezultat wyeliminowania oddziaływań między stanami różniącymi się energią swobodną o więcej niż λ .

Jeśli pominąć czynnik podobieństwa obcinający pędy od dołu to, że oddziaływanie w przestrzeni pędów, zachowujące się jak $1/\mathbf{q}^2$, daje potencjał coulombowski. W naszym przypadku wewnętrzny czynnik podobieństwa zapewnia, że energia gluonu przenoszącego oddziaływanie jest duża, $\sim |\mathbf{q}|$, w porównaniu z energią kinetyczną kwarków $\sim \mathbf{q}^2/m$ (jest tak w przypadku nierelatywistycznym, gdzie $|\mathbf{q}| \ll m$).

Człon coulombowski nie jest jedynym wyrazem typu oddziaływania potencjalnego w H_λ . W oddziaływaniu efektywnym mamy poza nim dwa wyrażenia, ze strukturą spinorową typu $\bar{u}\gamma^+u\bar{v}\gamma^+v$.

Wypiszmy najpierw człon pochodzący z wymiany gluonu, związany z drugim składnikiem wzoru na sumę po polaryzacjach gluonu:

$$\beta_{w1} = -g^2\mathbb{F}\mathbb{F}\mathcal{F}_{2\lambda} \frac{\theta(x-y)}{(x-y)P^+} \frac{\tilde{k}_p^2 + \tilde{k}_q^2}{2(x-y)^2P^{+2}} \bar{u}_1\gamma^+u_2\bar{v}_1\gamma^+v_2 + (x \leftrightarrow y)$$

W przybliżeniu nierelatywistycznym $\tilde{k}_p^2 \approx \tilde{k}_q^2$. Wtedy $\tilde{k}_p^2 = \tilde{k}_q^2 = \mathbf{q}^2$. Korzystając z nierelatywistycznego wzoru na $\mathcal{F}_{2\lambda}$ (3.36) dostajemy

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{2\lambda} \frac{\mathbb{F}\mathbb{F}}{(x-y)P^+} \frac{\tilde{k}_p^2 + \tilde{k}_q^2}{2(x-y)^2P^{+2}} &\approx \\ &\approx \frac{(x-y)P^+}{\mathbf{q}^2} [f_{ab}f_{bc} - 1] \frac{\mathbb{F}\mathbb{F}}{(x-y)P^+} \frac{\mathbf{q}^2}{(x-y)^2P^{+2}} = \\ &= \frac{\mathbb{F}\mathbb{F}}{(x-y)^2P^{+2}} (f_{ab}f_{bc} - 1) \end{aligned}$$

Pomijając czynniki, które skracają się z odpowiednimi czynnikami wynikającymi z definicji funkcji falowej możemy w przybliżeniu nierelatywistycznym spinorowe czynniki $\bar{u}\gamma^+u\bar{v}\gamma^+v$, zgodnie z wzorem (3.41a), zastąpić przez

P^{+2} :

$$\begin{aligned}\beta_{w1} &= \text{FF} \frac{-g^2}{(x-y)^2} [f_{ab}f_{bc} - 1] = \\ &= \text{FF} \frac{-g^2 4m^2}{q_z^2} [f_{ab}f_{bc} - 1],\end{aligned}$$

gdzie $q_z \stackrel{\text{df}}{=} 2m(x-y)$.

Pozostaje do rozważenia człon oddziaływania natychmiastowego. Ma on postać

$$\beta_{w2} = -g^2 \frac{\text{FF}}{(x-y)^2 P^{+2}} \bar{u}_1 \gamma^+ u_2 \bar{v}_1 \gamma^+ v_2.$$

Gdy dodamy do siebie te dwa człony, to oddziaływanie natychmiastowe skasuje jedynekę w wyrażeniu $[f_{ab}f_{bc} - 1]$. Dostajemy zatem

$$\beta_w = \frac{-g^2 4m^2 \text{FF}}{q_z^2} f_{ab}f_{bc}. \quad (3.45)$$

Człon ten prowadzi do logarytmicznego potencjału wiążącego, nie zachowującego symetrii obrotowej, co wyjaśnimy później. Ścisłe wyliczenie potencjału dla funkcji podobieństwa w postaci funkcji schodkowej znajduje się w [9], a jakościowe wytłumaczenie, dlaczego jest on logarytmiczny dla dużych odległości jest podane w [11] i [12].

Człon (3.45) jest rozbieżny dla $q_z \rightarrow 0$. Wydzielamy część rozbieżną w potencjale wiążącym, aby porównać ją z rozbieżnością napotkaną w wyrazie masowym. W tym celu obliczamy elementy macierzowe części hamiltonianu odpowiadającej za uwięzienie (zobacz też [11]) między funkcjami falowymi danymi wzorem (3.40), gdzie stany $|P\rangle$ są unormowane do $\langle P|P'\rangle = 2(2\pi)^3 P^+ \delta^3(P - P') \langle 0|0\rangle$:

$$\begin{aligned}\langle \psi(P) | \mathcal{H}_{\text{conf}} | \psi(P') \rangle &= -2(2\pi)^3 P^+ \delta^3(P - P') g^2 C_F \\ &\times \int \frac{dy_1 d^2\kappa_1}{2(2\pi)^3} \frac{dy_2 d^2\kappa_2}{2(2\pi)^3} \frac{\text{FF}}{(y_1 - y_2)^2} f_{ab}f_{bc} r_\delta \phi^*(\kappa_2, y_2) \phi(\kappa_1, y_1)\end{aligned} \quad (3.46)$$

Rozbieżność pochodzi z obszaru, gdzie $y_1 \sim y_2$. Możemy zatem założyć, dzięki czynnikowi podobieństwa, że $(\kappa_1 - \kappa_2)^2 \ll \lambda^2$. Zamieniamy zmienne na $K = (\kappa_1 + \kappa_2)/2$, $k = \kappa_1 - \kappa_2$; analogicznie definiujemy Y i y dla pędów podłużnych. Ograniczamy się w całkowaniu do małych y . Podstawiając czynnik podobieństwa w przybliżeniu nierelatywistycznym zgodnie ze wzorem (3.39), dostajemy taką samą postać części rozbieżnej (rozbieżność logarytmiczną) jak dla mas efektywnych. Wyliczając czynniki kolorowe (dla mas jest to C_F ,

dla potencjału FF) dla mezonu w singlecie, dostajemy że nieskończoności te się skracają wzajemnie. Pozostała skończona część daje potencjał między kwarkami, które mają masy konstytuentne.

Do znajdowania sił van der Waalsa potrzebujemy znać postać potencjału na dużych odległościach. Ponieważ potencjał zawiera stały człon rozbieżny, kasowany przez masy efektywne, więc dla uproszczenia obliczmy pochodną, która nie zawiera rozbieżności, a opisuje potencjał [11]. Przechodzimy do przestrzeni położeń za pomocą transformaty Fouriera. Pochodna po współrzędnej z potencjału w przybliżeniu nierelatywistycznym dana jest wzorem

$$\frac{\partial}{\partial z} V(z) = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \exp \left[-\frac{\mathbf{q}^4}{q_z^2} \frac{2m^2}{\lambda^4} \right] \frac{-g^2 4m^2}{q_z^2} (iq_z) e^{iq_z z} \quad (3.47)$$

Znaczący wkład do tej całki pochodzi z obszaru małych q_z , tak że względu na to, że funkcja podcałkowa ma osobliwość w $q_z = 0$, jak i dlatego, że dominujący wkład do transformaty Fouriera dla dużych z pochodzi z obszaru gdzie $q_z z \lesssim 1$. Możemy zatem założyć, że dla dużych z mamy $q_z \ll q_\perp$, w miejsce \mathbf{q} położyć q_\perp , i odcałkować po pędach prostopadłych. Dostajemy, pamiętając że założyliśmy iż q_z jest małe, więc jest ograniczone $q_z \leq P_z$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} V(z) &\simeq \frac{-ig^2 4m^2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi\lambda^4}{4m^2}} \int_0^{P_z} \frac{q_z}{|q_z|} e^{iq_z z} \\ &\sim \frac{1}{z} - \frac{\cos(P_z z)}{z} \end{aligned} \quad (3.48)$$

Pierwszy człon jest pochodną logarytmu. Drugi po odcałkowaniu daje cosinus całkowy, czyli potencjał krótkozasięgowy. Gdybyśmy pominęli ograniczenie na q_z dostalibyśmy $\delta(z)$ zamiast $\cos(P_z z)/z$, jako dodatkowy, obok logarytmicznego, człon oddziaływania. Daje on potencjał który jest ograniczony dla dużych z .

W podobny sposób można pokazać, że w kierunku prostopadłym, dla dużych odległości, też dostajemy potencjał logarytmiczny, ale o innym współczynniku liczbowym. Dlatego nie jest on sferycznie symetryczny. Związane jest to z tym, że prowadzimy obliczenia na froncie świetlnym, dla którego obroty zależą od oddziaływania, symetria obrotowa może więc być łamana przy obliczeniach w rachunku zaburzeń.

3.4 Problem uwięzienia

Warto zauważyć że czynniki podobieństwa przy członie coulombowskim oraz przy członie wiążącym są nawzajem komplementarne (składają się do

jedności). Dzięki temu, gdy w QED prowadzimy redukcję za pomocą transformacji R z przestrzeni trójcząstkowej (z fotonem) występują w niej człony kasujące człon $f_{ab}f_{bc}$ w członie coulombowskim odtwarzając pełne oddziaływanie coulombowskie, i jednocześnie kasuje się potencjał wiążący. Zatem w QED, gdzie nie możemy zaniedbać stanów z jednym fotonem nie dostajemy uwięzienia — zgodnie z oczekiwaniami. Fotony są bezmasowe i nie można pominąć ich wpływu.

Z kolei gluony oddziałują same ze sobą. W modelu kwarków konstytuentnych nie widać w ogóle gluonów. Jeśli gluony uzyskują dynamicznie niezerową masę efektywną, to dla dostatecznie małego λ , skutek skończonej szerokości hamiltonianu, nie może zajść efektywna emisja gluonu. Efektywna teoria opisuje więc w takim przypadku cząstki oddziałujące ze sobą za pomocą potencjałów. Ponadto efektywna stała sprzężenia dla hadronów staje się duża dla małych λ . Nie robimy transformacji R tam, gdzie nie można stosować rachunku zaburzeń. Wydaje się nieprawdopodobne, by ścisła diagonalizacja $H_{\lambda\text{QCD}}$ prowadziła do kasowania osobliwości jak w QED, skoro gluony oddziałują ze sobą i z kwarkami zupełnie inaczej niż fotony w QED. Fotony w sektorze z jednym fotonem i parą e^+e^- w problemie pozytronium muszą być traktowane jak swobodne, by skasować potencjał wiążący. Zakładamy więc że w $\text{QCD}_\lambda^{(2)}$ potencjał wiążący pozostaje nie skasowany.

Analogicznie postąpiliśmy przy obliczaniu kontreczłonów do wyrazu masowego, umieszczając w nich część, która byłaby kasowana tylko w rachunku zaburzeń. Zatem efektywny wyraz masowy zawiera rozbieżności małych x -ów, czekające na skasowanie nieskończoności pochodzących z redukcji sektorów zawierających gluony, dla miękkich gluonów. Ale ich nie ma, bo gluony się odprzegają. Podobnie mamy dla potencjału wiążącego, który także zawiera nieskończoności. Czekają one na skasowanie przez wymianę miękkich gluonów. Zatem zarówno w członie masowym jak i w członie oddziaływania wiążącego w efektywnym hamiltonianie pojawiają się rozbieżności małych x -ów. Człony te mają taką samą strukturę, różniąc się pochodzeniem czynnika kolorowego. Dla stanów, które są singletem grupy $\text{SU}(3)_{\text{kolor}}$, te czynniki kolorowe są sobie równe. Zatem dla takich stanów zatem nieskończoności te kasują się nawzajem. W stanach kolorowych natomiast nieskończoności te nie skracają się.

4 Fenomenologiczny model potencjalny i siły van der Waalsa

4.1 Fenomenologiczny model potencjalny

Omówimy teraz różnice między oddziaływaniem wyliczonym za pomocą transformacji podobieństwa z efektywnego hamiltonianu, a fenomenologicznym oddziaływaniem za pomocą addytywnego potencjału kolorowego.

W modelu potencjalnym oddziaływanie opisujemy za pomocą wzoru

$$H_I = - \sum_{i < j} F_i \cdot F_j V(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|) \quad (4.1)$$

gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie pary cząstek (kwarków i antykwarków), zaś F_i^a oznacza generator grupy w reprezentacji podstawowej (sprężonej) dla i -tego kwarku (antykwarku).

Dla grupy nieabelowej i wiążącego potencjału $V(r)$, (tzn. takiego że $V(r) \geq 0$ oraz $V(r) \rightarrow \infty$, dla $r \rightarrow \infty$), dla stanów nie będących singletami kolorowymi hamiltonian oddziaływania dany przez ten potencjał jest nieograniczony od dołu [13]. Na przykład dla grupy SU(3) dla mezonu w singlcie oraz w okcie dostajemy

$$\langle 1(q\bar{q}) | H_I | 1(q\bar{q}) \rangle = \frac{4}{3} V(r_{q\bar{q}}) \geq 0, \quad (4.2)$$

$$\langle 8(q\bar{q}) | H_I | 8(q\bar{q}) \rangle = -\frac{1}{6} V(r_{q\bar{q}}) \rightarrow -\infty, \quad r_{q\bar{q}} \rightarrow \infty. \quad (4.3)$$

Model potencjalny nie uwzględnia rozbieżności małych x -ów w wyrazach masowych i potencjale wiążącym, oraz kasowań pomiędzy nimi, jakie występują w QCD. W naszym przypadku w stanach kolorowych dostajemy brak kasowania rozbieżności małych x -ów w masach efektywnych z rozbieżnościami w efektywnym oddziaływaniu wiążącym. Rozbieżność w masie efektywnej przeważa i energia własna takich stanów staje się nieskończona rozbieżnościami małych x -ów. Zatem stany te jako mające nieskończoną energię nie są realizowane fizycznie. Rozwiązuje to problem niestabilności stanu próżni, który powstaje gdy hamiltonian nie jest operatorem półograniczonym. Nie musimy też wprowadzać sztucznego potencjału [14] stabilizującego rachunek wariacyjny dla $H_{\lambda\text{QCD}}$.

Ponadto, ten sam mechanizm powoduje, że pojedynczy kwark nie jest stanem fizycznym. Rozbieżność małych x -ów w sektorze jednokwarkowym nie jest kompensowana przez analogiczną rozbieżność w oddziaływaniu wiążącym, zatem stan ten otrzymuje nieskończoną energię i nie jest stanem fizycznym.

Także stany będące trypletem i antytrypletem kolorowym (np. stan fermion—fermion w antytryplecie) także mają nieskończoną energię i nie są stanami fizycznymi. W naturalny sposób otrzymujemy więc uwięzienie jako konsekwencję wzrostu mas efektywnych wraz z usuwaniem obciążenia małych x -ów i silnych efektów oddziaływań, które kompensują wzrost mas tylko w singletach kolorowych.

Wylizywanie efektywnych oddziaływań z hamiltonianu QCD ma ponadto tę przewagę nad fenomenologicznym modelem potencjalnym, że można łatwo wylizywać poprawki relatywistyczne, oraz przejść do wyższego rzędu.

4.2 Kolorowe siły van der Waalsa

Model potencjalny cierpi na jeszcze jedną przypadłość, obok oddziaływania nieograniczonego od dołu dla stanów nie będących singletem, trypletem lub antytrypletem kolorowym. Przewiduje on mianowicie istnienie kolorowego analogu sił van der Waalsa między odseparowanymi hadronami. Oddziaływanie to daje siłę między dwoma obiektami zależną od ilości nukleonów, w przeciwieństwie do oddziaływania grawitacyjnego, które zależy od masy obiektów. Takie oddziaływania nie są obserwowane w przyrodzie, a ograniczenia na nie są silne [15].

Czy siły tego typu powstają także w obliczeniach za pomocą efektywnego hamiltonianu QCD? W modelu potencjalnym nie ma gluonów, zatem w celu porównania powinniśmy wyeliminować sektory Focka je zawierające. Przy rozważaniu oddziaływań między efektywnymi kwarkami w mezonie, założyliśmy, że efekty nieperturbacyjne spowodowały odprężenie się gluonów. Tym niemniej nie wiadomo czy w ten sam sposób nastąpi odprężenie w sektorze dwumezonowym, t.j. czy można po prostu wyciąć sektory zawierające gluony. Gdyby dla odseparowanych mezonów, przy liczeniu oddziaływań między nimi, można było korzystać z rachunku zaburzeń przy wylizaniu efektów eliminacji gluonów za pomocą transformacji R , to tak jak dla QED (patrz rozdział 3.4) dostalibyśmy wyeliminowanie potencjału uwięzienia, a więc i kolorowych sił van der Waalsa.

W naszych obliczeniach, dzięki kasowaniu się członu rozbieżnego w wyrazie masowym z rozbieżnością w potencjale wiążącym, stany, które nie są singletem kolorowym, zyskują nieskończoną energię. Można je zatem w naturalny sposób wykluczyć, w przeciwieństwie do fenomenologicznego modelu potencjalnego. Stan, w którym dwa mezony są w stanie będącym singletem kolorowym, jest rozpięty przez dwie konfiguracje kolorowe.

W pierwszej obie cząstki są w singletach kolorowych. Mezon w singletcie jest stanem realizowanym fizycznie. Element macierzowy hamiltonianu oddziaływania van der Waalsa między dwoma różnymi mezonami w singletach

kolorowych jest równy zeru (co wynika np. z równania (4.5) poniżej).

Jednak można złożyć stan będący singletem kolorowym z dwu mezonów będących w okciecie. W opisie mezonu pojawiają się wówczas nieskończoności, wynikające z niepełnego kasowania rozbieżności małych x -ów pomiędzy efektywnym wyrazem masowym a oddziaływaniem wiążącym. *Jeśli* można założyć, że przy liczeniu oddziaływań między dwoma odseparowanymi mezonami sektor gluonowy odprzęga się, to nieskończoności te powinny kasować się nawzajem między mezonami. Zobaczmy czy kasowanie to w istocie zachodzi.

Niech cząstki 1 i 2 to kwarki, a 3 i 4 to antykwarki. Przestrzeń stanów, dla których mamy dwu mezony będące jako całość w singleticie kolorowym, rozpięta jest przez wektory: $|\alpha\rangle = |(13)_1(24)_1\rangle$ (singlet razy singlet) oraz $|\beta\rangle = |(14)_1(23)_1\rangle$. Symbol $(ij)_1$ oznacza że cząstki i i j (kwark i antykwark) są w singleticie kolorowym. Stany te nie są ortogonalne, ale są liniowo niezależne, łatwo je zapisać i z nich korzystać.

Ograniczając się do sektora, gdzie oba mezony są jako całość w singleticie kolorowym, oraz korzystając z tożsamości [16]:

$$\langle\alpha|\beta\rangle = 1/3 \quad (4.4a)$$

$$\sum_a F_1^a F_3^a |\alpha\rangle = \sum_a F_2^a F_4^a |\alpha\rangle = -(8/3)|\alpha\rangle \quad (4.4b)$$

$$\sum_a F_1^a F_4^a |\beta\rangle = \sum_a F_2^a F_3^a |\beta\rangle = -(8/3)|\beta\rangle \quad (4.4c)$$

$$(F_1^a + F_3^a)|\alpha\rangle = (F_2^a + F_4^a)|\alpha\rangle = (F_1^a + F_4^a)|\beta\rangle = (F_2^a + F_3^a)|\beta\rangle = 0 \quad (4.4d)$$

$$\langle\alpha|F_1^a F_4^a|\alpha\rangle = \langle\beta|F_1^a F_3^a|\beta\rangle = 0 \quad (4.4e)$$

$$\langle\alpha|F_1^a F_4^a|\beta\rangle = \langle\beta|F_1^a F_3^a|\alpha\rangle = -(8/3)\langle\alpha|\beta\rangle = -8/9 \quad (4.4f)$$

wynikających z tego, że odpowiednie cząstki są w singletach kolorowych, dostajemy następujący układ równań [16]:

$$3H_I|\alpha\rangle = (8u_\alpha - u_\beta + u_q)|\alpha\rangle + 3(u_\beta - u_q)|\beta\rangle \quad (4.5a)$$

$$3H_I|\beta\rangle = 3(u_\alpha - u_q)|\alpha\rangle + (8u_\beta - u_\alpha + u_q)|\beta\rangle \quad (4.5b)$$

gdzie

$$u_\alpha = u_{13} + u_{24} \quad u_\beta = u_{14} + u_{23} \quad u_q = u_{12} + u_{34}, \quad (4.6)$$

zaś $u_{ij} = V(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|)$ oznaczają odpowiednie potencjały między kwarkami.

Dla $|\alpha\rangle$ kasują się części nieskończone potencjału i efektywnej masy: kasują się nieskończoności wewnątrz mezonów (proste złożenie dwu mezonów

w singletach, więc jest tak jak dla pojedynczego mezonu). Dla $|\beta\rangle$ zachodzi skrócenie się nieskończoności pomiędzy oddziaływaniami (wszystkimi) a nieskończonościami w masach kwarków. W szczególności, dla tego stanu zachodzi skrócenie się rozbieżności w wyrazie oddziaływania między potencjałem pomiędzy kwarkami z jednego mezonu, a antykwarkami w drugim z nieskończonościami w wyrazach masowych. Nieskończoności w pozostałych oddziaływaniach wiążących kasują się nawzajem.

Oznaczmy przez δm_i nieskończoność w członie masowym dla i -tej cząstki. Możemy zapisać

$$3(\delta H_0 + H_I)|\alpha\rangle = \left(\sum_i \delta m_i + 8u_\alpha - u_\beta + u_q\right)|\alpha\rangle + 3(u_\beta - u_q)|\beta\rangle, \quad (4.7a)$$

$$3(\delta H_0 + H_I)|\beta\rangle = 3(u_\alpha - u_q)|\alpha\rangle + \left(\sum_i \delta m_i + 8u_\beta - u_\alpha + u_q\right)|\beta\rangle. \quad (4.7b)$$

Ogólnie, nieskończoności w wyrazach masowych dla stanu $|\alpha\rangle$ oraz $|\beta\rangle$ skracają się z nieskończonościami odpowiednio w u_α i u_β (jak dla mezonu), natomiast nieskończoności w $u_\beta - u_q$ oraz $u_\alpha - u_q$ skracają się nawzajem.

Rozwiązanie równań (4.5) daje następujące wartości własne dla oddziaływania U [13]

$$U' = \frac{7}{16}(u_\alpha + u_\beta) + \frac{1}{8}u_q \pm \frac{3}{16} [8(u_\alpha - u_\beta)^2 + (u_\alpha + u_\beta - 2u_q)^2]^{1/2} \quad (4.8)$$

Rozważamy oddziaływanie w konfiguracji, w której mezony: złożony z cząstek (13) oraz złożony z (24), są od siebie oddalone o odległość a , która jest dużo większa od ich rozmiarów. Rozwijamy wartość własną, dająca niższą energię, w potęgach $(u_\beta - u_q)$, które jest wyższego rzędu niż u_α i u_β , otrzymując [13]:

$$U' = u_\alpha - \frac{(u_\beta - u_q)^2}{9(u_\beta - u_\alpha)} + O(u_\beta - u_q)^3. \quad (4.9)$$

Pierwszy człon jest energią wiązania dwu mezonów. Drugi opisuje oddziaływanie van der Waalsa pomiędzy dwoma mezonami.

Zatem wiemy jaki powinien być „skład kolorowy” funkcji falowej minimalizującej potencjał van der Waalsa. Pozostaje dobrać funkcję falową (stosujemy rachunek wariacyjny) minimalizującą wartość oczekiwaną energii. Za Schiffem [17] bierzemy ją w postaci (musi ona zależeć od odległości między mezonami):

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = u_{13}(\mathbf{r}_1)u_{24}(\mathbf{r}_2)(1 + A \cdot H_{\text{vdW}}), \quad (4.10)$$

gdzie u_{13} i u_{24} są funkcjami własnymi stanu podstawowego (albo ich przybliżeniami) dla izolowanych mezonów, A jest parametrem wariacyjnym, zaś H_{vdW} potencjałem van der Waalsa (w reprezentacji położeniowej).

Potencjał wiążący w $\text{QCD}_{\lambda_{\text{eff}}}^{(2)}$ zachowuje się na dużych odległościach jak potencjał logarytmiczny. Nie ma on symetrii obrotowej, ale możemy go oszacować z dołu przez potencjał sferycznie symetryczny. Dla potencjału logarytmicznego $u = V_0 \log(r/r_0)$, biorąc wartość własną dla funkcji falowej minimalizującej energię potencjalną i rozwijając w potęgach r/a dostajemy następującą siłę van der Waalsa [13]:

$$U_{\text{vdW}} = V_0 a^{-4} \langle r_{13}^2 \rangle^2 / 54 \log(a/r_{13}). \quad (4.11)$$

Siła ta szybko zanika z odległością między mezonami, ale jej zbadanie ilościowe wykracza poza zakres niniejszej pracy.

Przy użyciu metody renormalizacji można zbadać, jakie zmiany w stosunku do modelu potencjalnego wnoszą w problemie van der Waalsa uwzględnienie dodatkowych sektorów Focka. Ponieważ nie można tego zrobić w rachunku zaburzeń, pozostaje nam rozwiązywać równanie własne w różnych sektorach i stąd wyprowadzać mechanizmy redukcji przestrzeni stanów.

5 Podsumowanie

Za pomocą metody renormalizacji przez podobieństwo można wyrazić stany, będące skomplikowanymi stanami wielu cząstek wyjściowej teorii, za pomocą niewielkiej ilości cząstek efektywnych. W ominięciu problemu próżni pomaga nam zastosowanie dynamiki na froncie świetlnym. Efektywne cząstki mają oddziaływania ograniczone do niewielkich przekazów pędu. Hamiltonian zapisany w nowych zmiennych jest wąski, tzn. elementy znajdujące się poza pasmem o szerokości λ wokół diagonalii opadają szybko do zera. Dzięki temu rozwiązując zagadnienie własne za pomocą cząstek efektywnych mamy do czynienia z niewielkim zakresem energii, ponieważ funkcje falowe dla hamiltonianu efektywnego mają szerokość porównywalną z λ .

Obraz cząstek efektywnych pozwala na obliczanie hamiltonianów efektywnych bez ograniczania się do określonego zestawu elementów macierzowych. Wystarczy raz obliczyć hamiltonian efektywny by go później stosować do różnych sytuacji.

Ponieważ chromodynamika kwantowa jest teorią pola z cechowaniem, więc pojawiają się w niej, oprócz rozbieżności związanych z dużymi pędami także rozbieżności małych x -ów. Wymagają one wprowadzenia dodatkowego parametru obcięcia. Ważna jest metoda wprowadzenia kontrczłonów.

Stosując tę metodę do przedstawienia ciężkich mezonów za pomocą kwarków efektywnych, otrzymujemy, w przybliżeniu nierelatywistycznym, obcięty potencjał coulombowski i potencjał wiążący, który łamie symetrię obrotową, a dla dużych odległości zachowuje się jak potencjał logarytmiczny. Ważną

rolę odgrywa kasowanie się rozbieżności małych x -ów między efektywnymi masami a potencjałem wiążącym. Zachodzi ono tylko dla stanów będących singletami kolorowymi. Dla stanów nie będących singletami kolorowymi kasowanie nie zachodzi i nieskończona, poprzez rozbieżność małych x -ów, masa efektywna posyła energię takich stanów do nieskończoności. Dzięki temu unikamy problemu braku ograniczoności od dołu dla stanów „kolorowych”, jaki pojawia się w modelach potencjalnych. Próżnia jest stabilna. Nie ma też potrzeby wprowadzania sztucznych potencjałów do stabilizacji rachunków spektrum.

Bezpośrednie zastosowanie rezultatu z sektora mezonowego do obliczania oddziaływań van der Waalsa między dwoma mezonami odległymi o R , prowadzi do długozasięgowych oddziaływań kolorowych, malejących jak $\frac{1}{R^4} \frac{1}{\log(R/r_0)}$, tak jak dla modelu potencjalnego z potencjałem logarytmicznym. Oznacza to, że do ostatecznego oszacowania oddziaływań między mezonami potrzebne jest precyzyjne rozwiązanie dynamiki efektywnej.

Podziękowania

Chciałbym podziękować swojemu opiekunowi naukowemu i promotorowi pracy magisterskiej, dr hab. Stanisławowi Głazkowi, za cenne wskazówki i liczne rozmowy w trakcie pracy.

Dziękuję również mgr Markowi Więckowskiemu za wyjaśnienia w sprawie przybliżenia nierelatywistycznego. Profesorowi Aleksandrowi Bartnikowi składam serdeczne podziękowania za opiekę w trakcie studiów.

A Dodatki

A.1 Konwencje frontu świetlnego

Będziemy posługiwać się następującą konwencją:

$$x^\pm = x^0 \pm x^3 \quad (\text{A.1})$$

Współrzędną czasową jest x^+ .

Iloczyn skalarny dany jest wzorem:

$$a \cdot b = \frac{1}{2} (a^+ b^- + a^- b^+) - \mathbf{a}^\perp \mathbf{b}^\perp \quad (\text{A.2})$$

A.2 Rozwiązania swobodnego równania Diraca na froncie świetlnym

Równanie Diraca we współrzędnych frontowych zapisuje się jako

$$(i\not{\partial} - m)\psi = \left(\frac{i}{2} \partial^+ \gamma^- + \frac{i}{2} \partial^- \gamma^+ - i \partial^\perp \gamma^\perp - m \right) \psi = 0 \quad (\text{A.3})$$

Rolę pochodnej czasowej w sformułowaniu frontowym pełni ∂^- . Po pomnożeniu równania przez $\gamma^0 \equiv \beta$ dostajemy

$$(i\partial^+ \Lambda_- + i\partial^- \Lambda_+ - i\partial^\perp \alpha^\perp - \beta m)\psi = 0 \quad (\text{A.4})$$

gdzie wprowadziliśmy operatory

$$\Lambda_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \alpha^3) = \frac{1}{2}\gamma^0 \gamma^\pm = \frac{1}{4}\gamma^\mp \gamma^\pm \quad (\text{A.5})$$

Operatory te są ortogonalnymi operatorami rzutowymi składającymi się do jedynki. Mnożąc równanie Diraca raz przez Λ_- , raz przez Λ_+ dostajemy układ dwu sprzężonych równań na $\psi_\pm = \Lambda_\pm \psi$, podobnie jak w przypadku równoczesnym. Co jest unikalną cechą sformułowania na froncie świetlnym to fakt, że jedno z tych równań nie jest dynamiczne (nie zawiera pochodnej czasowej ∂^-).

Konstruujemy rozwiązanie równania Diraca (w reprezentacji Diraca) z czterekomponentowych spinorów Pauliego χ_\pm :

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6a})$$

$$\chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6b})$$

Fermion w spoczynku może być w dwu stanach spinowych reprezentowanych (w reprezentacji Diraca) przez spinory z dwoma niezerowymi składnikami

$$u_{\uparrow} = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \chi_+ \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.7a})$$

$$u_{\downarrow} = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \chi_- \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.7b})$$

zaś antyfermiony w dwu stanach spinu z dwoma niezerowymi dolnymi składnikami

$$v_{\uparrow} = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_- \end{pmatrix} \quad (\text{A.8a})$$

$$v_{\downarrow} = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 0 \\ -\chi_+ \end{pmatrix} \quad (\text{A.8b})$$

Przeboostowane spinory dane są wzorami

$$u_{mp\lambda} = \frac{1}{\sqrt{mp^+}} [\Lambda_+ p^+ + \Lambda_- (m + \alpha^\perp p^\perp)] u_\lambda \quad (\text{A.9})$$

$$v_{mp\lambda} = \frac{1}{\sqrt{mp^+}} [\Lambda_+ p^+ + \Lambda_- (m + \alpha^\perp p^\perp)] v_\lambda \quad (\text{A.10})$$

A.3 Własności macierzy Diraca

Przydadzą nam się następujące własności macierzy Diraca

$$\begin{aligned} \gamma^+ \gamma^- \gamma^+ &= 4\gamma^+ & \gamma^+ \Lambda_+ &= \gamma^+ \\ \gamma^- \gamma^+ \gamma^- &= 4\gamma^- & \gamma^- \Lambda_- &= \gamma^- \\ \gamma^+ \gamma^+ &= 0 & \gamma^+ \Lambda_- &= 0 \\ \gamma^- \gamma^- &= 0 & \gamma^- \Lambda_+ &= 0 \end{aligned}$$

Ponadto mamy

$$\begin{aligned} \Lambda_\pm^2 &= \Lambda_\pm \\ \Lambda_+ + \Lambda_- &= 1 \\ \Lambda_+ \Lambda_- &= \Lambda_- \Lambda_+ = 0 \\ \Lambda_\pm \alpha^\perp &= \alpha^\perp \Lambda_\mp \\ \Lambda_\pm \beta &= \beta \Lambda_\mp \end{aligned}$$

Literatura

- [1] St. D. Głazek, *Acta Phys. Polon.*, **B29**, 1979 (1998).
- [2] P. A. M. Dirac, *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 392 (1949).
- [3] S. J. Brodsky, H.-C. Pauli, i S. S. Pinsky, *Phys. Rept.*, **301**, 299 (1998).
- [4] K. G. Wilson, *Phys. Rev.*, **D2**, 1438 (1970).
- [5] St. D. Głazek i K. G. Wilson, *Phys. Rev.*, **D48**, 5863 (1993).
- [6] St. D. Głazek i K. G. Wilson, *Phys. Rev.*, **D49**, 4214 (1994).
- [7] St. D. Głazek, *Phys. Rev.*, **D60**, 105030 (1999).
- [8] R. J. Perry, w *Hadron Physics 94: Topics on Structure and Interaction of Hadronic Systems*, edycja V. Herscovitz *et al.*, (World Scientific, Singapore, 1995) i poprawiona wersja hep-th/9411037.
- [9] M. Brisudová i R. J. Perry, *Phys. Rev.*, **D54**, pp. 1831–1843, 1996.
- [10] M. Więckowski, “Redukcja hamiltonowskiej dynamiki fermionów w kwantowej teorii pola do równania Schrödingera w drugim rzędzie rachunku zaburzeń,” praca magisterska, Instytut Fizyki Teoretycznej, Uniwersytet Warszawski, Warszawa, 1997.
- [11] R. J. Perry, hep-th/9710175 (1997).
- [12] R. G. Wilson i D. G. Robertson, w *Theory of hadrons and light-front QCD*, edycja St. D. Głazek, (World Scientific, Singapore, 1995) str. 56–70.
- [13] O. W. Greenberg i H. J. Lipkin, *Nucl. Phys.*, **A370**, 349 (1981), i referencje tam cytowane.
- [14] K. G. Wilson *et al.*, *Phys. Rev.*, **D49**, 6720–6766 (1994).
- [15] G. Feinberg i J. Sucher, *Phys. Rev.*, **D20**, 1717 (1979).
- [16] H. J. Lipkin, *Phys. Lett.*, **B45**, no. 3, 267–271 (1973).
- [17] L. I. Schiff, *Mechanika kwantowa*. Wydawnictwa Naukowe PWN, 1977.