Skrypt do wykładu

„Wstęp do renormalizacji hamiltonianów”

w przygotowaniu

Stanisław Głazek Jakub Narębski*

rok akademicki 1998/1999
2001/05/31

*WWW: `http://www.fuw.edu.pl/~jnareb` – znaleźć tam można aktualną wersję skryptu.

Rozdział 1

Wstęp

Niniejszy wykład jest poświęcony konstrukcji hamiltonianów dla cząstek efektywnych w kwantowej teorii pola. Konstrukcja ta opiera się na definicji pełnego hamiltonianu całej teorii, i wymaga określenia przestrzeni stanów, w której ten hamiltonian działa. Hamiltonian wymaga renormalizacji, gdyż baza tej przestrzeni jest nieskończona a oddziaływania sprzęgają ze sobą wszystkie elementy bazy w istotny sposób. Pojęcie renormalizacji jest więc bardzo ogólne. W fizyce cząstek często kojarzy się je z diagramami Feynmana, a w fizyce statystycznej ze zjawiskami krytycznymi. Natomiast kiedy patrzy się na renormalizację jak na metodę wyliczania teorii efektywnej, tzn. takiej, w której ogromnie skomplikowany układ jest opisywany przy pomocy odpowiednio dobranych stopni swobody bez utraty istoty rzeczy, wtedy teoria renormalizacji hamiltonianów okazuje się być dostatecznie ogólna, żeby poświecić jej więcej uwagi. Np. żeby zbudować hamiltonian dla kwarków i gluonów w chromodynamice kwantowej (QCD), trzeba zrozumieć pojęcie renormalizacji niezależnie od rachunku zaburzeń, bo oddziaływania wiążące te cząstki są silne. W szczególności, nie można ograniczyć się do diagramów Feynmana, które dotyczą tylko fragmentu teorii w specjalnym sformułowaniu i nie uwzględniają efektów wiązania zawartych w równaniu Schr̈dingera $H|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$. Równanie własne dla H odpowiada temperaturze ściśle równej zero, i pojęcie renormalizacji znane z fizyki statystycznej też nie daje się naiwnie przenieść na ten przypadek. Potrzebne jest więc zrozumienie koncepcji renormalizacji całej teorii od podstaw. Niezbędna procedura nosi nazwę procedury grupy renormalizacji.

Renormalizacja jest nieodzownym elementem lokalnej kwantowej teorii pola, bo bez renormalizacji takie teorie są rozbieżne, tzn. produkują nieskończone, źle określone wyniki. Jeśli sztucznie ograniczyć zakres energii cząstek, to wyrazy nieskończone zostaną zastąpione skończonymi, ale tak wielkimi, że te ogromne człony uniemożliwią zrozumienie skończonych zjawisk, również tych, które są odpowiedzialne za wiązanie cząstek w większe układy.

Lecz główny powód, dla którego procedura grupy renormalizacji nie jest łatwa do zrozumienia, jest inny. Mianowicie, w teoriach, w których ogromny zakres skal energii jest ważny dla opisu zjawisk fizycznych o każdej konkretnej skali, trzeba umieć wydobyć z pełnej teorii ten efektywny obraz, który dotyczy konkretnej skali, i nie zgubić przy tym istotnych konsekwencji obecności wszystkich skal w pełnej teorii. Ten wykład stawia sobie za cel wyjaśnić na czym polega systematyczne wyliczanie takiego opisu złożonych zjawisk w postaci hamiltonianów efektywnych o danej skali. Pierwsze pełne sformułowanie procedury grupy renormalizacji zostało podane przez K. G. Wilsona. W niniejszym skrypcie procedura ta zostanie wyjaśniona w mechanice kwantowej. Rozszerzenia tej procedury, i jakościowe zmiany usprawniające ją przez wprowadzenie pojęcia cząstek efektywnych, zostaną omówione na przykładach. Wspólnymi cechami tych przykładów będą brak dynamicznie wyróżnionej skali i potrzeba nadania sensu opisowi ograniczającemu się do zjawisk o skali wybranej przez układ doświadczalny. Dlatego wykład ten powinien być również pomocny w zrozumieniu zagadnień pojawiających się w wielu dziedzinach fizyki. Niemniej, skupimy się na przykładach, które dotyczą kwantowej teorią pola, gdyż jej język znajduje zastosowanie w większości tych dziedzin.

Rozważana teoria zawiera kilka głębokich tajemnic. Wystarczy zapytać w jaki sposób jakikolwiek hamiltonian kwantowy może prowadzić do relatywistycznie poprawnych wyników. Pytanie to wiąże się z pytaniem jaka jest struktura stanu podstawowego teorii. Stan ten reprezentuje próżnię i powinien wyglądać jednakowo dla wszystkich obserwatorów. Ale jeśli ograniczy się w pewien sposób przestrzeń stanów z punktu widzenia jednego obserwatora, to zawsze znajdzie się inny obserwator, który powie, że według niego odpowiednie ograniczenie powinno być inne. Trzeba jakoś pozbyć się czułości teorii na takie ograniczenia. Szczególnie trudne jest podanie odpowiedzi jak to zrobić w przypadku opisu stanów związanych, a najtrudniejsze w przypadku oddziaływań silnych. Tego problemu do dziś nikt nie rozwiązał w zadawalający sposób. Ponieważ prawie cała masa otaczającej nas ziemskiej materii pochodzi od cząstek oddziałujących silnie (hadronów), brak ilościowego zrozumienia struktury hadronów w ramach QCD jest trudny do zniesienia dla fizyka teoretyka. Podstawowe pytania tej teorii stoją otworem przed nowymi kandydatami do połamania sobie na nich zębów. Masa protonu znana jest doświadczalnie z dokładnością do 7 miejsc po przecinku, a obecny stan teorii z trudem pozwala myśleć o wyjaśnieniu pierwszych dwóch. Dlatego hadrony są opisywane przede wszystkim za pomocą modeli. Modele te wciąż stanowią zagadki teoretyczne. W skrócie można powiedzieć, że w teorii hadronów ujawnia się większość nierozwiązanych problemów fizyki cząstek. Skupiając dyskusję pojęcia grupy renormalizacji hamiltonianów na zagadnieniach mających związek z QCD, i rozważając problemy, które dotyczą kwarków i gluonów, można dotknąć wielu palących zagadnień o podstawowym znaczeniu i spojrzeć na nie w nowym świetle. Inne teorie, takie jak elektrodynamika kwantowa (QED), cały Model Standardowy, czy teorie materii skondensowanej, mają wiele cech podobnych do teorii kwarków i gluonów. Okaże się, że wszystkie te teorie zawierają te same elementy procedury grupy renormalizacji, choć wyniki rachunków mogą być różne.

Np. w QED stała sprzężenia elektronów z fotonami, czyli ładunek e, jest mała i w opisie atomów przybliżenie w postaci hamiltonianu $H = H_0 + V_c$, gdzie $H_0 \sim 1$ oznacza operator energii kinetycznej a $V_c \sim e^2$ operator potencjału Coulomba, jest bardzo dobre. W większości zjawisk atomowych można pominąć wyrazy z wyższymi potęgami e. W oddziaływaniach kwarków i gluonów efektywnych stała sprzężenia kwarków z gluonami rośnie, gdy cząstki te oddziałują z malejącymi przekazami pędów lub energii. Ten wzrost wyklucza zastosowanie prostego rachunku zaburzeń w rozwiązywaniu teorii i odpowiedni hamiltonian wciąż nie jest znany. Z drugiej strony, odwrotnie niż w QED, im większe są przekazy pędów, tym mniejsza jest efektywna stała sprzężenia kwarków i gluonów. To zjawisko nosi nazwę asymptotycznej swobody. Zapoznanie się z treścią tego skryptu pozwoli czytelnikowi zrozumieć pojęcie stałej sprzężenia zależnej od przekazu pędu i na czym polega asymptotyczna swoboda w języku cząstek efektywnych. Opisywana tutaj metoda pozwala odpowiedzieć na pytanie jak taka zależna od skali stała sprzężenia pojawia się w relatywistycznym hamiltonianie QCD.

Trudno jest przecenić wartość ogólnego spojrzenia na teorie fizyczne i przebieg otaczających nas zjawisk z punktu widzenia grupy renormalizacji. Ogólna zasada dedukcji teorii efektywnej z teorii podstawowej ma kluczowe znaczenie dla zrozumienia fizyki jako nauki empirycznej. Z tego punktu widzenia, teoria renormalizacji hamiltonianów daje nam możliwość uniwersalnego pojmowania otaczającej nas rzeczywistości niezależnie od szczegółów zastosowań.

Fundamentalne pytania, takie jak dlaczego spektrum mas cząstek w Modelu Standardowym rozciąga się na wiele rzędów wielkości (np. ~ 0.5 MeV dla elektronu i ~ 170 GeV dla kwarku top), jak wyjaśnić w jednej teorii istnienie skali masy Plancka rzędu 10^{19} GeV jednocześnie z masami znanych cząstek, lub dlaczego stała kosmologiczna jest nie większa niż rzędu $(10^{-11}\mathrm{GeV})^4$, nie znajdują łatwo jednoznacznych odpowiedzi. W tej sytuacji nie jest od rzeczy pomyśleć, że pojęcie grupy renormalizacji może mieć coś wspólnego z tego typu pytaniami. Grupa renormalizacji pozwala bowiem wyliczać teorie efektywne, które zawierają parametry o dużej rozpiętości skal, wynikające z teorii głębszych, opisujących zjawiska o nieskończonym zakresie skal. Ale te efektywne teorie często mają cechy niezależne od szczegółów owych głębszych teorii. Można powiedzieć, że trajektorie grupy renormalizacji zawierają w sobie uniwersalną informację o własnej naturze. Trudno zaniedbać spostrzeżenie, że na tych trajektoriach może dochodzić do uniwersalnych zwrotów, o jakich „nie śniło się filozofom". W tym skrypcie czytelnik znajdzie elementarny przykład tego typu sytuacji w prostym hamiltonianie. Jak daleko można iść tą drogą, nikt dziś nie wie.

1.1 Układ skryptu

Wykłady na temat renormalizacji hamiltonianów nie mogą mieć jednego, idealnego porządku, który nie powinien zależeć od potrzeb słuchaczy, a w przypadku skryptu, od czytelników. Różni czytelnicy potrzebują różnych podejść, bo zależy im na różnych aspektach teorii, i mają różne doświadczenia z renormalizacją. Np. niektórzy nie mają żadnego, inni szukają rozwiązań konkretnych problemów, a niektórzy są zainteresowani tylko różnicami między różnymi podejściami, żeby wybrać dla nich najlepsze. Dostosowywanie przebiegu wykładu do potrzeb słuchaczy na przestrzeni kilku lat, za każdym razem napotykało na trudność, polegającą na tym, żę już opracowana kolejność okazywała się niewłaściwa i powinna być inna. W wersji skryptu, który jest oddawany do rąk czytelnika, przyjęta jest kolejność, która daleko wykracza poza zakres semestralnego wykładu monograficznego. W tej wersji zawarty jest materiał, który można dzielić i wykorzystywać do wykładów przeznaczonych dla różnych słuchaczy. Zawartość skryptu jest krótko opisana poniżej, żeby ułatwić czytelnikom wybór rozdziałów, które mają dla nich znaczenie.

- Renormalizacja potencjału typu δ-Diraca w równaniu Schrödingera
- Pojęcie grupy renormalizacji Wilsona dla hamiltonianów i problem degeneracji widma H_0
- Teoria renormalizacji hamiltonianów za pomocą transformacji podobieństwa
- Klasyfikacja form relatywistycznej dynamiki hamiltonowskiej, problem stanu próżni i pochodzenia symetrii Poincaré
- Teoria procedury grupy renormalizacji dla cząstek efektywnych
- Teoria hamiltonianów dla efektywnych bozonów cechowania na przykładzie chromodynamiki kwantowej
- Teoria renormalizacji pełnej algebry Poincaré
- Pojęcie cyklu granicznego i rola stanów związanych w poszukiwaniach teorii fundamentalnych

1.2 Definicja bazy w przestrzeni stanów cząstek

W teorii kwantowej podstawowym pojęciem jest **stan** układu, opisywany najczęściej jako wektor (a właściwie jego kierunek, jeśli jest znormalizowany) w odpowiedniej przestrzeni Hilberta. Na te stany działają operatory. Wielkości mierzalne dla danego stanu są albo wartościami oczekiwanymi pewnych operatorów w tym stanie, albo współczynnikami rozkładu tego stanu na pewne wybrane stany.

Pole $A(x)$, obiekt znany z klasycznej teorii pola, w mechanice kwantowej, a w szczególnym przypadku omawianym tutaj, w kwantowej teorii pola (KTP), odpowiada wartości oczekiwanej operatora pola $\hat{A}(x)$ w danym stanie:

$$\underset{\text{pole}}{A(\mathbf{x})} = \underset{\substack{\text{wartość}\\\text{oczekiwana}}}{\langle\psi|\hat{A}(\mathbf{x})|\psi\rangle}, \text{ gdzie } |\psi\rangle \text{ oznacza stan układu fizycznego}$$

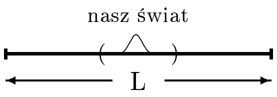
W nierelatywistycznej mechanice kwantowej pojawia się pojęcie funkcji falowej $\psi(\mathbf{x})$. Dla jednej cząstki w stanie $|\psi\rangle$ mamy

$$\psi(\mathbf{x}) = \langle\mathbf{x}|\psi\rangle$$

Gdzie: $|\psi\rangle$ — stan cząstki

$|\mathbf{x}\rangle$ — stan o którym możemy powiedzieć, że jeśli cząstka jest w tym stanie, to jej położenie dane jest przez współrzędne punktu $\mathbf{x}$. Zwróćmy uwagę, że takie określenie nic nie mówi o rozmiarach samej cząstki. Mogłaby być równie dobrze punktowa jak i mieć skończone rozmiary.

Będziemy zakładali, że nasza przestrzeń stanów jest niezmienna i zdefiniowana raz na zawsze. Ponieważ chcemy mieć ogólny opis niezależny od szczegółów fizycznych typu konkretna postać oddziaływania, zaczniemy od zbudowania przestrzeni stanów dla cząstek poruszających się ruchami inercjalnymi. Aby uniknąć kłopotów związanych z normalizacją fal płaskich (które odpowiadają cząstkom poruszającym się prostoliniowo ruchem jednostajnym) przyjmiemy, że wszechświat zawiera bardzo duże pudło z periodycznymi warunkami brzegowymi o rozmiarach liniowych L. Będziemy przyjmować, że rozmiary te są w praktyce nieskończenie wielkie (czyli $L \to \infty$ a interesująca nas



Rysunek 1.1: Rozmiary stanów fizycznych w wyimaginowanym pudle, definiującym inercjalne stany bazowe cząstek swobodnych

fizyka dotyczy pakietów falowych o rozmiarach małych w porównaniu z wielkością naszego pudła $l \lll L$ (patrz rysunek 1.1).

Dygresja: periodyczne warunki brzegowe nie są jedyne możliwe, ale nie będziemy zajmować się tu innymi warunkami. W szczególności, postać przyjętych warunków brzegowych może się przejawiać w postaci tzw. członów topologicznych, tzn. zależących od globalnych cech przebiegu funkcji falowych między wartościami na brzegu, którymi także nie będziemy się zajmować w tym wykładzie.

Warunek periodyczności funkcji falowej, wynikający z przyjętych warunków periodyczności na brzegu pudła, możemy zapisać jako:

$$f(x+L) = f(x) \quad \text{— warunek periodyczności,}$$

niezależnie dla każdego kierunku.

Weźmy jako funkcje bazowe fale płaskie,

$$f(x) \propto e^{-i\mathbf{kx}} \quad .$$

Uwaga: stosujemy naturalny układ jednostek $c = 1, \hbar = 1$. Np. iloczyn pędu (masa razy prędkość) i współrzędnej położenia (odległość) ma wymiar $\hbar$, czyli mvx mierzymy w jednostkach $\hbar$, i pomijając jednostkę $\hbar$, mówimy że mvx jest po prostu liczbą w naszych rachunkach. Ale v da się zapisać jako liczba razy prędkość światła c, albo $v = c \times v/c$. Kiedy przyjmujemy jednostkę prędkości równa c, to $mvx = (m \times v/c \times x)/\hbar \times \hbar c$ i $m \times x$ w tych jednostkach jest nadal liczbą bezwymiarową, bo v/c jest bezwymiarowe. W takim razie masa razy odległość jest liczbą bezwymiarową w naszych jednostkach. Powstaje pytanie jaka masa razy jaka odległość daje jaką liczbę $\hbar c$. Wystarczy znać jeden przykład iloczynu masy i odległości, żeby obliczać je w innych przypadkach. $197.3\text{MeV}/c^2 \times 10^{-15}m \sim 1 \times \hbar c$. $10^{-15}m$ oznacza się też symbolem fm, od femtometr, lub fermi, od nazwiska Enrico Fermiego. Proton ma rozmiary rzędu 1 fm. Klasyczny promień elektronu jest rzędu 3 fm. Energia wiązania nukleonu w jądrach atomowych jest rzędu 7–8 MeV na nukleon. Masy kwarków konstytuentnych u lub d są rzędu 300 MeV$/c^2$. Kiedy $\hbar = c = 1$, masa protonu jest 0.93827231(28) GeV. Współczesna teoria kwarków i gluonów pozwala powiedzieć, że ta masa jest bliska 1 GeV.

Skończoność pudła będącego naszym „Wszechświatem” (rozmiar naszych stanów bazowych) i nałożone periodyczne warunki brzegowe, narzucają następujący warunek na możliwe wartości pędów fal płaskich:

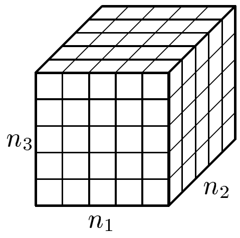
$$kL = n2\pi \quad \Rightarrow \quad k_n = n\frac{2\pi}{L} \quad .$$

Zatem fale płaskie nie mają dowolnego pędu, tylko dyskretne wartości (skwantowane, leżące na kracie, patrz rysunek 1.2):

$$\mathbf{k} = \mathbf{n}\frac{2\pi}{L} \qquad \text{gdzie,} \quad \mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3),\ 0 \leq n_i \leq L. \tag{1.1}$$

Unormowany stan cząstki o określonym pędzie, jednym z możliwych, wyznaczonym jednoznacznie przez $\mathbf{n}$, ma funkcję falową postaci (tutaj wypisujemy jawnie jej normalizację):

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{n} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{V}}} e^{i\mathbf{nx}\frac{2\pi}{L}} \tag{1.2}$$



$$\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$$

Rysunek 1.2: Numeracja stanów cząstki w pudle z periodycznymi warunkami brzegowymi

gdzie V oznacza objętość przestrzeni (naszego pudła periodyczności), w której definiujemy możliwe stany. Funkcje falowe tej postaci tworzą bazę wszystkich możliwych funkcji falowych, jaki będziemy rozważać. Innych w naszej teorii nie będzie.

Należy zwrócić uwagę, że nie mamy równoważności w sensie liczby elementów między przestrzenią położeń i przestrzenią pędów, bo

$\mathbf{x}$ jest zmienną ciągła,
$\mathbf{k}$ jest zmienną dyskretną.

Zamiast transformat Fouriera, mamy do czynienia z szeregami. Ale w naszych rozważaniach będzie możliwe przybliżenie, w którym sumowanie po dyskretnych wartościach pędów będzie można zastąpić całkowaniem.

Będziemy zaniedbywać granulację $\mathbf{n}$ gdzie się da (aby np. nie musieć stosować dwu różnych wzorów na transformację Fouriera, i posługiwać się bardziej symetrycznym wzorem całkowym). Oczywiście nie wszędzie daje się zaniedbać granulację $\mathbf{n}$. Np. w problemie stanu podstawowego, kiedy stany o pędach bliskich 0 mogą odgrywać dużą rolę z powodu kondensacji. Duże liczby obsadzeń tych stanów mogłyby prowadzić do mierzalnych efektów. Ale ponieważ L, czyli rozmiar naszego „Wszechświata", jest bardzo duży, więc w rozważaniach fizycznych, ograniczających się do stanów o względnie małych rozmiarach, zazwyczaj możemy zaniedbać stan o $\mathbf{n} = \vec{0}$ — wartość oczekiwana znalezienia cząstki w tym stanie w obszarze laboratorium (o rozmiarach dużo mniejszych niż L) jest zaniedbywalnie mała. Dlatego:

$$|\mathbf{n}| > 0 \qquad \text{(w świecie fizyki)}$$
$$\mathbf{n} = \vec{0} \qquad \text{(możliwe w przestrzeni stanów)}$$

Uwaga. Zauważmy, że nie ma naturalnego górnego ograniczenia na $|\mathbf{n}|$.

Uwaga

małe	$|\mathbf{k}| \equiv$ duża objętość	„podczerwień"
małe	$|\Delta\mathbf{x}| \equiv$ bardzo małe objętości, duże pędy	„nadfiolet"

Co prawda nasza definicja bazy w przestrzeni stanów podana za pomocą prostokątnego pudła łamie symetrie, np. symetrię obrotową, ale wyniki fizyczne nie powinny zależeć od wyboru bazy przestrzeni stanów, czyli sposobu opisu zjawisk fizycznych.

Uwaga (Symetria).
Symetrie pełnią szczególną rolę w fizyce. Zakładamy, że fizyka nie jest czuła na łamanie symetrii z powodu wyboru bazy w przestrzeni stanów, jeśli L będzie dostatecznie duże.

Ale mogłoby się okazać, że jednak są jakieś cechy wybory bazy, które wpływają na wyniki. Wtedy mamy dwa sposoby postępowania dalej. Jeden polega na uwierzeniu, że istnieje wyróżniona baza. Taki sposób wymusza myślenie, ze istnieje wyróżniony układ odniesienia (w którym nasze kwantowe pudło spoczywa). Drugi polega na tym, że staramy się jak najdłużej unikać tworzenia nowych bytów w rodzaju wyróżnionego układu odniesienia, staramy się zbudować naszą teorię tak, żeby wyniki na fizycznie interesujące wielkości nie były czułe na szczegóły wyboru bazy. Można powiedzieć, że cała teoria renormalizacji służy właśnie temu celowi.

1.3 Przestrzeń Focka cząstek swobodnych

1.3.1 Definicja stanów o określonym pędzie

Stany $|\mathbf{n}\rangle$ wybraliśmy tak, aby tworzyły one układ ortonormalny (bazę ortonormalną). Mamy:

$$\langle \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2 | = \rangle \delta_{\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2} = \delta_{n_{11} n_{21}} \delta_{n_{12} n_{22}} \delta_{n_{13} n_{23}} \tag{1.3}$$

Określanie stanów za pomocą wektora liczb całkowitych $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^n$ nie jest zbyt wygodne, gdyż stan określony konkretnym wektorem zależy od wybranej (niefizycznej) wielkości pudła L. Chcemy określać stany podając trochę prostszy zapis, jak najbliższy wielkościom fizycznym. Dla fal płaskich taką dobrą wielkością jest pęd stanu. Przejście od dyskretnej zmiennej $\mathbf{n}$ do ciągłej wielkości $\mathbf{k}$ określającej stan bazowy odbywa się za pomocą wzoru:

Definicja 1 (Stan $|\mathbf{k}\rangle$).

$$|\mathbf{k}\rangle = \sqrt{\mathrm{V}}|\mathbf{n}\rangle, \tag{1.4}$$

gdzie $\mathbf{k}$ jest wyznaczone wzorem ((1.1))

Słowo „definicja” jest może zbyt formalne, ale co nam szkodzi je stosować. Ponieważ stany o określonej periodyczności, oznaczane przez $|\mathbf{n}\rangle$, były ortogonalne, zatem i stany o określonym pędzie $|\mathbf{k}\rangle$ będą ortogonalne. Stany $|\mathbf{n}\rangle$ były unormowane do 1 ($\delta_{ii} = 1$). Wygodnie jest tak określić stany o określonym pędzie, $|\mathbf{k}\rangle$, żeby ich iloczyn skalarny dawał się zapisać za pomocą odpowiednika delty Kroneckera dla zmiennej ciągłej. Takim odpowiednikiem jest funkcja δ Diraca. Iloczyn skalarny stanów $|\mathbf{k}\rangle$ ma następującą postać (zobacz rozdział 1.3.2, wzór (1.6)):

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{k}'|\mathbf{k}\rangle &= \mathrm{V}\langle \mathbf{n}'|\mathbf{n}\rangle = (2\pi)(2\pi)^3\delta^{(3)}(0)\langle \mathbf{n}'|\mathbf{n}\rangle \\ &= (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}').\end{aligned} \tag{1.5}$$

1.3.2 Wyprowadzenie wzoru na $\delta(0)$

Gdy stosujemy notację ciągłą stanów $|k\rangle$ o określonym pędzie pojawia się problem unormowania tych stanów. Formalnie, zgodnie ze wzorem na iloczyn skalarny, który naturalnie zapisuje się za pomocą delty Diraca, dochodzi się do wyrażenia $(2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{0})$ na normę stanów $|\mathbf{k}\rangle$ (w notacji ciągłej). Problem z wartością $\delta(0)$ wymaga rozwiązania, gdyż pojawia się np. we wzorze na przekrój czynny przy dzieleniu przez strumień cząstek padających (musimy to zrobić by móc obliczać wielkości wyznaczane doświadczalnie). Można by tego problemu uniknąć rozważając zawsze paczki falowe, i jest to właściwa, ale żmudniejsza metoda.

Wzór $\mathrm{V} = (2\pi)^3\delta^{(3)}(0)$ możemy uzasadnić zaczynając od tego, że

$$\int\limits_{\mathrm{V}} d^3x\, e^{i\mathbf{kx}} \xrightarrow[\mathrm{V}\to\infty]{} (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{k}).$$

W celu uzbieżnienia całki dopiszmy czynnik, który przy $\epsilon \to 0$ dąży do jedynki, i zapiszmy ją jako

$$\int\limits_{\mathrm{V}} d^3x\, e^{i\mathbf{kx}-\epsilon\mathbf{x}^2} \simeq \int d^3x\, e^{i\mathbf{kx}-\epsilon\mathbf{x}^2} =$$

(skorzystaliśmy z tego, że $L \gg \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$, więc możemy przybliżyć całkę po pudle przez całkę po całej przestrzeni – funkcja całkowana poza pudłem jest zaniedbywalnie mała)

$$= \int d^3x\, e^{2i\,\frac{\mathbf{k}}{2\sqrt{\epsilon}}\sqrt{\epsilon}\mathbf{x}-(\sqrt{\epsilon}\mathbf{x})^2} = \int d^3x\, e^{-\left(\sqrt{\epsilon}\mathbf{x}-i\,\frac{\mathbf{k}}{2\sqrt{\epsilon}}\right)^2-\left(\frac{\mathbf{k}}{2\sqrt{\epsilon}}\right)^2} =$$
$$= e^{-\frac{\mathbf{k}^2}{4\epsilon}}\left[\int dx\, e^{-\left(\sqrt{\epsilon}x-i\,\frac{k}{2\sqrt{\epsilon}}\right)^2}\right]^3 = e^{-\frac{\mathbf{k}^2}{4\epsilon}}\left(\frac{\pi}{\epsilon}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Uzyskana funkcja jest modelem delty Diraca (przechodzi w nią w granicy $\epsilon \to 0$, kiedy czynnik uzbieżniający całki zamienia się w 1). Widać, że dla $\mathbf{k} \to \vec{0}$ i $\epsilon \to 0$ funkcja ta dąży do nieskończoności. Natomiast gdy $|\mathbf{k}| \neq 0$ to przy $\epsilon \to 0$ funkcja dąży do zera, tak jak delta Diraca.

Musimy jeszcze sprawdzić, jaki dobrać współczynnik normalizacyjny, aby ta funkcja przechodziła w granicy $\epsilon \to 0$ dokładnie w deltę Diraca. Skorzystajmy z tego, że delta Diraca jest „unormowana" — całka z niej po całej przestrzeni jest równa 1.

Żądamy, aby całka z naszej funkcji po całej przestrzeni dawała 1, tzn.

$$\int d^3k\; e^{-\frac{\mathbf{k}^2}{4\epsilon}}\sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}}^3\mathcal{N} = 1.$$

Wyliczamy z tego równania czynnik normalizacyjny $\mathcal{N}$,

$$1 = \mathcal{N}\sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}}^3\left[\int dk\, e^{-\frac{k^2}{4\epsilon}}\right]^3 =$$
$$= \mathcal{N}\sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}}^3\sqrt{4\epsilon\pi}^3 = (2\pi)^3\mathcal{N}.$$

Porównując czynniki normalizacyjne otrzymujemy potrzebny nam wzór,

$$\underset{\text{dla }|\mathbf{n}\rangle}{\mathrm{V}} \quad \equiv \tag{1.6}$$

1.3.3 Przestrzeń Focka

Przypomnijmy sobie mechanikę kwantową oscylatora harmonicznego, opisaną za pomocą operatorów a i $a^\dagger$, dla których $[a, a^\dagger] = 1$.

Stany wielocząstkowe opisujemy za pomocą wektorów w przestrzeni Focka. Aby opisywać stany: $|0\rangle, |\mathbf{k}\rangle, |\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\rangle, \ldots$ zgodnie ze związkiem spinu ze statystyką, wprowadzamy operatory kreacji i anihilacji cząstek, $a_i^\dagger$ i a_i (indeks i mówi o „spinie" oraz określa rodzaj i stan kreowanej cząstki). Operatory te, zgodnie z oznaczeniem, są swoimi sprzężeniami hermitowskimi. Operator kreacji $a_i^\dagger$ kreuje ze stanu próżni oznaczanego $|0\rangle$ (stan 0-cząstkowy) cząstkę o pędzie $\mathbf{k}$:

$$|0\rangle, \qquad |\mathbf{k}i\rangle = a^\dagger_{\mathbf{k}i}|0\rangle, \qquad |\mathbf{k}i\mathbf{q}j\rangle = a^\dagger_{\mathbf{k}i}a^\dagger_{\mathbf{q}j}|0\rangle, \ldots \tag{1.7}$$

Stan próżni[1] określamy jako taki, że wszystkie operatory anihilacji w działaniu na ten stan dają 0.

Rozważmy identyczne cząstki (jeden rodzaj cząstek). Mamy

$$(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \overset{(1.5)}{=} \langle\mathbf{k}'|\mathbf{k}\rangle \overset{(1.7)}{=} \langle 0|a_{\mathbf{k}'}a^\dagger_{\mathbf{k}}|0\rangle = \langle 0|[a_{\mathbf{k}}, a^\dagger_{\mathbf{q}}] + a^\dagger_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}'}|0\rangle =$$

[1] (*Uwaga:* czasami stanu próżni może nie być w niektórych kwantowych teoriach pola — problemy renormalizacji podczerwonej.

korzystamy z warunku definiującego stan próżni $a_{\mathbf{k}'}|0\rangle = 0$, i gdyby komutator był liczbą, to mielibyśmy wynik w postaci

$$= \langle 0|[a_{\mathbf{k}}, a^\dagger_{\mathbf{q}}]|0\rangle = \langle 0|0\rangle[a_{\mathbf{k}}, a^\dagger_{\mathbf{q}}] \stackrel{!}{=} (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$$

Wprowadzamy więc następujące związki komutacyjne dla operatorów kreacji i anihilacji cząstek swobodnych o określonym pędzie:

$$[a_{\mathbf{k}}, a^\dagger_{\mathbf{q}}] = (2\pi)^3\delta^{(3)}(k'-k) \tag{1.8}$$

Związek spinu ze statystyką uwzględniony jest we właściwościach operatorów $a^\dagger$ i a, tzn. w ich właściwościach komutacyjnych:

Stan dwucząstkowy (dla bozonów) możemy skonstruować na dwa równoważne sposoby — albo kreując najpierw cząstkę o pędzie $\mathbf{k}_1$ a potem cząstkę o pędzie $\mathbf{k}_2$, albo najpierw cząstkę o pędzie $\mathbf{k}_2$ a później o pędzie $\mathbf{k}_1$.

$$\begin{aligned}|\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\rangle &= a^\dagger_{\mathbf{k}_1}|\mathbf{k}_2\rangle = a^\dagger_{\mathbf{k}_1}a^\dagger_{\mathbf{k}_2}|0\rangle \\ &= a^\dagger_{\mathbf{k}_2}|\mathbf{k}_1\rangle = a^\dagger_{\mathbf{k}_2}a^\dagger_{\mathbf{k}_1}|0\rangle\end{aligned}$$

Byłaby wątpliwość, gdyby

$$[a^\dagger_{\mathbf{k}}, a^\dagger_{\mathbf{q}}] \neq 0$$

tzn. gdyby istniała zależność od kolejności działania operatorów kreacji bozonów. Dlatego żądamy, by

$$[a^\dagger_{\mathbf{k}}, a^\dagger_{\mathbf{q}}] = [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{q}}] = 0 \tag{1.9}$$

Ten związek będzie dawał odpowiednią symetrie funkcji falowej — patrz rozdział 1.4.)

Uwaga (Spin i statystyka).
Związek spinu ze statystyką jest konsekwencją symetrii CPT i dodatniości energii. (Wymagane jest pojęcie energii, którego jeszcze nie mamy).

1.4 Symetria funkcji falowej — bozony i fermiony

1.4.1 Bozony

Stany w przestrzeni Focka są kombinacjami liniowymi następujących stanów

$$|\psi_0\rangle = \psi_0\,|0\rangle \tag{1.10a}$$

$$|\psi_1\rangle = \int d^3k\ \psi_1(\mathbf{k})\,a^\dagger_{\mathbf{k}}|0\rangle \tag{1.10b}$$

$$|\psi_2\rangle = \iint d^3k_1 d^3k_2\ \psi_2(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)a^\dagger_{\mathbf{k}_1}a^\dagger_{\mathbf{k}_2}|0\rangle \tag{1.10c}$$

$$\vdots$$

$$|\psi_n\rangle = \int\cdots\int d^3k_1\ldots d^3k_n\ \psi_n(\mathbf{k}_1,\ldots,\mathbf{k}_n)\,a^\dagger_{\mathbf{k}_1}\ldots a^\dagger_{\mathbf{k}_n}|0\rangle \tag{1.10d}$$

Ponieważ operatory kreacji komutują ze sobą to

$$a^\dagger_{\mathbf{k}_1}a^\dagger_{\mathbf{k}_2} = \tfrac{1}{2}\left(a^\dagger_{\mathbf{k}_1}a^\dagger_{\mathbf{k}_2} + a^\dagger_{\mathbf{k}_2}a^\dagger_{\mathbf{k}_1}\right)|0\rangle$$

Korzystając z tego faktu, możemy napisać

$$|\psi_2^S\rangle = \iint d^3k_1 d^3k_2\ \tfrac{1}{2}\big(\psi_2(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2)+\psi_2(\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_1)\big)\,a^\dagger_{\mathbf{k}_1}a^\dagger_{\mathbf{k}_2}|0\rangle \tag{1.11}$$

Czyli jeśli cząstki są identyczne i nierozróżnialne, $[a^\dagger_{\mathbf{k}i}, a^\dagger_{\mathbf{q}j}] = 0$, to funkcja falowa $\psi_n(\mathbf{k}_1, i_1, \ldots, \mathbf{k}_n, i_n)$ jest funkcją całkowicie symetryczną przy zamianie $\mathbf{k}_l i_l \leftrightarrow \mathbf{k}_m i_m$ dla dowolnych l, m.

Wprowadzenie operatorów kreacji i anihilacji $a_{\mathbf{k}}$, $a^\dagger_{\mathbf{k}}$pozwala opisywać identyczne i nierozróżnialne cząstki tworząc ich stany za pomocą iloczynów operatorów kreacji, już bez troszczenia się o szczegóły. Warunki komutacji tych operatorów wymuszają całkowicie symetryczną funkcję falową.

1.4.2 Fermiony

Funkcje falowe są antysymetryczne, zatem musimy postulować, że $\{b^\dagger_{\mathbf{k}}, b^\dagger_{\mathbf{q}}\} = 0$. Wtedy $b^\dagger_{\mathbf{k}_1} b^\dagger_{\mathbf{k}_1} = 0$, czyli możemy mieć *tylko jedną* cząstkę w danym stanie.

$$\iint d^3k_1 d^3k_2 \; A(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)\, b^\dagger_{\mathbf{k}_1} b^\dagger_{\mathbf{k}_2} |0\rangle = \iint d^3k_1 d^3k_2 \left(-A(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)\right) b^\dagger_{\mathbf{k}_2} b^\dagger_{\mathbf{k}_1} |0\rangle =$$
$$= \iint d^3k_1 d^3k_2 \left(-A(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_1)\right) b^\dagger_{\mathbf{k}_1} b^\dagger_{\mathbf{k}_2} |0\rangle$$

1.4.3 Porównanie bozonów i fermionów

Dla bozonów tworzących skalarne pola rzeczywiste (nie zespolone) wystarczają do opisu operatory: $a_{\mathbf{k}}, a^\dagger_{\mathbf{k}}$. Dodanie spinu lub innych liczb kwantowych oznacza dodanie indeksu: $a_{\mathbf{k}} \to a_{\mathbf{k}i}$.

Dla fermionów, o spinie $\frac{1}{2}$ (opisywanych przez [zespolone] spinory) odróżniamy operator kreacji antycząstki od operatora anihilacji cząstki, zatem do ich opisu potrzebne nam są następujące operatory: $b_{\mathbf{k}\lambda}, b^\dagger_{\mathbf{k}\lambda}, d_{\mathbf{k}\lambda}, d^\dagger_{\mathbf{k}\lambda}$, gdzie λ oznacza rzut spinu na oś z. Dodanie izospinu lub innych liczb kwantowych oznacza (podobnie jak w przypadku bozonów) dodanie indeksu, $b_{\mathbf{k}\lambda} \to b_{\mathbf{k}\lambda i}$, ale wystarczy pisać $b_{\mathbf{k}i}$ pamiętając, że i zawiera rzut spinu.

Bozony:

$$[a_{\mathbf{k}i}, a^\dagger_{\mathbf{q}j}] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{q})\delta_{ij}$$
$$[a_{\mathbf{k}i}, a_{\mathbf{q}j}] = [a^\dagger_{\mathbf{k}i}, a^\dagger_{\mathbf{q}j}] = 0$$

Fermiony:

$$\{b_{\mathbf{k}i}, b^\dagger_{\mathbf{q}j}\} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{q})\delta_{ij}$$
$$\{b_{\mathbf{k}i}, b_{\mathbf{q}j}\} = \{b^\dagger_{\mathbf{k}i}, b^\dagger_{\mathbf{q}j}\} = 0$$

Przestrzeń Focka — stany postaci:

$$\sum_n |\psi_n\rangle = \sum_n \int d^3k_1 \ldots d^3k_n \sum_{i_1 \ldots i_n} \psi_n(k_1 i_1, \ldots, k_n i_n)\, c^\dagger_{k_1 i_1} \ldots c^\dagger_{k_n i_n} |0\rangle$$

1.5 Hamiltonian (operator energii) dla cząstek swobodnych

Aby prawdopodobieństwo było zachowane, operator ewolucji musi być operatorem unitarnym, a generator ewolucji w czasie musi być operatorem hermitowskim. Ten ostatni nazywamy hamiltonianem. Hamiltonian jest operatorem energii; z jego hermitowskości wynika, że ma rzeczywiste wartości własne. Teoria z hamiltonianem hermitowskim może pełnić rolę teorii podstawowej, bo ewolucja jest unitarna i zachowuje prawdopodobieństwo. Wtedy energia jest zachowana, nie znika i nie pojawia się z powodu czynników zewnętrznych. Kiedy tworzymy teorie efektywne za pomocą hamiltonianów fenomenologicznych, niehermitowskich, wtedy występuje dopływ lub ubytek energii z zewnątrz lub jej rozpraszanie w układzie, i norma stanów może nie być zachowana. Nie będziemy tutaj rozważać takich przypadków.

Teoria swobodna $\longrightarrow$ pole kwantowe.

Mając teorię cząstek swobodnych możemy skonstruować pole kwantowe. Rozważamy stany $|k_1 \ldots k_n\rangle$ (nie zmniejszając ogólności rozumowania nie piszemy indeksów spinowych, zapachowych itd.

Rozpatrzmy na początek stany bozonowe. Chcemy by hamiltonian w działaniu na stan próżni produkował wartość własną 0, tzn. chcemy użyć energii próżni jako punktu odniesienia (zerowego poziomu energii). W działaniu na stan jednocząstkowy o pędzie $\mathbf{k}$ chcemy, aby dawał on wartość własną będącą relatywistyczną energią cząstki o pędzie $\mathbf{k}$. Żądamy także od operatora energii by był addytywny ze względu na podukłady, tzn. aby energia stanu wielocząstkowego była sumą energii cząstek składających się na ten stan (zakładamy że mamy teorię swobodna (bez oddziaływania), zatem energia całkowita równa jest energii kinetycznej, gdyż nie ma energii oddziaływania cząstek w układzie).

Zapisując to za pomocą wzorów, chcemy by:

$$\begin{aligned} \mathtt{H}\big|\mathbf{k}\big\rangle &= E_{\mathbf{k}}\big|\mathbf{k}\big\rangle \\ \mathtt{H}\big|\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\big\rangle &= (E_{\mathbf{k}_1}+E_{\mathbf{k}_2})\big|\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\big\rangle \\ &\dots \end{aligned} \tag{1.12}$$

gdzie relatywistyczna energia kinetyczna $E_{\mathbf{k}}$ określona jest wzorem:

$$E_{\mathbf{k}_i} = \sqrt{m_i^2 + \mathbf{k}_i^2} \tag{1.13}$$

Uwaga: przyjmujemy jednostki w których $c = 1$. Symbol m_i oznacza masę „spoczynkową” cząstki.

Żądanie addytywności ze względu na podukłady tłumaczy się na warunek, że stany wielocząstkowe $\big|\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_n\big\rangle$ mają być stanami własnymi hamiltonianu $\mathtt{H}$ o wartości własnej $E = \sum\limits_{i=1}^{n} E_{\mathbf{k}_i}$.

Wiemy jak ma działać hamiltonian na stany z przestrzeni Focka. Ustalmy normalizację stanów o określonym pędzie jako:

$$\begin{aligned} \big\langle\mathbf{k}\big|\mathbf{q}\big\rangle &= (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \\ \big\langle\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\big|\mathbf{q}_2\mathbf{q}_2\big\rangle &= (2\pi)^3\left[\delta^{(3)}(\mathbf{k}_1-\mathbf{q}_1)\delta^{(3)}(\mathbf{k}_2-\mathbf{q}_2)+\right. \\ &\qquad \left.+\,\delta^{(3)}(\mathbf{k}_1-\mathbf{q}_2)\delta^{(3)}(\mathbf{k}_2-\mathbf{q}_1)\right] \\ &\dots \end{aligned}$$

Wówczas elementy macierzowe hamiltonianu między stanami wielocząstkowymi o określonych pędach cząstek dane są wzorem:

$$\big\langle\mathbf{k}_1\dots\mathbf{k}_n\big|\mathtt{H}\big|\mathbf{q}_1\dots\mathbf{q}_m\big\rangle = \begin{cases} 0 & \text{gdy } n \neq m \\ (E_1+\dots+E_n)\big\langle\mathbf{k}_1\dots\mathbf{k}_n\big|\mathbf{q}_1\dots\mathbf{q}_n\big\rangle & \text{wpw} \end{cases}$$

Operator hermitowski o powyższych elementach macierzowych można zapisać za pomocą operatorów kreacji i anihilacji. Weźmy następujący operator:

$$\mathtt{H} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, E_k\, a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}} \tag{1.14}$$

Sprawdźmy, że ten operator działa na stany wielocząstkowe o określonym pędzie w żądany przez nas sposób.

Hamiltonian $\mathtt{H}$ w działaniu na stan jednocząstkowy o pędzie $\mathbf{q}$ daje:

$$\begin{aligned} \mathtt{H}\big|\mathbf{q}\big\rangle = \mathtt{H}\,a_{\mathbf{q}}^{\dagger}\big|0\big\rangle \overset{\text{z def}}{=} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} E_k\, a_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{q}}^{\dagger}\big|0\big\rangle &= \\ = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} E_k\, a_{\mathbf{k}}^{\dagger}\left([a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{q}}^{\dagger}] + a_{\mathbf{q}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}}\right)\big|0\big\rangle &= \\ = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} E_k\, a_{\mathbf{k}}^{\dagger}\big|0\big\rangle(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{q}) &= \\ = E_q\big|\mathbf{q}\big\rangle \end{aligned}$$

czyli stan jednocząstkowy o pędzie $\mathbf{q}$ jest stanem własnym hamiltonianu o wartości własnej równej relatywistycznej energii E_q (w przypadku cząstek nieoddziałujących energii kinetycznej) tego stanu.

Analogicznie $\mathtt{H}$ działa na stany dwucząstkowe (druga część naszej „definicji” hamiltonianu w (1.12)):

$$
\begin{aligned}
\mathtt{H}\big|\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\big\rangle &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} E_k\, a^\dagger_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} a^\dagger_{\mathbf{q}_1} a^\dagger_{\mathbf{q}_2}\big|0\big\rangle = \\
&= \cdots = \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} E_k\, a^\dagger_{\mathbf{k}} \Big(a^\dagger_{\mathbf{q}_2} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{q}_2) + a^\dagger_{\mathbf{q}_1} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{q}_1) \Big) \big|0\big\rangle = \\
&= E_{q_1} a^\dagger_{\mathbf{q}_1} a^\dagger_{\mathbf{q}_2}\big|0\big\rangle + E_{q_2} a^\dagger_{\mathbf{q}_2} a^\dagger_{\mathbf{q}_1}\big|0\big\rangle = \\
&= \big(E_{q_1} + E_{q_2}\big)\big|\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\big\rangle
\end{aligned}
$$

Czyli operator $\mathtt{H}$ zdefiniowany równaniem (1.14) jest zgodny z naszym określeniem hamiltonianu przez podanie jak działa on na stany jednocząstkowe i dwucząstkowe w przestrzeni Focka (zgodnie z warunkami jakie narzucamy na hamiltonian cząstek nieoddziałujących). Można sprawdzić (przez indukcję), że (1.14) ma potrzebne nam elementy macierzowe dla stanów o dowolnej liczbie cząstek.

Operator $a^\dagger_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}$ który pojawia się we wzorze na hamiltonian $\mathtt{H}$ można zinterpretować jako operator liczby cząstek o pędzie $\mathbf{k}$. Operator anihilacji $a_{\mathbf{k}}$ działając na stan o określonej energii E (stan własny hamiltonianu $\mathtt{H}$) produkuje stan własny hamiltonianu z wartością własną $(E - E_k)$. Wykazanie tego pozostawiamy jako ważne ćwiczenie dla czytelnika (wskazówka: należy sprawdzić jak działa $\mathtt{H}$ na stan $a_{\mathbf{k}}\big|\psi\big\rangle$ jeśli $\mathtt{H}\big|\psi\big\rangle = E\big|\psi\big\rangle$).

1.6 Pole cząstek

Położenie cząstki $\longrightarrow$ pole kwantowe $\varphi(x)$

Zwykle definiujemy stany 1-cząstkowe o określonym położeniu w ten sposób, że jeśli cząstka znajduje się w takim stanie to jej „środek geometryczny” znajduje się w punkcie $\mathbf{x}$.

Oznacza to, że rozdzielczość naszej analizy w przestrzeni położeń jest niezależna od określenia rozmiarów samych cząstek. Warto pamiętać o tym, że pojęcie *rozdzielczości w przestrzeni położeń* jest niezależne od rozmiarów cząstek, kiedy rozważa się układy związane. Taki układ może być bardzo duży i mieć środek zlokalizowany dużo lepiej niż jego rozmiar. Np. położenie Ziemi można określić dużo precyzyjniej niż z dokładnością do średnicy Ziemi. Niemniej, gdybyśmy mierzyli położenie cząstki, to zrobienie tego z dokładnością większą niż jej rozmiar wymagałoby przekazów pędu większych niż odwrotność jej średnicy. Zasada nieoznaczoności uniemożliwia taki pomiar, gdy średnica ta jest mniejsza niż długość fali Comptona. Określając stany cząstki o położeniu określonym z większą dokładnością niż długość fali Comptona musimy zdawać sobie sprawę z formalnej natury takich stanów.

Dygresja: z klasycznej teorii względności (daleko idąca symetria między współrzędnymi położenia i czasu) i z zasady nieoznaczoności Heisenberga dla pędu i położenia, wynika potrzeba zdefiniowania dokładności pomiaru czasu. Jak mogłoby przebiegać rozumowanie, które uzasadnia taki wniosek?

Definiujemy stany o określonym położeniu, $\big|\mathbf{x}\big\rangle$, podając elementy macierzowe

$$\big\langle \mathbf{x}\big|\mathbf{n}\big\rangle = \frac{e^{i\mathbf{n}\mathbf{x}\frac{2\pi}{L}}}{\sqrt{V}}.$$

Ten wybór podyktowany jest przez mechanikę kwantową; $\vec{p} \leftrightarrow i\,\vec{\nabla}$. Przechodząc do stanów o określonym pędzie, dostajemy wzór na „funkcję falową” takiego stanu:

$$\big\langle \mathbf{x}\big|\mathbf{k}\big\rangle = e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \quad .$$

Przechodzimy do zapisu za pomocą operatorów pola zakładając, że $\big|\mathbf{x}\big\rangle = \phi^\dagger(\mathbf{x})\big|0\big\rangle$ (analogicznie jak dla stanów o określonym pędzie):

$$\big\langle \mathbf{x}\big|\mathbf{k}\big\rangle = \big\langle 0\big|\phi(\mathbf{x})\big|\mathbf{k}\big\rangle = \big\langle 0\big|\phi(\mathbf{x}) a^\dagger_{\mathbf{k}}\big|0\big\rangle.$$

Operator $\phi^\dagger(\mathbf{x})$ ma być operatorem kreującym cząstkę w położeniu $\mathbf{x}$ ze stanu próżni $|0\rangle$. W jaki sposób go wyrazić za pomocą wprowadzonych wcześniej operatorów kreacji i anihilacji $a^\dagger_{\mathbf{k}}$ i $a_{\mathbf{k}}$ stanów o określonym pędzie?
Operator $\phi^\dagger(\mathbf{x})$ określamy w ten sposób kierując się intuicją, żeby był operatorem kreującym cząstkę w położeniu $\mathbf{x}$ ze stanu próżni $|0\rangle$. W jaki sposób wyrazić go za pomocą wprowadzonych wcześniej operatorów kreacji i anihilacji $a^\dagger_{\mathbf{k}}$ i $a_{\mathbf{k}}$ stanów o określonym pędzie? Superponując fale płaskie ze stała wagą, otrzymujemy dobrze zlokalizowaną funkcję. W granicy kiedy sumujemy wszystkie fale, otrzymujemy deltę Diraca. Dlatego operatory kreacji stanów o określonym pędzie $a^\dagger_{\mathbf{k}}$ mogą koherentnie stworzyć superpozycje o określonym położeniu. Proponujemy

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \tag{1.15a}$$

$$\phi(\mathbf{x})^\dagger = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} a^\dagger_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \tag{1.15b}$$

We wstępie definiowaliśmy pole klasyczne jako wartość własną operatora pola. Można będzie sprawdzić, że nasza definicja pola kwantowego jest zgodna z wyjściowym założeniem o związku między teorią klasyczną i kwantową.

Definiujemy pole:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) + \phi^\dagger(\mathbf{x}) \tag{1.16}$$

Jest to pole kwantowe w obrazie Schrödingera — w równaniu nie występuje zależność od czasu.

Uwaga: $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi^\dagger(\mathbf{x})$ — związek z klasyczną teorią pola (pole rzeczywiste skalarne).

Chcemy zobaczyć jak wygląda odpowiednie pole Heisenberga. Stany własne o określonym pędzie $|\mathbf{k}\rangle$ można rozłożyć w bazie położeniowej $\varphi(\mathbf{x})|0\rangle = |\mathbf{x}\rangle$.

Weźmy stan własny o określonym pędzie i rozwiążmy równanie Schrödingera $i\,\frac{d}{dt}|\mathbf{k}(t)\rangle = \mathtt{H}|\mathbf{k}(t)\rangle$ z warunkiem początkowym $|\mathbf{k}(t=0)\rangle = |\mathbf{k}\rangle$. Otrzymujemy:

$$|\mathbf{k}(t)\rangle = e^{-i\mathtt{H}t}\,|\mathbf{k}\rangle = e^{-iE_kt}\,|\mathbf{k}\rangle$$

Skorzystaliśmy z tego, że $|\mathbf{k}\rangle$ jest stanem własnym hamiltonianu $\mathtt{H}$. Rozłóżmy ten stan w bazie położeniowej:

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{x}|\mathbf{k}(t)\rangle &= \langle\mathbf{x}|e^{-i\mathtt{H}t}|\mathbf{k}\rangle = \langle 0|\varphi(\mathbf{x})e^{-i\mathtt{H}t}|\mathbf{k}\rangle = \langle 0|e^{-i\mathtt{H}t}e^{i\mathtt{H}t}\varphi(\mathbf{x})e^{-i\mathtt{H}t}|\mathbf{k}\rangle = \\ &\overset{(*)}{=} \langle 0|e^{i\mathtt{H}t}\varphi(\mathbf{x})e^{-i\mathtt{H}t}\,|\mathbf{k}\rangle = \langle 0|\varphi(\mathbf{x},t)|\mathbf{k}\rangle\end{aligned} \tag{1.17}$$

W $(*)$ skorzystaliśmy tego, że próżnia jest stanem o energii 0 i nie podlega ewolucji, t.j. $\langle 0|e^{-i\mathtt{H}t} = \langle 0|$. Wzór $\langle 0|\varphi(\mathbf{x},t)|\mathbf{k}\rangle$ określa amplitudę prawdopodobieństwa, że cząstka w stanie $\mathbf{k}$ (stan nie ewoluuje — stan w chwili t = stan w chwili początkowej $t=-\infty$, ewoluują operatory) w chwili t znajdzie się w punkcie $\mathbf{x}$.

Chcemy wiedzieć jak wygląda pole kwantowe $\varphi(\mathbf{x},t)$, tzw. pole w obrazie Heisenberga, wyrażone przez operatory kreacji i anihilacji, aby móc sprawdzić jakie równanie ono spełnia. Wiemy jak wygląda operator $\varphi(\mathbf{x})$ wyrażony za pomocą operatorów kreacji i anihilacji. Zatem wstawiając tę postać do wzoru na $\varphi(\mathbf{x},t)$ otrzymujemy następujące wyrażenie na operator pola w obrazie Heisenberga:

$$\varphi(\mathbf{x},t) = e^{i\mathtt{H}t}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left(a_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} + a^\dagger_{\mathbf{k}}e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}\right)e^{-i\mathtt{H}t}$$

Aby zobaczyć jak wygląda operator zależny od czasu $\varphi(\mathbf{x},t)$ musimy wiedzieć jak zachowują się operatory kreacji i anihilacji obłożone operatorami ewolucji (jak ewoluują operatory kreacji i anihilacji).

Wiemy, że

$$\mathtt{H}^n a_{\mathbf{k}} = \mathtt{H}^{n-1}\mathtt{H}a_{\mathbf{k}} = \mathtt{H}^{n-1}a_{\mathbf{k}}(\mathtt{H}-E_k) = \cdots = a_{\mathbf{k}}(\mathtt{H}-E_k)^n$$

Zatem, wiedząc, że funkcję wykładniczą od operatora możemy przedstawić jako szereg potęgowy, otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
e^{i\mathbb{H}t} a_{\mathbf{k}}\, e^{-i\mathbb{H}t} &= a_{\mathbf{k}}\, e^{i(\mathbb{H}-E_k)t} e^{-i\mathbb{H}t} = a_{\mathbf{k}}\, e^{-iE_k t} \\
e^{i\mathbb{H}t} a^{\dagger}_{\mathbf{k}}\, e^{-i\mathbb{H}t} &= a^{\dagger}_{\mathbf{k}}\, e^{i(\mathbb{H}+E_k)t} e^{-i\mathbb{H}t} = a^{\dagger}_{\mathbf{k}}\, e^{i\ E_k t}
\end{aligned}
$$

Pole kwantowe Heisenberga dane jest więc wzorem

$$
\varphi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(a^{\dagger}_{\mathbf{k}} e^{i\ (E_k t - \mathbf{kx})} + a_{\mathbf{k}} e^{-i(E_k t - \mathbf{kx})} \right) \tag{1.18}
$$

Możemy $E_k t - \mathbf{kx}$ zapisać w skróconej postaci $kx = k \cdot x = k_\mu x^\mu$, przyjmując oznaczenie $k_0 := E_k$.

W tej postaci wygodnie oblicza się pochodną pola po czasie i jego gradient, sprawdzając, że:

$$
\partial_t^2 \varphi - \triangle \varphi = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[a^{\dagger}_{\mathbf{k}} e^{i\ (E_k t - \mathbf{kx})} + a_{\mathbf{k}} e^{-i(E_k t - \mathbf{kx})} \right] \left(-E_k^2 + \mathbf{k}^2 \right) = -m^2 \varphi.
$$

Zatem nasze pole kwantowe spełnia równanie Kleina–Gordona

$$
(\Box + m^2)\varphi = 0. \tag{1.19}
$$

Rozdział 2

Kwantowa teoria pola i jej kłopoty

2.1 Transformacje (współzmienniczość) pól

Mamy pole $\varphi(\mathbf{x}, t)$ które spełnia równanie Kleina–Gordona:

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[a_{\mathbf{k}} e^{-i\,kx} + a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i\,kx} \right] \tag{2.1}$$

gdzie $k_0 = \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}$.

Czy pole $\varphi(x)$ ma określone własności transformacyjne? Odpowiedź na to pytanie nie jest oczywista. Operatory $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ są wyróżnione wyborem wektora próżni $|0\rangle$ w przestrzeni stanów i regułami komutacyjnymi:

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{q})$$

gdzie $\mathbf{k}, \mathbf{q}$ — trójwektory **(!)**. Kanoniczne relacje komutacji są narzucone w chwili $t = 0$. Używanie hamiltonianu wiąże się z wyborem układu odniesienia, gdyż $\mathtt{H} \iff t$, zatem używając opisu hamiltonowskiego musimy określić co to jest „czas".

Powstaje zatem pytanie, jak się transformuje pole $\varphi(x)$ z układu do układu, oraz czy istnieje lorentzowsko współzmiennicza, nie wyróżniająca żadnego układu odniesienia, definicja operatora $a_{\mathbf{k}}^\dagger$.

Mamy pole kwantowe w obrazie Heisenberga wyrażone poprzez operatory kreacji i anihilacji. Zapis $\varphi(x)$ wygląda niezmienniczo, zaś $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ zawiera trójwektor $\mathbf{k}$. Spróbujmy wyrazić operatory kreacji i anihilacji przez pole i jego pochodne. Mamy:

$$\begin{aligned} \int d^3x\, \varphi(x) e^{iqx} \Big|_{t=0} &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int d^3x \left[a_{\mathbf{k}} e^{-i(q-k)x} + a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i(q+k)x} \right] \Big|_{t=0} = \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[a_{\mathbf{k}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{k}) + a_{\mathbf{k}}^\dagger (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{q} + \mathbf{k}) \right] \Big|_{t=0} = \\ &= a_{\mathbf{q}} + a_{\mathbf{q}}^\dagger \end{aligned} \tag{2.2}$$

podobnie

$$\begin{aligned} \int d^3x\, \dot{\varphi}(x) e^{iqx} \Big|_{t=0} &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (-iE_k) \left[a_{\mathbf{k}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{k}) + \right. \\ &\qquad \left. - a_{\mathbf{k}}^\dagger (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{q} + \mathbf{k}) \right] \Big|_{t=0} = \\ &= -iE_q \big(a_{\mathbf{q}} - a_{\mathbf{q}}^\dagger \big) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Czyli dostajemy następujący układ równań na $a_{\mathbf{q}}$ i $a_{\mathbf{q}}^\dagger$ (uwaga — $\widehat{f}$ oznacza tutaj transformatę Fouriera funkcji f)

$$\widehat{\varphi}(\mathbf{q})\Big|_{t=0} = a_{\mathbf{q}}^\dagger + a_{\mathbf{q}} \tag{2.4a}$$

$$\widehat{\dot{\varphi}}(\mathbf{q})\Big|_{t=0} = iE_q(a_{\mathbf{q}}^\dagger - a_{\mathbf{q}}) \tag{2.4b}$$

Zatem operatory kreacji i anihilacji można wyrazić za pomocą transformaty Fouriera pola i jego pochodnej po czasie:

$$a_{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\left[\hat{\varphi}(q)|_{t=0} + \tfrac{i}{E_q}\,\hat{\dot{\varphi}}(q)\Big|_{t=0}\right] \tag{2.5}$$

$$a_{\mathbf{q}}^\dagger = \frac{1}{2}\left[\hat{\varphi}(q)|_{t=0} - \tfrac{i}{E_q}\,\hat{\dot{\varphi}}(q)\Big|_{t=0}\right] \tag{2.6}$$

Widać że powyższe wyrażenia wyróżniają układ odniesienia (klasy układów) poprzez specyfikację $t = 0$, wyróżniającą hiperpowierzchnię przestrzenną.

Wyrażenie (2.1) na pole w języku operatorów kreacji i anihilacji wygląda współzmienniczo, z wyjątkiem miary całkowania. Spróbujmy poprawić postać tej miary (zapisać ją w postaci niezmienniczej lorentzowsko).

$$\int d^3k = \int d^3k\, dk^0\, \delta(k_0 - \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}) = \int d^4k\, \delta(k_0 - \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2})$$

Z właściwości delty Diraca (t.j. ze wzoru na deltę Diraca od funkcji) wynika, że:

$$\begin{aligned}\delta(m^2 - k^2) = \delta(k_0^2 - \mathbf{k}^2 - m^2) = \frac{1}{2|k_0|}\delta(k_0 - \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}) &+ \\ + \frac{1}{2|k_0|}\delta(k_0 + \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2})&\end{aligned}$$

Drugi składnik sumy wymusza ujemną energię i trzeba się go pozbyć (w pierwotnym wzorze w ogóle nie występował). Dopisujemy zatem warunek dodatniości energii, dodając czynnik $\Theta(k_0)$.

Zatem lorentzowsko niezmienniczą całką jest:

$$\int \frac{d^3k\, dk_0}{(2\pi)^3}\, \frac{\Theta(k_0)\, \delta(k_0 - \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2})}{2E_k}\, [\ldots]$$

Od zapisu pola kwantowego będziemy wymagać, żeby w jak najmniejszym stopniu wyróżniał układ odniesienia. *Niezmienniczość miary całkowania* osiągamy dobierając definicję $a_{\mathbf{k}}$ i $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ tak, by w wyrażeniu na pole zastąpić zwykłą całkę po przestrzeni trójwymiarowej przez jej niezmienniczo lorentzowsko wersję:

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \longrightarrow \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3}\delta(k^2 - m^2)\Theta(k_0) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\, 2E_k}$$

Zgodnie z *definicją stanu o określonym położeniu* chcemy, żeby funkcja falowa dla swobodnych cząstek skalarnych była skalarem, czyli

$$\begin{aligned}e^{-iqx} &\stackrel{!}{=} \langle 0|\varphi(x)|\mathbf{q}\rangle = \\ &= \langle 0|\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\, 2E_k} e^{-ikx} a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{q}}|0\rangle\end{aligned}$$

Aby to zachodziło potrzebujemy, by $a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{q}}^\dagger|0\rangle = (2\pi)^3\, 2E_k \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{q})$. Musimy zatem przedefiniować operatory kreacji i anihilacji aby zachodziła następująca [kanoniczna] reguła komutacji:

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3\, 2E_k \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{q}) := \delta_{\mathbf{kq}} \tag{2.7}$$

. Przeskalowane zgodnie z poniższym wzorem operatory

$$a_{\mathbf{k}} \to \sqrt{2E_k}a_{\mathbf{k}}$$
$$a^\dagger_{\mathbf{k}} \to \sqrt{2E_k}a^\dagger_{\mathbf{k}}$$

spełniają reguły komutacji (2.7).

Ostatecznie nasze pole zapisane zgodnie z powyższymi warunkami ma postać

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\, 2E_k} \left[a_k e^{-ikx} + a_k^\dagger e^{ikx}\right] \tag{2.8}$$

, gdzie, dla uproszczenia notacji, $a_k = a_{\mathbf{k}}$.

Notacja. Dla uproszczenia notacji wprowadźmy następujące oznaczenie na całkę niezmienniczą

$$\int [\,k\,] = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\, 2E_k} \tag{2.9}$$

Wprowadźmy także odpowiadającą tej niezmienniczej całce odpowiednią deltę Diraca δ (równą komutatorowi kanonicznemu operatora anihilacji i kreacji) taką, że

$$\int [\,k\,]\, \delta_{\mathbf{kq}} f(\mathbf{k}) = f(\mathbf{q}) \tag{2.10}$$

W naszym przypadku $\delta\mathbf{kq} = (2\pi)^3\, 2E_k \delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{q})$.

2.2 Energia pola

Przypomnienie: $\partial^i\varphi = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\varphi = -\nabla^i\varphi$

Mamy hamiltonian swobodny, zapisany za pomocą operatorów kreacji i anihilacji:

$$\mathtt{H} = \int [\,k\,]\, E_k a_k^\dagger a_k$$

, gdzie E_k oznacza relatywistyczną energię kinetyczną cząstki. Chcemy zapisać (wyrazić) hamiltonian za pomocą pola i pochodnych pola. Ponieważ $\mathtt{H}$ jest biliniowy w $a_k^\dagger$, to spodziewamy się, że jest biliniowy w φ. Ale może zależeć też od pochodnych: $\dot\varphi$ i $\vec\nabla\varphi$. Będziemy korzystali z tego, że operator niezmienniczy względem przesunięć (całkujemy po całej przestrzeni) nie zmieni trójpędu stanu. Ponieważ $\mathtt{H}$ powinien zachowywać pęd, to powinien być niezmienniczy względem translacji. Osiągamy to całkując wyrażenia biliniowe w φ po całej przestrzeni.

Obliczmy:

$$\dot\varphi(x) = \int [\,k\,] \left[e^{-ikx} a_k(-iE_k) + e^{ikx} a_k^\dagger (iE_k)\right]$$
$$\partial^i\varphi(x) = \int [\,k\,] \left[e^{-ikx} a_k(-ik^i) + e^{ikx} a_k^\dagger (ik^i)\right]$$

Możemy obliczyć $\int d^3x\ \varphi^2(x)\big|_{t=0}$, $\int d^3x\ \dot\varphi^2(x)\big|_{t=0}$ oraz $\int d^3x\ (\nabla\varphi)^2(x)\big|_{t=0}$. Wykonujemy całkę po d^3x korzystając z faktu, że $\int d^3x\, e^{i\mathbf{kx}} = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{k})$. Możemy odcałkować deltę z jednym z pędów. Korzystając z faktu, że przy zmianie pędu na przeciwny energia się nie zmienia:

$$\mathbf{k}' = \pm\mathbf{k} \quad \longrightarrow \quad E_{k'} = E_k$$

dostajemy następujący wynik:

$$\int d^3x\ \tfrac{1}{2}\left[\dot\varphi^2 + ((\nabla\varphi))^2 + m^2\varphi^2\right]\big|_{t=0} = \int [\,k\,] \frac{E_k}{2}\left(a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger\right) =$$
$$= \mathtt{H} + \int [\,k\,] \frac{E_k}{2} 2E_k \underbrace{(2\pi)^3\delta^3(0)}_{=\mathrm{V}} = \mathtt{H} + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{E_k}{2}\cdot \mathrm{V}$$

Czyli

$$\int d^3x \, \tfrac{1}{2} \left[\dot{\varphi}^2 + (\nabla\varphi)^2 + m^2\varphi^2\right]\Big|_{t=0} = \mathtt{H} + \rho\,\mathrm{V},$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenie

$$\rho = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{E_k}{2} \tag{2.11}$$

Dygresja. Można tu zauważyć analogię z energią drgań zerowych oscylatora harmonicznego, której nie ma w teorii klasycznej. W mechanice kwantowej mamy następujący wzór na energię n-tego stanu: $E_n = \hbar\omega\left(\frac{1}{2} + n\right)$. Zatem energia najniższego stanu jest niezerowa. Nieskończona wielkość ρ dana wzorem (2.11) wygląda tak, jakbyśmy całkowali po wszystkich możliwych „oscylatorach" (stopniach swobody) energię drgań zerowych. Zresztą dokładnie to robimy. Dla oscylatora harmonicznego czynnik $\frac{1}{2}$ we wzorze na energię bierze się właśnie z komutatora $a^\dagger$ i a, tak samo jak i w przypadku pola, które jest superpozycją operatorów wzbudzeń oscylatorów dla wszystkich wartości $\mathbf{k}$.

Widzimy więc, że nasz hamiltonian nie jest dobrze określonym operatorem, gdyż daje nieskończoną energię stanu podstawowego. Możemy zatem powiedzieć, że energię zawsze liczymy od stanu podstawowego (czyli że jedyne co potrafimy zmierzyć to różnice energii) przypisując stanowi próżni energię 0. Potrzeba zatem wprowadzić pojęcie „**iloczynu normalnego**" operatorów. (Iloczyn normalny można uważać za najprostszą postać renormalizacji — sposobu radzenia sobie z niefizycznymi nieskończonościami.)

Definicja 2 (Iloczyn normalny). Przez *iloczyn normalny* pewnej ilości operatorów kreacji i anihilacji rozumiemy iloczyn, w którym wszystkie operatory kreacji znajdują się na lewo od operatorów anihilacji:

$$:\text{iloczyn } a \text{ i } a^\dagger: = \text{iloczyn } a^\dagger \cdot \text{iloczyn } a$$

Zatem hamiltonian cząstek skalarnych spełniających równanie Kleina–Gordona określamy wzorem:

$$\mathtt{H} = \int d^3x \, \frac{1}{2} :\left[\dot{\varphi}^2 + (\nabla\varphi)^2 + m^2\varphi^2\right]:\Big|_{t=0} \tag{2.12}$$

2.3 Uwagi i dygresje

2.3.1 Własności hamiltonianu

Stwierdzenie 1. $\mathtt{H}$ *jest biliniowy w polu* φ *i* $E_k^2 = \mathbf{k}^2 + m^2$.

Stwierdzenie 2. *Hamiltonian swobodnego pola skalarnego dany jest wzorem:*

$$\mathtt{H} = \int d^3x \, \tfrac{1}{2} :\left[\dot{\varphi}^2 + (\nabla\varphi)^2 + m^2\varphi^2\right]:$$

W ewolucji w czasie odgrywają rolę wielkości $\dot{\varphi}|_{t=0}$, $\varphi|_{t=0}$ *(z* $\varphi|_{t=0}$ *możemy wyliczyć* $\nabla\,\varphi|_{t=0}$*). Obliczenie*

$$\mathtt{H} = \int [\,k\,]\, a^\dagger_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} E_k$$

wymaga określenia związku między E_k *i* $\mathbf{k}$*, a zatem znajomości masy.*

Przestrzeń Focka: definicje stanów o określonym pędzie $\mathbf{k}$ i funkcji falowych fal płaskich $e^{i\mathbf{kx}}$ nie wymagają wprowadzenia masy.

W hamiltonianie zdefiniowanym wzorem (2.12) $\int d^3x :[\dot{\varphi}^2 + (\nabla\varphi)^2 + m^2\varphi^2]:$, gdzie φ spełnia równanie Kleina–Gordona i dane jest wzorem (2.8), człony zmieniające liczbę cząstek występuj z zerowymi współczynnikami $0 \cdot a_k a_{-k} + 0 \cdot a_k^\dagger a_{-k}^\dagger$ tylko dlatego, że $E_k^2 - \mathbf{k}^2 - m^2 = 0$ (czyli wynika ze wzoru na energię).

2.3.2 Komutatory pól i pochodnych

Zobaczmy, że

$$[\varphi(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})]\,|_{t=0} = 0 \tag{2.13}$$

Rozpisujemy pola za pomoc operatorów kreacji i anihilacji zgodnie ze wzorem (2.8). *Uwaga: x* oznacza wektor $(0, \mathbf{x})$, y oznacza $(0, \mathbf{y})$.

$$\begin{aligned}
&\int [\,k_1\,][\,k_2\,]\;\Big[\big[a_{k_1} e^{-ik_1 x} + a^\dagger_{k_1} e^{-ik_1 x}\big], \big[a_{k_2} e^{-ik_2 y} + a^\dagger_{k_2} e^{-ik_2 y}\big]\Big]\Big|_{t=0} = \\
&\quad = \int [\,k_1\,][\,k_2\,]\;\Big([a_{k_1}, a^\dagger_{k_2}] e^{-ik_1 x + ik_2 x} + [a^\dagger_{k_1}, a_{k_2}] e^{ik_1 y - ik_2 y}\Big)\Big|_{t=0} = \\
&\quad = \int [\,k\,]\;\Big[e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x-y)}\Big]\Big|_{t=0} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\, 2E_k}\Big[e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} - \underbrace{e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}_{\substack{k'=-k \\ \text{ta sama całka}}}\Big] = 0
\end{aligned}$$

Skorzystaliśmy po drodze z postaci kanonicznych związków komutacyjnych

$$[a_{\mathbf{k}}, a^\dagger_{\mathbf{q}}] = (2\pi)^3\, 2E_k \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{q})$$

i odcałkowaliśmy po jednym z pędów.

Podobnie można pokazać, że

$$[\varphi(\mathbf{x}), \dot\varphi(\mathbf{x})]\,|_{t=0} = i\,\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tag{2.14}$$

Podstawiamy wzór na pole φ i korzystamy z reguł komutacyjnych

$$\begin{aligned}
&\int [\,k_1\,][\,k_2\,]\;\Big[\big[a_{k_1} e^{-ik_1 x} + a^\dagger_{k_1} e^{-ik_1 x}\big], (iE_{k_2})\big[a_{k_2} e^{-ik_2 y} + a^\dagger_{k_2} e^{-ik_2 y}\big]\Big]\Big|_{t=0} = \\
&\quad = \cdots = \\
&\quad = \int [\,k\,]\; iE_k\;\Big[e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x-y)}\Big]\Big|_{t=0} = \\
&\quad = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\, 2E_k} iE_k\;\Big[e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} + e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\Big] = \\
&\quad = \frac{i}{2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\Big[e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} + e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\Big] = \\
&\quad = i\,\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})
\end{aligned}$$

Powyższe reguły komutacji przypominają kanoniczne reguły komutacji pędu i położenia w klasycznej mechanice kwantowej. Pole $\varphi(\mathbf{x})$ pełni rolę składowej położenia zaś $\dot\varphi(\mathbf{x})$ rolę pędu kanonicznego. Zamiast skończonej ilości składowych mamy continuum stopni swobody, tyle, ile punktów $\mathbf{x}$ (prostej).

2.4 Kwantowanie kanoniczne

2.4.1 Zasada korespondencji

$$\text{Teoria Klasyczna} \xrightarrow[\text{(kwantyzacja)}]{\text{reguły komutacji}} \text{Teoria Kwantowa}$$

Obowiązuje następująca *zasada odpowiedniości* (zwana także *zasadą korespondencji*): mechanika kwantowa nie różni się istotnie w swych przewidywaniach od mechaniki klasycznej przy opisie procesów, w których charakterystyczne działanie jest dużo większe od kwantu działania $\hbar$. (BBCK „Teoria kwantów. Mechanika falowa".)

O tym jak równania mechaniki kwantowej przechodzą w równania ruchu Newtona dla wartości średnich mówią równania Ehrenfesta:

$$\frac{d}{dt}\langle\psi|m\mathbf{v}|\psi\rangle = \langle\psi|-\left[\widehat{\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}}\right]|\psi\rangle \tag{2.15}$$

Zamiast równania Newtona można użyć równań dynamiki Hamiltona. Wówczas widać odpowiedniość między nawiasami Poissona w mechanice klasycznej, a komutatorem operatorów w mechanice kwantowej. W mechanice kwantowej mamy

$$i\frac{d\mathbf{p}}{dt} = [\mathtt{H}, \mathbf{p}]$$
$$i\frac{d\mathbf{x}}{dt} = [\mathbf{x}, \mathtt{H}]$$

Teoria klasyczna	$\longleftarrow$	Teoria kwantowa
$\{\ ,\ \} = 1$	$\longleftarrow$	$[\ ,\ ] = 1$
dla $x_{\mathrm{cl}} = \langle x\rangle$ i $p_{\mathrm{cl}} = \langle p\rangle$		

Tabela 2.1: Zasada korespondencji

W mechanice klasycznej znając lagranżjan możemy uzyskać równania ruchu z zasady najmniejszego działania:

$$\delta S = 0 \qquad \text{gdzie} \quad S = \int \mathscr{L}\, d^4x \quad \text{— działanie}$$

Wariacje pól z definicji znikają na brzegu obszaru całkowania.

Klasyczne równanie Kleina—Gordona

$$\left(\Box + m^2\right)\varphi = 0 \tag{2.16}$$

odpowiada lagranżjanowi

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left[\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^2\right] \tag{2.17}$$

(Lagranżjan ten można zapisać jako $\frac{1}{2}\varphi[\Box + m^2]\varphi$, w którym to sformułowaniu łatwiej widać że prowadzi on do równania Kleina–Gordona. Nie chcemy aby lagranżjan zawierał drugie pochodne pól, więc korzystamy z całkowania przez części do sprowadzenia go do standardowego zapisu — zakładamy tutaj że pola znikają w nieskończoności, i że topologia przestrzeni jest euklidesowa, czyli że można całkować przez części i odrzucić wyrazy powierzchniowe.)

2.4.2 Przejście od mechaniki kwantowej do kwantowej teorii pola

W kwantowej teorii pola:

- $\varphi(\mathbf{x})$ — stopień swobody, tzn. liczba stopni swobody = $\mathfrak{c}$ (liczba punktów na prostej (w przestrzeni)).
- $\varphi(\mathbf{x})$ jest obiektem lokalnym, tzn. między każdymi $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ jest tyle samo stopni swobody.

Od mechaniki kwantowej, w której mamy skończenie wiele stopni swobody, i w której kanoniczne związki komutacyjne dla pędu i położenia zawierają delty Kroneckera (i którą dobrze znamy) możemy przejść do kwantowej teorii pola z nieskończoną ilością stopni swobody na przynajmniej dwa sposoby.

Metoda uśredniania

Mamy kratę w przestrzeni. Definiujemy pole w punkcie $\mathbf{x_n}$ jako średnią z pola po kostce otaczającej ten punkt

$$\varphi_{\mathbf{n}} = \int\limits_{\Delta \mathrm{V}} \frac{d^3x\ \varphi(\mathbf{x})}{(\Delta x)^3} = \bar{\varphi}(\mathbf{x_n})$$

Teoria dyskretna przechodzi w ciągłą gdy $\Delta x \to 0$

Metoda pola na kracie

Mamy kratę punktów i rozważamy tylko $\varphi(\mathbf{n})$, t.j. pola tylko na sieci punktów, a nie w przestrzeni ciągłej (znaczne zredukowanie ilości stopni swobody). W tej metodzie $\varphi_{\mathbf{n}} = \varphi_{\mathbf{n}}$.
Teoria ciągła przechodzi w dyskretną w granicy nieskończonej (continuum) ilości punktów kraty.

W obu metodach gradient zastępujemy ilorazem różnicowym.
Lagranżjan dyskretny dany jest wzorem

$$\mathcal{L} = \sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{2}\left[\dot{\varphi}_{\mathbf{n}}^2 - \sum_{\mathbf{e}} \frac{(\varphi_{\mathbf{n+e}} - \varphi_{\mathbf{n}})}{|\Delta x|^2} - m^2\varphi_{\mathbf{n}}^2\right]$$

Wówczas pęd kanoniczny zdefiniujemy wzorem

$$\Pi_{\mathbf{n}} \overset{\mathrm{z\ def}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_{\mathbf{n}}} = \dot{\varphi}_{\mathbf{n}} \tag{2.18}$$

Hamiltonian dyskretny jest równy

$$\begin{aligned} \mathtt{H} &\overset{\mathrm{z\ def}}{=} \sum_{\mathbf{n}} \Pi_{\mathbf{n}}\dot{\varphi}_{\mathbf{n}}(\varphi_{\mathbf{n}}, \Pi_{\mathbf{n}}) - \mathcal{L}(\varphi_{\mathbf{n}}, \dot{\varphi}_{\mathbf{n}}(\varphi_{\mathbf{n}}, \Pi_{\mathbf{n}}), t) \\ &= \sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{2}\left[\Pi_{\mathbf{n}} + \sum_{\mathbf{e}} \frac{(\varphi_{\mathbf{n+e}} - \varphi_{\mathbf{n}})}{|\Delta x|^2} - m^2\varphi_{\mathbf{n}}^2\right] \end{aligned}$$

co w granicy continuum daje

$$\mathtt{H} = \int d^3x\ \frac{1}{2}\left[\Pi^2 + (\nabla\varphi)^2 + m^2\varphi^2\right] \tag{2.19}$$

2.4.3 Kwantowanie kanoniczne teorii swobodnej

Uwaga. Gdy mamy teorię daną lagranżjanem $\mathcal{L}$, to do przejścia do opisu hamiltonowskiego potrzebujemy dokonać regularyzacji (dalej w wykładzie). $\mathcal{L} \xrightarrow{\text{regularyzacja}} \mathtt{H}$. Regularyzacja nie jest precyzyjna. Lokalne pola kwantowe, którymi posługujemy się przy opisie lagranżowskim, są osobliwe. Lokalne pole $\to$ nieskończona rozdzielczość $\to$ nieskończone (nieograniczone) pędy $\to$ energie większe od energii Wszechświata; trzeba umieć radzić sobie z tą nieskończonością.

Dla teorii klasycznej

$$\begin{aligned} \mathscr{L} &= \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^2\right) \\ \mathscr{H} &= \frac{1}{2}\left[\Pi^2 + (\nabla\varphi)^2 + m^2\varphi^2\right] \\ \mathtt{H} &= \int d^3x\ \frac{1}{2}\left[\Pi^2 + (\nabla\varphi)^2 + m^2\varphi^2\right]\Big|_{t=0} \end{aligned}$$

Klasyczne rozwiązanie równania Kleina–Gordona (2.16) (wynikające z zasady najmniejszego działania zastosowanej do tego lagranżjanu) w chwili $t = 0$ dane jest wzorem

$$\varphi(\mathbf{x}, 0) = \int [\,k\,]\ \left[a(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{kx}} + \tilde{a}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{kx}}\right]$$

Wówczas pęd kanoniczny wynosi

$$\Pi(\mathbf{x},0)=\int[\,k\,]\,i\sqrt{m^2+\mathbf{k}^2}\left[a(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}+\tilde{a}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}\right]$$

Definicja 3 (Nawiasy Poissona). Nawiasy Poissona dwu zmiennych dynamicznych będących funkcjonałami pędów i położeń kanonicznych zdefiniowane są następująco

$$\{A,B\}\overset{\mathrm{df}}{=}\int d^3x\,\left[\frac{\delta A}{\delta\varphi(\mathbf{x})}\frac{\delta B}{\delta\Pi(\mathbf{x})}-\frac{\delta A}{\delta\Pi(\mathbf{x})}\frac{\delta B}{\delta\varphi(\mathbf{x})}\right]$$

Jeśli zbudujemy nawiasy Poissona dla zmiennych kanonicznych to otrzymamy

$$\{\varphi(\mathbf{x}),\Pi(\mathbf{y})\}=\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{2.20}$$

Według reguł „kwantyzacji kanonicznej” nawiasy Poissona $\{\ ,\ \}$ w teorii klasycznej przechodzą w $i\hbar$ razy komutator odpowiednich operatorów $[\ ,\ ]$ w teorii kwantowej. (*Przypomnienie:* w naszych jednostkach $\hbar=1$). Czyli (w odpowiadającej klasycznej teorii pola teorii kwantowej):

$$[\varphi(\mathbf{x}),\Pi(\mathbf{y})]=i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{2.21}$$

Te reguły komutacyjne implikują, co już sprawdziliśmy (patrz rozdział 2.1) następujący wzór

$$[a(\mathbf{k}),\tilde{a}(\mathbf{q})]=(2\pi)^3\,2E_k\delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{q})$$

Zatem mamy odpowiedniość między współczynnikami w klasycznym rozwiązaniu (w klasycznej teorii pola) równania Kleina–Gordona, a operatorami kreacji i anihilacji w kwantowej teorii pola (i kwantowym równaniu Kleina–Gordona):

$$\begin{aligned} a(\mathbf{k}) &\equiv a_{\mathbf{k}} \\ \tilde{a}(\mathbf{k}) &\equiv a^{\dagger}_{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

Standardowy punkt widzenia wygląda następująco: z teorii pola klasycznego za pomocą metody kwantowania kanonicznego dostajemy teorię cząstek. Widzimy, że dla teorii swobodnej naprawdę wykonaliśmy kroki w przeciwnym kierunku — wiemy jak powinna wyglądać teoria cząstek swobodnych, wyprowadziliśmy na podstawie tej wiedzy kwantową teorię pola, i za pomocą *zasady odpowiedniości* (zwanej też *zasadą korespondencji*) pokazaliśmy, że odpowiada ona pewnej teorii pola klasycznego (o tak samo wyglądającym lagranżjanie). Tzw. *kwantowanie kanoniczne* jest jak gdyby „operacją odwrotną” do zasady korespondencji. Pozwala nam ono wychodząc ze znanej teorii pola klasycznego (zaproponowanego lagranżjanu) uzyskać teorię cząstek. Można w ten sposób uzyskać teorię cząstek z oddziaływaniem, przez skwantowanie teorii ze złożonym (zawierającym oddziaływanie) langrażjanem

Można to przedstawić na diagramie

teoria pola klasycznego $\leftrightarrows$ kwantowanie (kanoniczne) $\leftrightarrows$
$\leftrightarrows$ kwantowa teoria pola $\leftrightarrows$ teoria cząstek

Wiadomo jak wygląda teoria cząstek swobodnych ($\leftarrow$). W teoriach z oddziaływaniem używamy strzałek $\rightarrow$.

Wniosek 2.1. *Możemy zaproponować $\mathscr{L}(\varphi,\partial_\mu\varphi)$ i dedukować teorię cząstek.*

2.4.4 Teoria cząstek oddziałujących na przykładzie φ^3

Do teorii cząstek skalarnych spełniających równanie Kleina–Gordona (najprostszych relatywistycznych cząstek) dodajemy najprostsze oddziaływanie lokalne relatywistycznie niezmiennicze.

Dodajemy oddziaływanie do lagranżjanu i wracamy według strzałek $\rightarrow$

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi-m^2\varphi^2\right)-\frac{g}{3!}\varphi^3 \tag{2.22}$$

$$\mathscr{H}=:\frac{1}{2}\left[\Pi^2+(\nabla\varphi)^2+m^2\varphi^2\right]+\frac{g}{3!}\varphi^3: \tag{2.23}$$

Pędy kanoniczne zależą tylko od części „kinetycznej” lagranżjanu, więc ponieważ lagranżjan ten różni się od lagranżjanu swobodnego o wyraz nie zawierający pochodnych pól po czasie, zatem pędy kanoniczne będą *identyczne* jak w teorii swobodnej. Hamiltonian jest podobny do hamiltonianu bez oddziaływania, różniąc się o człon oddziaływania $:\frac{g}{3!}\varphi^3:$.

Przypomnienie: Symbol $:a_1 \cdots a_n:$ oznacza iloczyn normalny (patrz definicja 2).

2.5 Konieczność renormalizacji

Cel: Znając klasyczny lagranżjan $\mathscr{L}$ i mechanikę kwantową zbudować teorię cząstek oddziałujących.

2.5.1 Model: teoria φ^3

Chcemy zapisać hamiltonian $\mathtt{H}$ teorii φ^3 (którego gęstość $\mathscr{H}$ dana jest wzorem (2.23)) za pomocą operatorów kreacji i anihilacji ($a^\dagger_{\mathbf{k}}$ i $a_{\mathbf{k}}$). Wiemy jak wygląda część swobodna — postarajmy się w ten sam sposób zapisać oddziaływanie.

$$\mathtt{H} = \int [\,k\,]\, E_k a^\dagger_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} + \frac{g}{3!}\int d^3x \,:\varphi^3(\mathbf{x}): = \mathtt{H}_0 + \mathtt{H}_I$$

$\mathtt{H}_I$ oznacza hamiltonian oddziaływania. Dalej będziemy zajmować się tylko tą części .

Za pole φ wstawiamy jego rozkład w przestrzeni pędów za pomocą operatorów kreacji i anihilacji (wzór (2.8)).

Notacja. Dla uproszczenia wprowadźmy następujący skrót dla całki niezmienniczej po pędach:

$$\int [\,k_1 k_2 \ldots k_n\,] = \int [\,12 \ldots n\,]$$

Dla skrócenia zapisu będziemy pisać a_i zamiast $a_{\mathbf{k}_i}$, i analogicznie dla operatorów kreacji.

Zamieniamy kolejność całkowania, wykonując najpierw całkę po położeniach, a potem całkę po pędach

$$\begin{aligned}\mathtt{H}_I = :\frac{g}{3!}\int [\,123\,] \int d^3x \,\Big[a_1 e^{-ik_1x} + a_1^\dagger e^{ik_1x}\Big] \times \\ \times \Big[a_2 e^{-ik_2x} + a_2^\dagger e^{ik_2x}\Big] \times \\ \times \Big[a_3 e^{-ik_3x} + a_3^\dagger e^{ik_3x}\Big] :\end{aligned}$$

Wymnażamy i wykonujemy całkę po położeniach

$$\begin{aligned}\mathtt{H}_I = \frac{g}{3!}\int [\,123\,] :\Big[&(2\pi)^3\delta^{(3)}(k_1+k_2-k_3)a_1a_2a_3^\dagger + a_1^\dagger a_2 a_3^\dagger (2\pi)^3\delta^{(3)}(k_1-k_2+k_3) + \\ +&(2\pi)^3\delta^{(3)}(k_1-k_2+k_3)a_1a_2^\dagger a_3 + a_1^\dagger a_2^\dagger a_3 (2\pi)^3\delta^{(3)}(k_1+k_2-k_3) + \\ +&(2\pi)^3\delta^{(3)}(k_2+k_3-k_1)a_1a_2^\dagger a_3^\dagger + a_1^\dagger a_2^\dagger a_3^\dagger (2\pi)^3\delta^{(3)}(k_1+k_2+k_3) + \\ +&(2\pi)^3\delta^{(3)}(k_1-k_2-k_3)a_1^\dagger a_2 a_3 + a_1 a_2 a_3 (2\pi)^3\delta^{(3)}(k_1+k_2+k_3)\Big]:\end{aligned} \tag{2.24}$$

Człony biorące się z uporządkowania normalnego (patrz niżej) wybierające stałe pole (tzw. „mody zerowe”, zwane tak gdyż dla nich $\mathbf{k} = 0$) nie wchodzą do rozważań fizycznych.

$$a_2 a_3^\dagger = a_3^\dagger a_2 + \text{coś}\ \delta_{32}$$

*Uwaga dotycząca teorii φ^3: * Teoria ta jest niestabilna ze względu na zjawisko zapadania się *gdy mamy w teorii mody stałe.* Dla rozwiązań stacjonarnych, dla których mamy $\dot\varphi = \vec\nabla\varphi = 0$ hamiltonian (gęstość energii) dany jest wzorem $\mathtt{H} = \frac{1}{2}m^2\varphi^2 + \frac{g}{3!}\varphi^3$ — gdy dopuszczamy „$\varphi < 0$”

preferowane są mody o energii ujemnej ($E = -\infty$). Gdy $\varphi \to \infty$ energia dąży do $-\infty$. Niemniej, wszystkie interesujące fizycznie teorie będą miały w sobie struktury trójliniowe. Np. w QED człon $\bar{\psi}\not{A}\psi$ lub $\bar{\psi}\psi\varphi$ w teorii Yukawy czy modelu standardowym. Te standardowe struktury nie dają wyrazów typu φ^3, ale zawierają iloczyny typu $a_1^\dagger a_2^\dagger a_3$. Dlatego zajmujemy się przykładem teorii φ^3 (jako prostszej od pozostałych przykładów), mimo jej patologicznego zachowania, gdy dopuścimy mody $\mathbf{k} = 0$.

Zatem wycinamy z przestrzeni stanów $\mathbf{k} \sim 0$, aby uniknąć zjawiska zapadania się [energetycznego] teorii i rozważamy wyłącznie rachunek zaburzeń, tzn. φ nie może przyjmować dużych wartości.

Zamiast tego chwytu moglibyśmy rozważać teorię, w której potencjał (hamiltonian) jest ograniczony od dołu: np. teorii φ^4 o gęstości hamiltonianu danej wzorem

$$\mathscr{H} = :\frac{1}{2}\left[\Pi^2 + (\nabla\varphi)^2 + m^2\varphi^2\right] + \frac{g}{3!}\varphi^3 + \frac{h}{4!}\varphi^4: \tag{2.25}$$

Dla tego potencjału klasyczna energia ma dobrze określone minimum i nie zapada się do $-\infty$. Rozwiązanie to ma jednak wady: teoria φ^4 jest bardziej złożona algebraicznie w rachunku zaburzeń niż φ^3. Z drugiej strony zapadanie się teorii φ^3 nie powstaje w rachunku zaburzeń. (Kondensat cząstek o nieskończenie długich falach $\to$ bardzo wiele oddziaływań musi zajść od kilku cząstek do kondensacji, zatem potrzebny byłby ∞ rząd rachunku zaburzeń do powstania modu koherentnego.)

Po pominięciu modów zerowych przy uporządkowaniu normalnym (w skrócie: po uporządkowaniu normalnym) i uproszczeniu identycznych członów, oraz porządkujących zamianach zmiennych całkowania dostajemy

$$\begin{aligned}\mathtt{H}_I = &\int [\,123\,]\,(2\pi)^3\delta(k_1+k_2-k_3)\frac{g}{2}\left(a_1^\dagger a_2^\dagger a_3 + a_3^\dagger a_2 a_1\right)\\ &+\int [\,123\,]\,(2\pi)^3\delta(k_1+k_2+k_3)\frac{g}{6}\left(a_1^\dagger a_2^\dagger a_3^\dagger + a_1 a_2 a_3\right)\end{aligned} \tag{2.26}$$

Poszczególne człony tego hamiltonianu możemy przedstawić za pomocą odpowiednich diagramów, podobnych do uporządkowanych diagramów Feynmanna (ale nie będących nimi; diagramy te określają kolejność operatorów), jak na rysunku 2.1.

2.5.2 Dlaczego używamy modelu φ^3?

Popatrzmy na typowe lagranżjany (gęstości lagranżjanów) spotykane w kwantowej teorii pola: lagranżjan elektrodynamiki (ED) i lagranżjan teorii Younga–Millsa (YM)

$$\mathscr{L}_{\mathrm{ED}} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{2.27}$$

gdzie $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$, zaś $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{YM}} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\,\mu\nu} \tag{2.28}$$

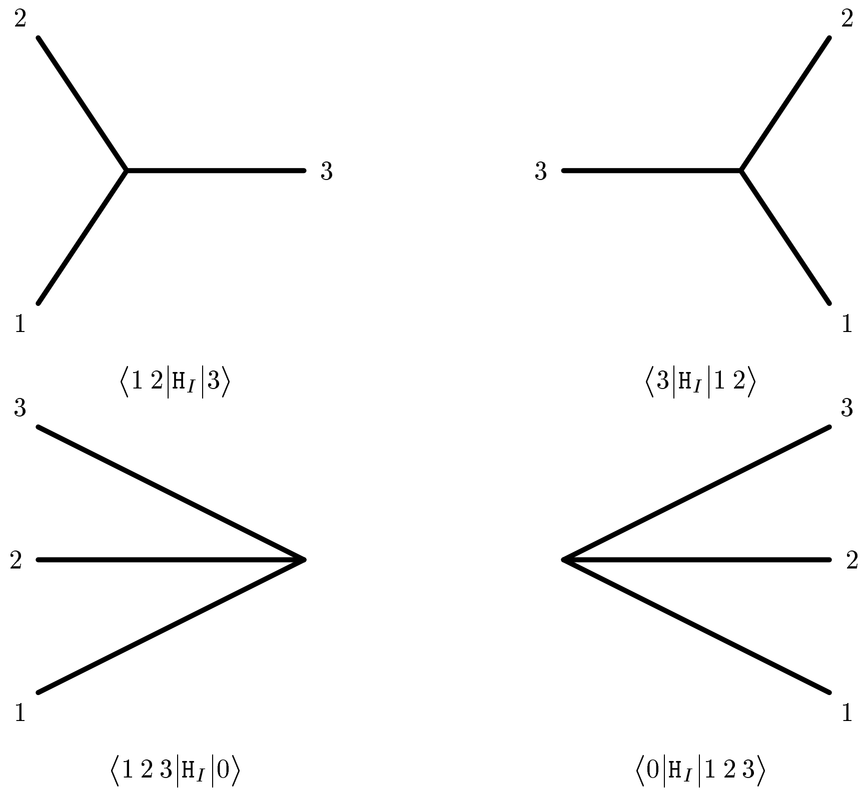
gdzie $D_\mu = \partial_\mu - ieA^a_\mu T^a$, zaś $F_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu}T^a = \frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu]$, T^a — generator odpowiedniej grupy symetrii

Jakie możemy znaleźć tu analogie?

$$\varphi \stackrel{?}{=} \psi$$

$$\varphi \stackrel{?}{=} A$$

1 stopień swobody $\leftrightarrow$ 2 lub 3 stopnie swobody



Rysunek 2.1: Diagramy elementów macierzowych $\mathtt{H}_I$ dla teorii φ^3

Popatrzmy na rozkład na operatory kreacji i anihilacji pól: wektorowego A_μ, i fermionowego ψ:

$$A_\mu = \sum_\lambda \int [\,k\,] \left[\varepsilon_{k\lambda\mu} e^{-ikx} a_{k\lambda} + \varepsilon^*_{k\lambda\mu} e^{ikx} a^\dagger_{k\lambda}\right] \tag{2.29}$$

$$\psi = \sum_\lambda \int [\,k\,] \left[u_{k\lambda} e^{-ikx} b_{k\lambda} + v_{k\lambda} e^{ikx} d^\dagger_{k\lambda}\right] \tag{2.30}$$

Wyglądają podobnie do analogicznego rozkładu pola skalarnego φ. Tym niemniej $\varphi \not\equiv \psi$ ze względu na to, że dla bozonów mamy reguły *komutacyjne* dla operatorów kreacji i anihilacji: $[a_{\mathbf{k}}, a^\dagger_{\mathbf{q}}] = \delta$, a dla fermionów mamy reguły *antykomutacyjne:* $\{b_{\mathbf{k}}, b^\dagger_{\mathbf{q}}\} = \delta$. Pole wektorowe A_μ wygląda jak pole skalarne o większej liczbie składowych, ale należy uważać na lorentzowską niezmienniczość oraz (w przypadku pól wektorowych bezmasowych) niezmienniczość ze względu na cechowanie.

Postacie oddziaływań w elektrodynamice i teoriach Younga–Millsa

Zobaczmy jak wygląda hamiltonian elektrodynamiki kwantowej. Aby wyprowadzić jego postać skorzystamy z tzw. metody kwantyzacji kanonicznej (patrz także rozdział 2.4).

Rozpisany lagranżjan elektrodynamiki ma postać:

$$\mathscr{L}_{ED} = \psi^\dagger \gamma^0 (i\partial\!\!\!/ + gA\!\!\!/ - m)\psi - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$$

Wypisujemy pędy kanoniczne pól w tym lagranżjanie:

- Dla pola fermionowego ψ

$$\frac{\delta \mathscr{L}}{\delta \dot{\psi}} = \psi^\dagger \gamma^0 i =: \Pi_f$$

- Dla fotonów A_μ $(\mu \neq 0)$

$$\frac{\delta \mathscr{L}}{\delta \partial_0 A_\mu} = -\frac{1}{2} 2\, F^{0\mu} = -(\partial^0 A^\mu - \partial^\mu A^0) = -\partial^0 A^\mu =: \Pi^\mu$$

Zatem hamiltonian kanoniczny ma następującą postać

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_{ED} = \psi^\dagger \gamma^0 \left(i\nabla\gamma - g\not{A} + m \right) \psi + \\ - \left(\partial^0 A^\mu \right) + \frac{1}{4} \left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \right) \left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \right)\end{aligned}$$

Zapiszmy go w takiej postaci, aby było widać jakie w nim występują oddziaływania

$$\mathscr{H}_{\mathrm{ED}} = \bar{\psi} \left[i\vec{\alpha} \circ \vec{\nabla} + \beta m \right] \psi + \tfrac{1}{2} \left(\vec{\nabla} A_\mu \right)^2 - \underline{\underline{g\bar{\psi}\not{A}\psi}}, \tag{2.31}$$

gdzie podkreśliliśmy człon oddziaływania. Człon $\frac{1}{2}(\vec{\nabla} A_\mu)^2$ podobny jest do członu kinetycznego w lagranżjanie Kleina–Gordona, a więc i w teorii φ^3.

Dla teorii nieabelowych (typu Younga–Millsa) mamy dodatkowo człony samoodziaływania pola ze sobą. Dla teorii abelowej mieliśmy

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

natomiast dla teorii nieabelowych mamy dodatkowo komutator pól — jest to człon kwadratowy w polu

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu] \tag{2.32}$$

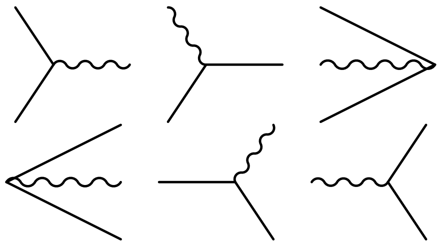
Z członu $F^a_{\mu\nu} F^{a\,\mu\nu}$ dostajemy w hamiltonianie następujące człony

$(\partial A)^2$ jest członem kinetycznym pola swobodnego

$\partial A \cdot A^2$ w reprezentacji pędowej $k \cdot A^3$ jest podobne do członu φ^3 z czynnikiem zależnym od pędu

A^4 jak φ^4

Człon oddziaływania fermion – bozon cechowania – fermion występujący zarówno w elektrodynamice, jak i w teoriach Younga–Millsa daje diagramy (patrz rysunek 2.2) zgodne ze schematem φ^3.



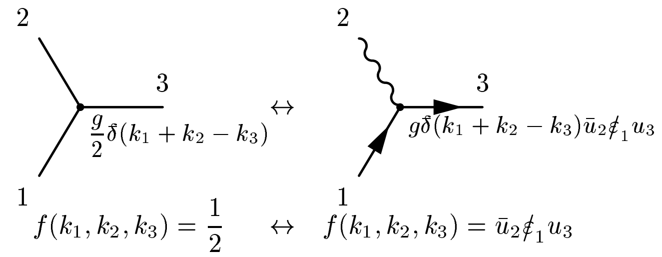
Rysunek 2.2: Typy wierzchołków oddziaływania fermion – bozon cechowania – fermion

W teorii φ^3 funkcja wierzchołkowa jest prosta: $\frac{1}{2}$, natomiast dla wierzchołka związanego z absorbcją lub kreacją bozonu cechowania przez fermion funkcja wierzchołkowa $f(k_1, k_2, k_3) = \bar{u}_2 \not{\epsilon}_1 u_3$ jest skomplikowaną funkcją pędów i spinów cząstek wchodzących do tego wierzchołka.

Zobaczmy jak się czynnik wierzchołkowy w elektrodynamice $\bar{u}_2 \not{\epsilon}_1 u_3$ zachowuje jako funkcja pędów. Mamy (z rozwiązania swobodnego równania Diraca):

$$u(k, \lambda) = \sqrt{\frac{E_k + m}{2m}} \begin{bmatrix} \chi_\lambda \\ \dfrac{\sigma \mathbf{k}}{E_k + m} \chi_\lambda \end{bmatrix}$$

$$\sim \sqrt{E_k} \underset{|k| \to \infty}{\sim} \sqrt{|k|}$$



Rysunek 2.3: Porównanie wierzchołka oddziaływania w teorii φ^3 i elektrodynamice

Czyli funkcja ta zachowuje się jak $\sqrt{k}$ (rośnie liniowo z pędem jak $\sqrt{|\mathbf{k}|}$). (Dwa spinory dają człon typu $\sqrt{k_1 k_3}$.) Wektor polaryzacji fotonu też jest zależny od pędu.

Różne typy oddziaływań spotykane w przyrodzie

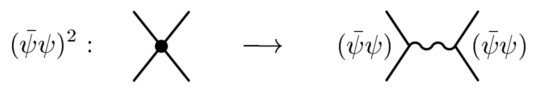
Wypiszmy różne typy oddziaływań spotykane w przyrodzie

$$\varphi^3, \qquad k \cdot \varphi^3, \qquad \varphi^4$$

(trójcząstkowe, k razy trójcząstkowe, czterocząstkowe)

Z tych trzech typów oddziaływań oddziaływanie typu φ^3 jest najprostsze. Chcemy wiedzieć do jakich problemów prowadzą powyższe typy oddziaływań, i jak sobie z nimi radzić. Zobaczymy co dostaniemy dla najprostszego typu. Zasada postępowania wobec napotkanych trudności będzie niezależna od szczegółów oddziaływania. (Patrz także dygresja n.t. teorii φ^3 na stronie 23)

Dygresja. Można wyróżnić jeszcze oddziaływanie punktowe czterofermionowe typu $(\bar{\psi}\psi)^2$ spotykane w teoriach typu Fermiego. To oddziaływanie jest bardzo silnie rozbieżne, bo funkcja wierzchołkowa zależy od pędu jak $\sqrt{k}^4 \sim k^2$. Kłopoty te spowodowane są tym, że jest to teoria efektywna. Gdy zastąpimy punktowe oddziaływanie $(\bar{\psi}\psi)^2$ (z wierzchołkiem czterofermionowym) oddziaływaniem za pośrednictwem masywnego bozonu cechowania, dostaniemy to samo zachowanie dla energii niższych od masy bozonu pośredniczącego, a pozbędziemy się nieskończoności, z którymi nie potrafimy sobie łatwo poradzić. Rozbijamy wierzchołek teorii $(\bar{\psi}\psi)^2$ na dwa połączone bozonem cechowania.



Podsumowanie rozważań o różnych typach oddziaływań

Zatem będziemy rozważać przykłady w oparciu o teorię φ^3, ponieważ jest prosta i ma kluczowe cechy, niezbędne żeby nam coś powiedzieć na temat zachowania się innych, mających większy związek z rzeczywistością, teorii.

2.5.3 Kłopoty w kwantowej teorii pola

Zapiszmy jeszcze raz hamiltonian teorii φ^3 za pomocą operatorów kreacji i anihilacji.

Mamy (wzory (1.14) i (2.26)) następujące wzory na hamiltonian swobodny i hamiltonian oddziaływania:

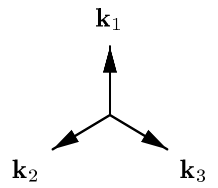
$$\mathtt{H}_0 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} E_k \, a^\dagger_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}$$

$$\begin{aligned} \mathtt{H}_I = & \int [\,123\,]\ (2\pi)^3 \delta(k_1 + k_2 - k_3) \frac{g}{2} \left(a^\dagger_1 a^\dagger_2 a_3 + a^\dagger_3 a_2 a_1 \right) \\ & + \int [\,123\,]\ (2\pi)^3 \delta(k_1 + k_2 + k_3) \frac{g}{6} \left(a^\dagger_1 a^\dagger_2 a^\dagger_3 + a_1 a_2 a_3 \right) \end{aligned}$$

Całkowity hamiltonian dany jest teraz wzorem $\mathtt{H} = \mathtt{H}_0 + \mathtt{H}_I$.

Pojawia się kłopot ze stanem próżni. Mimo stosowania uporządkowania normalnego (które dla teorii swobodnej zapewniało, że energia próżni wynosiła 0) mamy

$$\mathtt{H}_I|0\rangle \neq 0$$
$$\mathtt{H}_I|0\rangle \neq |0\rangle$$



$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = 0$$

Rysunek 2.4: Pędy daj ce całkowity pęd równy 0

Co prawda wyrzuciliśmy mody zerowe (cząstki o pędzie $\mathbf{k} = 0$, o nieskończonej długości fali) z naszej przestrzeni stanów, ale nadal możemy mieć zerowy całkowity pęd cząstek biorących udział w oddziaływaniu $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = 0$ przy pędach wszystkich cząstek różnych od zera (jak na rysunku 2.4). Kłopot pochodzi od członu nie zawierającego operatorów anihilacji (w $\langle 0|\mathtt{H}$ ten sam problem powstaje z członu hermitowsko sprzężonego, z trzema operatorami anihilacji).

Dygresja. Chcielibyśmy, żeby próżnia była stanem o zerowej energii, tzn. by

$$\frac{\partial}{\partial\psi}\langle\psi|\mathtt{H}|\psi\rangle = 0$$
$$|\psi\rangle = ? \qquad \text{(nie wiadomo)}$$

Jakbyśmy chcieli zapisać $e^{-i\mathtt{H}t}$, to byśmy dostarczali w wyższych rzędach coraz więcej cząstek; nieskończenie wiele wyrażeń z coraz wyższymi potęgami $\mathtt{H}_I$ i $\mathtt{H}_0$.

Niech $|s\rangle$ oznacza stan $\mathtt{H}_I|0\rangle$ powstały z zadziałania hamiltonianem na stan próżni (zapisujemy tylko człony dające niezerowy wkład; pamiętamy, że hamiltonian swobodny na stanie próżni daje zgodnie z naszą umową 0):

$$|s\rangle = \mathtt{H}_I|0\rangle = \frac{g}{6}\int [\,k\,]\,(2\pi)^3\delta(k_1+k_2+k_3)a_1^\dagger a_2^\dagger a_3^\dagger\,|0\rangle \tag{2.33}$$

Zobaczmy ile wynosi norma stanu $|s\rangle$. Wiemy, że

$$\langle 0|0\rangle = 1$$
$$\langle\mathbf{k}_1|\mathbf{k}_2\rangle = (2\pi)^3\, 2E_k\delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$$

Z definicji stanu $|s\rangle$, oraz z powyższych wzorów dostajemy wzór na normę tego stanu

$$\langle s|s\rangle = \frac{g^2}{6^2}\int [\,1\,2\,3\,\tilde{1}\,\tilde{2}\,\tilde{3}\,]\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(k_1+k_2+k_3)\times$$
$$\times\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(\tilde{k}_1+\tilde{k}_2+\tilde{k}_3)\langle 0|a_{\tilde{1}}a_{\tilde{2}}a_{\tilde{3}}a_1^\dagger a_2^\dagger a_3^\dagger|0\rangle$$

Aby ją wyznaczyć musimy zatem wiedzieć, ile wynosi $\langle 0|a_{\tilde{1}}a_{\tilde{2}}a_{\tilde{3}}a_1^\dagger a_2^\dagger a_3^\dagger|0\rangle$ Komutujemy zatem operatory, przesuwając operatory anihilacji na prawo a operatory kreacji na lewo, do „oparcia się" o próżnię, i otrzymujemy

$$\langle 0|a_{\tilde{1}}a_{\tilde{2}}a_{\tilde{3}}a_1^\dagger a_2^\dagger a_3^\dagger|0\rangle = \langle 0|a_{\tilde{1}}a_{\tilde{2}}[\delta_{\tilde{3}1}a_2^\dagger a_3^\dagger + \delta_{\tilde{3}2}a_1^\dagger a_3^\dagger + \delta_{\tilde{3}3}a_1^\dagger a_2^\dagger]\,|0\rangle =$$
$$= \cdots = 6\,\delta_{1\tilde{1}}\delta_{2\tilde{2}}\delta_{3\tilde{3}},$$

gdzie wprowadziliśmy dla skrócenia zapisu następujące oznaczenie

$$\delta_{ij} \overset{\text{ozn}}{=} (2\pi)^3 2E_i \, \delta^3(k_i - k_j) \tag{2.34}$$

Korzystając z powyższego wzoru możemy odcałkować po trzech z sześciu pędów. Pamiętając, że $V = (2\pi)^3\delta^3(0)$ (patrz rozdział 1.3.2), możemy zapisać

$$\begin{aligned}\langle s|s\rangle &= \frac{g^2}{6}\int [\,1\,2\,3\,]\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(k_1+k_2+k_3)(2\pi)^3\delta^{(3)}(k_1+k_2+k_3) = \\ &= V\,\frac{g^2}{6}\int [\,1\,2\,3\,]\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(k_1+k_2+k_3)\end{aligned}.$$

Stała multiplikatywna V pochodzi od nienormalizowalności stanów o określonym pędzie (przyjętej konwencji na ich normę, pochodzącej z przejścia od skończenie wielu stopni swobody dla ograniczonego Wszechświata). Stan o określonym pędzie $\Rightarrow$ norma $\sim V$.

Uwaga! W teorii φ^3 stała sprzężenia g jest *wymiarowa*; g ma wymiar masy.

Zobaczmy ile wynosi „gęstość normy" stanu $\mathtt{H}_I|0\rangle$. Możemy wykonać jedną z całek po pędach, pamiętając jak postać ma całka niezmiennicza

$$\begin{aligned}&\frac{g^2}{6}\int [\,1\,2\,3\,]\,(2\pi)^3\delta^{(3)}(k_1+k_2+k_3) = \frac{g^2}{6}\int [\,1\,2\,]\,\frac{1}{2E_3} = \{\text{rozpisujemy}\} = \\ &= \frac{g^2}{6}\int \frac{d^3k_1\,d^3k_2}{(2\pi)^6 2^3 E_1 E_2 E_{1+2}}.\end{aligned}$$

Załóżmy tutaj dla uproszczenia, że $m = 0$ (aby łatwiej obliczyć zachowanie się całki). Rozpatrzenie tego przypadku da nam wgląd w strukturę normy stanu $|s\rangle$.

$$\begin{aligned}&\frac{g^2}{6\cdot 8(2\pi)^6}\int \frac{4\pi\,2\pi\,k_1^2\,dk_1\,k_2^2\,dk_2}{k_1k_2\sqrt{(k_1+k_2)^2}} = \\ &= c\int_{-1}^{1} d\cos\theta \int \frac{dk_1^2\,dk_2^2}{\sqrt{k_1^2+k_2^2+2k_1k_2\cos\theta}} = \\ &= c\iint_0^\infty dk_1^2\,dk_2^2\,\frac{2}{2k_1k_2}\left(\sqrt{k_1^2+k_2^2+2k_1k_2} - \sqrt{k_1^2+k_2^2-2k_1k_2}\right) = \\ &= c\iint_0^\infty dk_1^2\,dk_2^2\,\left(\frac{|k_1+k_2|-|k_1-k_2|}{k_1k_2}\right) = \\ &= c\int_0^\infty dk_1\int_0^\infty dk_2\,\big(|k_1+k_2|-|k_1-k_2|\big).\end{aligned}$$

Robimy zamianę zmiennych z pędów cząstek k_1, k_2 na pędy względne $k_\pm = k_1 \pm k_2$.

$$\begin{aligned}c\int_0^\infty dk_1\int_0^\infty dk_2\,\big(|k_1+k_2|-|k_1-k_2|\big) &= \\ &= \frac{c}{2}\int_0^\infty dk_+\int_{-k_+}^{k_+} dk_-\,\big(k_+ - |k_-|\big) = \\ &= \frac{c}{2}\int_0^\infty dk_+\,\big(2k_+^2 - k_+^2\big) = \frac{c}{2}\int_0^\infty dk_+\,k_+^2.\end{aligned}$$

Wpisując wartość stałej multiplikatywnej c otrzymujemy

$$\frac{\langle s|s\rangle}{V} = \frac{g^2 8\pi^2}{96(2\pi)^6}\,\frac{1}{2}\int_0^\infty dk\,k^2 = \frac{g^2}{6(4\pi)^4}\int_0^\infty dk\,k^2 = \infty \tag{2.35}$$

Wynik ten spowodowany jest sprzężeniem próżni $|0\rangle$ ze stanami trójcząstkowymi i tym, że im większe pędy względne cząstek biorących udział w oddziaływaniu, tym większe jest ich znaczenie. Jedno działanie $\mathtt{H}_I$ na stan próżni daje nieskończoną gęstość cząstek o nieskończonych pędach. *Podejrzenie:* spowodowane jest to tym, że pole $\varphi^3 \leftarrow$ lokalne oddziaływanie (a zatem nieskończoną rozdzielczością w przestrzeni położeń).

Znaczenie nieskończoności w $\mathtt{H}_I|0\rangle$

Ewolucja w czasie dana wzorem $|s(t)\rangle = e^{-i\mathtt{H}t}|s(0)\rangle$ jest źle określona dla dowolnego stanu początkowego $|s(0)\rangle$ z przestrzeni Focka (co wynika z tego, że dowolny stan $|s(0)\rangle$ możemy uzyskać za pomocą kombinacji liniowej stanów otrzymanych przez działanie operatorami kreacji na *stan próżni*).

Chciało by się zadać pytanie, ile wynosi wartość próżniowa operatora ewolucji

$$\beta_\pm = \langle 0|e^{\mp i\mathtt{H}t}|0\rangle$$

Ale $\beta_\pm$ jest funkcją czasu (zależy od t) z nieskończenie szybko oscylującą fazą.

Żeby prowadzić obliczenia musimy *zregularyzować* $\mathtt{H}$, tzn. musimy uczynić zmianę fazy $\beta_\pm$ skończoną.

W przypadku członu w hamiltonianie oddziaływania dającego nieskończoność normy stanu $\mathtt{H}_I|0\rangle$

$$\int [1\,2\,3]\ (a_1^\dagger a_2^\dagger a_3^\dagger + \text{ h.c.})\bar{\delta}(k_1+k_2+k_3)$$

dwa pędy są dowolne (w szczególności wszystkie trzy pędy mogą być dowolnie duże). Zauważmy, że

$$E_1 + E_2 + E_3 \overset{k_i\to\infty}{\approx} |k_1| + |k_2| + |k_3|$$

gdyż $E = \sqrt{\mu^2 + k^2}$. Zatem jeżeli narzuci się warunek na ograniczoność energii $E_1 + E_2 + E_3 < \Delta$, to wszystkie pędy będą skończone (i nie będziemy otrzymywać nieskończoności!).

Jeśli narzucimy takie ograniczenie, wprowadzając pod całkę odpowiedni „czynnik wierzchołkowy”

$$\int [1\,2\,3]\ (a_1^\dagger a_2^\dagger a_3^\dagger + \text{ h.c.})\bar{\delta}(k_1+k_2+k_3) f_\Delta(1\,2\,3)$$

gdzie $f_\Delta(1\,2\,3) \to 0$ gdy $E_1 + E_2 + E_3 \gg \Delta$ (czyli wprowadzimy powyższe ograniczenie), wówczas zamiast nieskończoności dostaniemy następujący wzór na normę stanu $\mathtt{H}_I|0\rangle$:

$$\langle 0|\mathtt{H}_I^2|0\rangle \sim g^2\Delta^3\mathrm{V} \overset{g\to 0}{\ll} 1.$$

Widzimy, że z ograniczeniem Δ na energię i dla $g \to \infty$ rozbieżność daje się przezwyciężyć. Rozbieżność przestaje być równa nieskończoności. A małe g może uczynić wynik dowolnie małym.

Możemy teraz zapytać, czy taki zregularyzowany hamiltonian z bardzo małą stałą g może być użyty w rachunku zaburzeń do obliczenia amplitudy rozpraszania. Oczywiście tak, ale powstaje pytanie jakie będą wyniki, a w ogólności czy będą relatywistycznie poprawne (współzmiennicze). Odpowiedź jest negatywna. Wyniki będą zależały od Δ i od układu odniesienia użytego w definicji teorii kwantowej. Nie istnieje takie naiwne i dobre (akceptowalne) sformułowanie teorii cząstek.

Teoria grafów (diagramów) Feynmanna nie opiera się na procedurze dobrego zdefiniowania $\mathtt{H}$ (aczkolwiek można ją wyprowadzić za pomocą procedury kwantowania kanonicznego), tylko na całkach po drogach (trajektoriach) i na regularyzowaniu kolejnych całek w rachunku zaburzeń, rząd po rzędzie, według ustalonych reguł. Na takiej procedurze opiera się współczesna teoria cząstek elementarnych.

W sformułowaniu za pomocą diagramów Feynmanna (sformułowaniu lagranżowskim) każdy rząd rachunku zaburzeń jest relatywistycznie niezmienniczy. Mamy w tym sformułowaniu jawnie relatywistyczny zapis. Hamiltonian (nawet bez regularyzacji) może natomiast zawierać człony nie będące jawnie relatywistyczne, ale z tym potrafimy sobie radzić.

Gdyby interesowały nas tylko amplitudy przejścia, t.j. zajmowalibyśmy się teorią rozpraszania, to moglibyśmy sobie w prostszy sposób poradzić z nieskończoną fazą. Przy liczeniu amplitudy przejścia (z twierdzenia Löwe'a)

$$A = \frac{\langle s(t)|s(0)\rangle}{\langle 0|e^{-i\mathtt{H}t}|0\rangle}$$

Mianownik ma nam uprościć osobliwość stanu $\mathtt{H}|0\rangle$ (błogie życzenie).

$$e^{-i\mathtt{H}t}\hat{O}|0\rangle = \underbrace{e^{-i\mathtt{H}t}\hat{O}e^{-i\mathtt{H}t}}_{\text{ewolucja } \hat{O}}\ \underbrace{e^{-i\mathtt{H}t}|0\rangle}_{\text{faza próżni}}$$

Do świadczenie pokoleń: „błogie uproszczenie” można zrealizować w sposób prowadzący do relatywistycznie współzmienniczych amplitud A przy pomocy diagramów Feynmanna (1949/1950), z odpowiednią regularyzacją.

Regularyzacja przez obcięcie, t.j. za pomocą wymuszenia ograniczenia na możliwe wartości energii, nie jest jedyną stosowaną. Inne często stosowane regularyzacje to regularyzacja Pauliego–Villarsa oraz regularyzacja wymiarowa.

Regularyzacja Pauliego–Villarsa , stosowana m. in. przy dowodzeniu renormalizowalności konkretnych typów teorii, polega na odejmowaniu całek z cząstkami o wielkich masach. Skala masy M tych pomocniczych cząstek pełni rolę skali Δ.

$$E_k = \sqrt{\mu^2 + \mathbf{k}^2} \qquad f(\mu) - f(M) \qquad M \leftrightarrow \Delta$$

Regularyzacja ta jest jawnie relatywistycznie niezmiennicza, ale prowadzi do bardziej skomplikowanych wzorów niż regularyzacja przez obcięcie czy regularyzacja wymiarowa.

Regularyzacja wymiarowa , najczęściej stosowana przy obliczeniach za pomocą diagramów Feynmanna, polega na zastąpieniu nieskończonych całek po czterowymiarowej czasoprzestrzeni całkami po przestrzeni D-wymiarowej, a następnie przejściu $D \to 4$ (formalnie jest to pewnego rodzaju przedłużenie analityczne). Korzystamy tutaj z tego, że całki rozbieżne w 4. wymiarach mają skończoną wartość w $D \neq 4$ wymiarach. Rolę parametru regularyzacji pełni tutaj $D - 4$.

$$\int d^4k \quad \text{zastępujemy przez } 0$$
$$\int d^Dk\, k^\alpha = 0 \quad \text{dla } \alpha > 0$$

Sposób ten można zastosować w prosty sposób tylko w przypadku całek w rachunku zaburzeń po całej czasoprzestrzeni, zatem nie daje się go stosować w formalizmie hamiltonowskim do dobrego zdefiniowania całej teorii.

$$\big|\Omega\big\rangle = ?$$
$$\mathtt{H}\big|\Omega\big\rangle = \lambda\big|\Omega\big\rangle \quad (\text{połóżmy } \lambda = 0 \text{ przez odjęcie stałej od } \mathtt{H})$$

Ale $\big|\Omega\big\rangle$ nie można znaleźć prostym rachunkiem zaburzeń.

Mieliśmy kłopoty z $\mathtt{H}_I\big|0\big\rangle$ — stan ten miał nieskończoną normę (nawet w pudle). Jeśli teraz będziemy się posługiwać obciętym hamiltonianem $\mathtt{H}_{I\Delta}$, to co prawda $\mathtt{H}_{I\Delta}\big|0\big\rangle$ jest skończone, ale jest zależne od hiperpłaszczyzny $t = 0$ (czyli stan $\big|\Omega\big\rangle$ będzie wiedzieć o tym, jaki układ odniesienia (czas) wybraliśmy przy kwantyzacji).

Mamy zatem następujące możliwości. Każda z nich ma swoje zalety i wady.

1. Zrezygnować z hamiltonianu i korzystać z reguł Feynmanna (ab definitio rachunek zaburzeń — z propagatorów swobodnych i kilku oddziaływań (ruch głównie niezaburzony)). Dla stanów związanych taka procedura nie znajduje zastosowania w przypadku asymptotycznej swobody (duże g dla małych przekazów pędów).

2. Korzystać z formalizmu hamiltonowskiego, korzystając z metod mechaniki kwantowej, ale za cenę znalezienia odpowiedzi na pytanie jak usunąć problemy:

   - Wyróżnienie układu odniesienia przez obcięcie w hamiltonianie
   - Zależność wyników od skali obcięcia Δ

W opisie za pomocą diagramów Feynmanna (lagranżowskich) umiemy sobie radzić z zależnością od regularyzacji wprowadzoną przy usuwaniu nieskończoności pojawiających się w teorii; mówimy, że odpowiednie parametry teorii, które normalnie (w teorii klasycznej na przykład) nazywamy ładunkiem czy masą, to nie są fizyczne (mierzalne w doświadczeniu) wielkości. Nieskończoności daje się włożyć w redefinicję masy, stałej sprzężenia, pól itp. (renormalizację masy i stałej sprzężenia).

Mamy nadzieję, że w podejściu hamiltonowskim da się zdefiniować całą teorię na podobnych zasadach, ale powstaje pytanie jak to zrobić. Z punktu widzenia podejścia hamiltonowskiego renormalizację można rozumieć jako dodefiniowanie hamiltonianu (który zadany za pomocą kwantyzacji zawiera nieskończoności).

Rozbieżności w poprawce do energii

Wszystkie wyrażenia typu $e^{i\mathtt{H}t}a^\dagger \dots a^\dagger e^{-i\mathtt{H}t}$ są rozbieżne.

Możemy dla przykładu spróbować znajdować stany własne hamiltonianu rząd po rzędzie w rachunku zaburzeń, startując od stanów $|\mathbf{k}\rangle$ — czyli od cząstek nieoddziałujących (swobodnych). Będziemy chcieli wyliczyć stany własne $|s\rangle$ *pełnego* hamiltonianu, zakładając że oddziaływanie jest małą poprawką do hamiltonianu swobodnego

$$\mathtt{H}|s\rangle = E|s\rangle$$

gdzie $|s\rangle$ znajdujemy w rachunku zaburzeń

$$|s\rangle = |\mathbf{k}\rangle + \underbrace{g|1\rangle + g^2|2\rangle + \dots}_{\text{poprawki}}$$

W rachunku zaburzeń dla stanów związanych

$$g|1\rangle = \sum_n{}' \frac{1}{E_k - E_n}\mathtt{H}_I|n\rangle$$
$$\Delta E^{(1)} = \frac{\langle\mathbf{k}|\mathtt{H}_I|\mathbf{k}\rangle}{\langle\mathbf{k}|\mathbf{k}\rangle} \equiv 0$$

Spróbujmy obliczyć poprawkę do energii drugiego rzędu (w stałej sprzężenia).

$$\Delta E^{(2)}\langle\mathbf{k}|\mathbf{k}\rangle = \langle\mathbf{k}|\mathtt{H}_I \frac{1}{E_k - \mathtt{H}_0}\mathtt{H}_I|\mathbf{k}\rangle \tag{2.36}$$

Obliczymy teraz potrzebne elementy macierzowe. Człony które dawały nieskończoność w normie stanu $\mathtt{H}_I|0\rangle$, dają wkład nieskończony, taki sam jak w poprawce do energii próżni, i ten wkład po prostu odejmujemy. Pozostaje analiza członów „związanych" z cząstką k (rys. 2.5). Będziemy wypisywać tylko człon oddziaływania „pod całką".

Komutujemy z lewej strony $a_{\mathbf{k}}$ z operatorami kreacji, a z prawej $a^\dagger_{\mathbf{k}}$ z operatorami anihilacji. Widać, że przeżyją tylko te składniki, w których po lewej są tylko operatory anihilacji, a po prawej operatory kreacji. Z komutowania jedynego operatora anihilacji a_3 (operatora kreacji $a^\dagger_{\bar{3}}$) po lewej (prawej) stronie z operatorem $a_{\mathbf{k}}$ ($a^\dagger_{\mathbf{k}}$) pochodzącym ze stanu $|\mathbf{k}\rangle$ dostajemy $\delta_{3\mathbf{k}}$ oraz $\delta_{\bar{3}\mathbf{k}}$, odpowiednio:

$$\begin{aligned}\langle 0|a_{\mathbf{k}}\left(a_1^\dagger a_2^\dagger a_3 + a_3^\dagger a_2 a_3\right)\tfrac{1}{E_k - \mathtt{H}_0}\left(a_{\bar{1}}^\dagger a_{\bar{2}}^\dagger a_{\bar{3}} + a_{\bar{3}}^\dagger a_{\bar{2}} a_{\bar{3}}\right)a^\dagger_{\mathbf{k}}|0\rangle &= \\ &=\delta_{3\mathbf{k}}\delta_{\bar{3}\mathbf{k}}\langle 0|a_2 a_1 \frac{1}{E_k - E_0} a_{\bar{1}}^\dagger a_{\bar{2}}^\dagger|0\rangle = \\ &=\delta_{3\mathbf{k}}\delta_{\bar{3}\mathbf{k}}\langle 0|a_2 a_1 a_{\bar{1}}^\dagger a_{\bar{2}}^\dagger|0\rangle \frac{1}{E_k - E_{\bar{1}} - E_{\bar{2}}} =\end{aligned}$$

Komutujemy operatory tak, aby operatory anihilacji zadziałały na próżnię, otrzymując

$$\langle 0|a_2 a_1 a_{\bar{1}}^\dagger a_{\bar{2}}^\dagger|0\rangle = \langle 0|\left(\delta_{1\bar{1}}\delta_{2\bar{2}} + \delta_{1\bar{2}}\delta_{2\bar{1}}\right)|0\rangle$$

Obie pary delt (oba składniki) dają ten sam wkład.

Notacja. • $\delta_{12} = (2\pi)^3\, 2E_k \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$ — otrzymana z komutatora operatora anihilacji i kreacji delta niezmiennicza lorentzowsko.

• $\bar{\delta}(1-2) = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$ — pojawiająca się pod całką delta fourierowska.

Obliczamy poprawkę do energii $\Delta E^{(2)}$ w drugim rzędzie rachunku zaburzeń. Po wstawieniu otrzymanego wyniku na element macierzowy do wzoru (2.36) dostajemy:

$$\Delta E^{(1)} \langle \mathbf{k} | \mathbf{k} \rangle = \left(\frac{g}{2}\right)^2 \int [\,1\,2\,3\,]\,[\,\tilde{1}\,\tilde{2}\,\tilde{3}\,]\; 2\delta_{3\mathbf{k}} \delta_{\tilde{3}\mathbf{k}}\, \delta_{1\tilde{1}} \delta_{2\tilde{2}} \frac{1}{E_k - E_{\tilde{1}} - E_{\tilde{2}}} \times$$
$$\times\, \bar{\delta}(1+2-3)\, \bar{\delta}(\tilde{1} + \tilde{2} - \tilde{3}) =$$

Odcałkowujemy po pędach 3 i $\tilde{3}$, oraz po pędach $\tilde{1}$ i $\tilde{2}$

$$\Delta E^{(1)} \langle \mathbf{k} | \mathbf{k} \rangle = \frac{g^2}{2} \int [\,1\,2\,] \frac{1}{E_k - E_1 - E_2} \bar{\delta}(1+2-\mathbf{k}) \bar{\delta}(\mathbf{k}) \tag{2.37}$$

Z normalizacji stanu $|\mathbf{k}\rangle$ mamy, że

$$\bar{\delta}(\mathbf{k}) = \frac{\langle \mathbf{k} | \mathbf{k} \rangle}{2E_k}$$

Korzystając z tego wzoru wyodrębniamy $\langle \mathbf{k} | \mathbf{k} \rangle$, i dostajemy następujący wzór na poprawkę do energii (w drugim rzędzie rachunku zaburzeń)

$$\Delta E^{(2)} = \frac{g^2}{2} \int \frac{[\,1\,2\,]}{2E_k} \frac{1}{E_k - E_k i1 - E_k i2} \bar{\delta}\left(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}\right) =$$
$$= \frac{g^2}{4E_k} \int \frac{d^3k_1}{2E_k i1} \frac{d^3k_2}{2E_k i2} \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{1}{E_k - E_k i1 - E_k i2} (2\pi)^3 \delta^3\left(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}\right) =$$

Odcałkowujemy po d^3k_2. Wprowadzamy oznaczenie $\mathbf{q} := \mathbf{k}_1$

$$\Delta E^{(2)} = \frac{g^2}{16 E_k \pi^3} \int \frac{d^3q}{E_q E_{k-q}} \frac{1}{E_k - E_q - E_{k-q}}$$

Zobaczmy jak się zachowuje ta całka. Dla pól bezmasowych (dla $m = 0$) lub bardzo dużych pędów mamy, że energia cząstki jest proporcjonalna do jej pędu: $E_q \approx |\mathbf{q}|$. Jeśli pęd stanu, z którego startujemy jest mały ($|\mathbf{k}| \to 0$), albo rozpatrujemy pędy dużo większe od pędu stanu dla którego liczymy poprawkę do energii, czyli dla $|\mathbf{q}| \gg |\mathbf{k}|$, to

$$E_q \approx |\mathbf{q}|$$
$$E_{k-q} \approx |\mathbf{k} - \mathbf{q}| \xrightarrow[|\mathbf{k}| \to 0]{|\mathbf{q}| \gg |\mathbf{k}|} |\mathbf{q}|$$

Zatem otrzymujemy następujący wzór na poprawkę do energii — przy założeniu, że pędy $\mathbf{q}$ po którym całkujemy jest duży w porównaniu z $\mathbf{k}$:

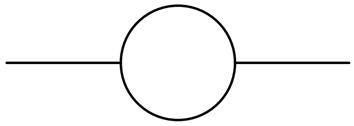
$$\Delta E^{(2)}_{\substack{|\mathbf{k}| \to 0 \\ \mu = 0}} = -\frac{g^2}{2E_k (4\pi)^3} \int \frac{d^3q}{\mathbf{q}^2 2 |\mathbf{q}|} =$$

. Przechodzimy do współrzędnych sferycznych i odcałkowujemy po kątach

$$\Delta E^{(2)}_{\substack{|\mathbf{k}| \to 0 \\ \mu = 0}} = -\frac{g^2}{4E_k (4\pi)^3} 4\pi \int_0^\infty \frac{dq}{q} \sim \frac{g^2}{E_k} \ln \frac{\infty}{0}.$$

Jeśli zastosujemy obcięcie w energiach, zastępując górną granicę całkowania ∞ przez Δ, oraz pamiętając o tym, że nasze rozważania dotyczyły dużych (w porównaniu z masą) pędów (stosowaliśmy wzory dla $m = 0$) — zatem należy zastąpić dolną granicę całkowania 0 przez μ, otrzymujemy

$$\Delta E^{(1)} \sim \int_\mu^\Delta \frac{dq}{q} \sim \ln \frac{\Delta}{\mu}$$



$\sim \ln \Delta$

Rysunek 2.5: Poprawka do energii w pierwszym rzędzie φ^3 — poprawka jednopętlowa

Ta poprawka nie jest bynajmniej poprawką do masy μ, tylko rozbieżną funkcją $\mathbf{k}$. Widzimy już, że hamiltonian „goły” (niezregularyzowany) zadany przez

$$\mathtt{H} = \int [\,k\,]\, E_k a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \frac{g}{2}\int [\,1\,2\,3\,] \left(a_1^\dagger a_2^\dagger a_3 + \text{ h.c.}\right) \delta(1+2-3) + \\ + \frac{g}{6}\int [\,1\,2\,3\,] \left(a_1^\dagger a_2^\dagger a_3^\dagger + \text{ h.c.}\right) \delta(1+2+3) +$$

jest źle zdefiniowany jako operator w przestrzeni Hilberta. Działając na stanach w tej przestrzeni może wyprowadzać je z niej. Wprowadziliśmy obcięcie Δ na energie wszystkich cząstek w teorii

$$\mathtt{H}_\Delta = \int\limits_{\mathrm{V}} |\mathbf{k}| < \Delta [\,k\,]\, E_k a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \frac{g}{2}\int\limits_{\mathrm{V}} |\mathbf{k}_i| < \Delta [\,1\,2\,3\,] \left(a_1^\dagger a_2^\dagger a_3 + \text{ h.c.}\right) \delta(1+2-3) + \\ + \frac{g}{6}\int\limits_{\mathrm{V}} |\mathbf{k}_i| < \Delta [\,1\,2\,3\,] \left(a_1^\dagger a_2^\dagger a_3^\dagger + \text{ h.c.}\right) \delta(1+2+3) \tag{2.38}$$

$\mathtt{H}_\Delta$ prowadzi do wyników rozbieżnych, gdy $\Delta \to \infty$.

Problemy:

1. Unieważnienie rachunku zaburzeń gdy $\Delta \to \infty$, dla ustalonej, dowolnie małej stałej sprzężenia (wielkości oddziaływania) g.

2. Δ pamięta układ odniesienia (wyniki wyróżniają układ odniesienia). Zastosowanie obcięcia na wielkość nie będącą relatywistycznie niezmienniczą (energia jest *składową* czterowektora) psuje lorentzowką współzmienniczość teorii.

3. Nie znamy stanu podstawowego $\big|\Omega\big\rangle$ (stanu o najniższej energii) w pełnej teorii; nie wiemy od czego zacząć rachunki

Porównanie z podejściem za pomocą diagramów Feynmanna (formalizm lagranżowski)

W przypadku rachunku zaburzeń dla macierzy rozpraszania diagramy Feynmanna z regularyzacją wymiarową i minimalnym odjęciem zdaje egzamin. Rachunek jest jawnie lorentzowsko niezmienniczy w każdym rzędzie rachunku zaburzeń. Wyniki są niezależne od wyboru cechowania i od wyboru warunku renormalizacji z dokładnością do rzędu w którym prowadzimy obliczenia.

W przypadku stanów związanych napotykamy trudności z tego powodu, że rachunek przestaje być perturbacyjny. Stan wokół którego wyliczamy poprawki w rachunku zaburzeń nie może zostać wyliczony w ramach tego rachunku. W przypadku teorii rozpraszania rozwijamy wokół stanu próżni cząstek swobodnych, w przypadku atomu wodoru wokół znanego rozwiązania z mechaniki kwantowej — które jest nieperturbacyjne.

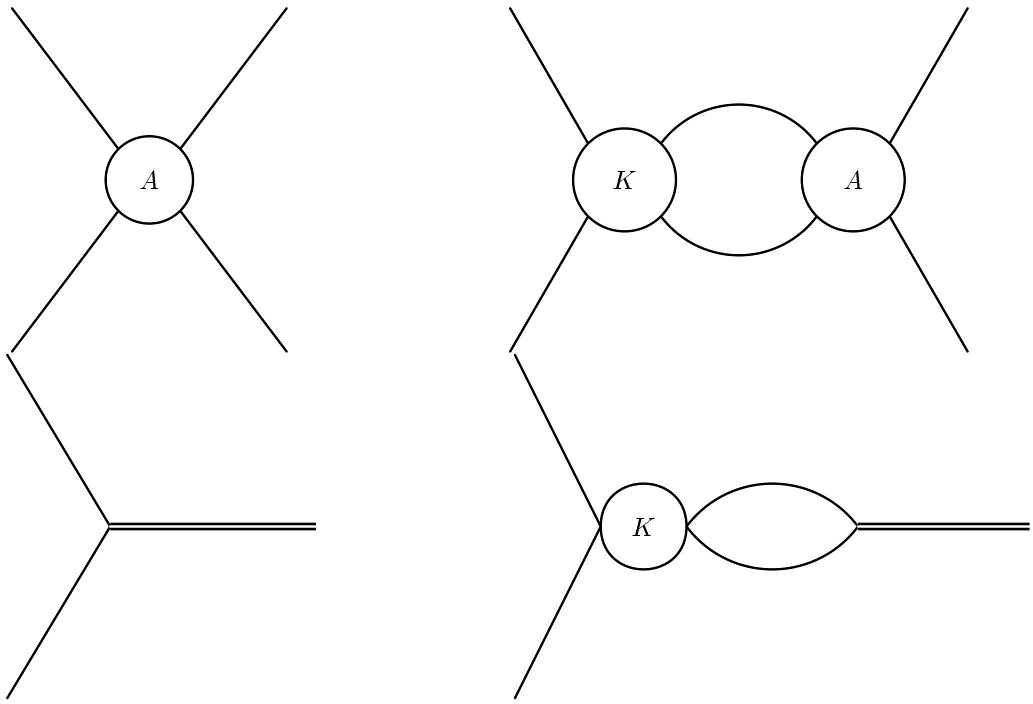
Mimo wielu lat istnienia QCD, wciąż istnieją kłopoty ze stanami związanymi kwarków i gluonów. Do wyliczania stanów związanych w formalizmie lagranżowskim (całki po drogach) możemy skorzystać z „definicji" funkcji falowej przy pomocy formalizmu teorii rozpraszania. Wydzielamy z funkcji Greena część i nazywamy ją funkcją falową odpowiedniego stanu.

$$\begin{gathered}
\langle 0|\mathrm{T}\big(\varphi(x_1)\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_{n-1})\varphi(x_n)\big)|0\rangle \qquad \text{dzielimy na dwie części} \\
\langle 0|\mathrm{T}\big(\varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots \;\Big|\; \varphi(x_{n-1})\varphi(x_n)\big)|0\rangle \qquad \text{dla } x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-2}^0 \ll x_{n-1}^0, x_n^0 \\
\langle 0|\mathrm{T}\big(\varphi(x_1)\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_{n-2})\big)|n\rangle \underbrace{\langle n|\mathrm{T}\big(\varphi(x_{n-1})\varphi(x_n)\big)|0\rangle}_{\text{amplituda B–S}}
\end{gathered}$$

Wyodrębniamy wyrażenie zdominowane przez biegun stanu związanego $|n\rangle$ i nazywamy funkcją falową tego stanu

$$\psi_n(x_1, x_2) := \langle n|\mathrm{T}\big(\varphi(x_1)\varphi(x_2)\big)|0\rangle.$$

Równanie Bethe–Salpetera (patrz rys. 2.6) określa sposób wyliczania $\psi_n(x_1, x_2)$ w formalizmie lagranżowskim. x_1 i x_2 mogą mieć różne czasy.



Rysunek 2.6: Diagramatyczne przedstawienie równania Bethe–Salpetera jako części zbioru równań Dysona–Schwingera

Stany związane w tym rachunku określone są przez jądro całkowe K. Niestety w przypadku QCD nie wiadomo jak systematycznie obliczyć funkcję K i propagatory (dwupunktowe funkcje Greena).

Wnioski z diagramów Feynmanna (poprawki do swobodnej propagacji) stosują się tylko, gdy mamy małe poprawki, słabe sprzężenie, i nie stosują się do wiązania kwarków i gluonów w QCD.

W sformułowaniu hamiltonowskim, a priori, powinno dać się obliczać procesy rozpraszania w rachunku zaburzeń dla słabych oddziaływań (test teorii), zaś problem stanów związanych jest dobrze postawiony równaniem Schrödingera $\mathtt{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$, o ile możemy podać dobry operator $\mathtt{H}$. Zatem jeśli chcemy rozwiązywać problemy zawierające stany związane, to wygodnie posługiwać się formalizmem hamiltonowskim, o ile uda się przezwyciężyć podane w tym rozdziale trudności.

Podsumowanie:

$$\mathcal{L} \quad \longrightarrow \quad \mathtt{H} \quad \longrightarrow \quad \mathtt{H}_\Delta \quad \longrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{c}\text{wyniki zależą od } \Delta \\ |\Omega\rangle = \,?\end{array}}$$

Rozdział 3

Formy dynamiki według Diraca

Zanim zaczniemy konstruować hamiltoniany musimy zdecydować się na formę dynamiki (jak zdefiniować „czas” – parametr ewolucji hamiltonowskiej). Nie istnieje tylko jedna forma dynamiki — „czas” mozna wybierać różnie, i badać różne „hamiltoniany”.

Różne sposoby wyboru „hamiltonianu” przedstawione zostały po raz pierwszy przez P. A. M. Diraca w artykule „Forms of Relativistic Dynamics”, Reviews of Modern Physics, vol. 21, strona 392.

Hamiltonian `H` to jeden z generatorów grupy Poincaré. Dirac w swoim artykule nazywa „hamiltonianami” skomplikowane generatory grupy Poincare w danej reprezentacji.

Grupa Poincaré jest grupą Liego. Każdy jej element można zapisać za pomocą generatorów w postaci

$$e^{\alpha G} = g(\alpha),$$

gdzie G oznacza generator odpowiedniej jednowymiarowej podgrupy, zaś $g(\alpha)$ oznacza element grupy. Nie rozważamy symetrii dyskretnych — odbić w czasie i przestrzeni. Te transformacje nie były rozważane przez Diraca w klasyfikowaniu form dynamiki.

Grupa Poincaré składa się z właściwej grupy Lorentza (obroty i pchnięcia), oraz z translacji (przesunięć). Dowolny element grupy Poincare można zapisać za pomocą generatorów:

$$G \ni g = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu} - i\epsilon_\mu P^\mu\right). \tag{3.1}$$

Operatory $M^{\mu\nu}$ są generatorami transformacji Lorentza (są to generatory obrotów i pchnięć). Operatory P^μ generują przesunięcia. Generatorów tych jest razem 10.

Grupa Poincare ma 10 generatorów, które można podzielić na grupy w następujący sposób

- P^0 — translacja w czasie
- P^i — translacja w przestrzeni
- $J^i = \varepsilon^{ijk}M^{jk}$ — obroty
- $K^i = M^{0i}$ — pchnięcia

Te generatory muszą spełniać reguły komutacji

$$[P^\mu, P^\nu] = 0 \tag{3.2a}$$
$$\left[M^{\mu\nu}, P^\lambda\right] = i\left(P^\mu g^{\nu\lambda} - P^\nu g^{\mu\lambda}\right) \tag{3.2b}$$
$$\left[M^{\kappa\lambda}, M^{\mu\nu}\right] = i\left(g^{\lambda\mu}M^{\kappa\nu} - g^{\lambda\nu}M^{\kappa\mu} + g^{\kappa\nu}M^{\lambda\mu} - g^{\kappa\mu}M^{\lambda\nu}\right) \tag{3.2c}$$

Według Diraca relatywistyczna teoria kwantowa polega na konstrukcji reprezentacji tych reguł komutacyjnych (rozwiązania układu równań (3.2)).

Wiemy że w standardowym sformułowaniu operatory P^i, J^i są niezależne od oddziaływania, to znaczy wyglądają tak samo w teorii z oddziaływaniem jak w teorii swobodnej (w/g nomenklatury

Diraca: operatory proste). Dla innej reprezentacji tych reguł komutacyjnych (innej formy dynamiki) operatory niezależne od oddziaływania mogą być inne; w szczególności może być ich więcej.

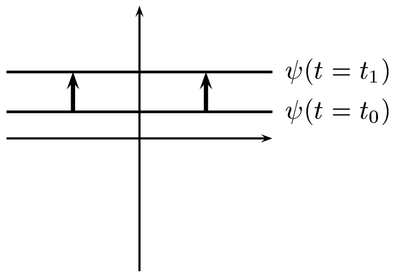
Trudności z rozwiązaniem tego układu równań:

- $[P^\mu, P^\nu] = 0$ łatwo spełnić.
- Równanie na $\left[M^{\mu\nu}, P^\lambda\right]$ jest liniowe w $M^{\mu\nu}$. Możemy dopasować $M^{\mu\nu}$ do P^μ.
- $\left[M^{\kappa\lambda}, M^{\mu\nu}\right]$ kwadratowe w $M^{\mu\nu}$. Trudne do rozwiązania.

3.1 Trzy formy dynamiki

.

3.1.1 Dynamika równoczasowa



Rysunek 3.1: Dynamika równoczasowa

Dynamika równoczasowa (*ang.* equal time) to najbardziej znana, klasyczna forma dynamiki. Wartości stanu układu wyliczmy w hiperpłaszczyznach stałego czasu. Operator ewolucji (hamiltonian) przeprowadza układ z jednej chwili czasu do drugiej. Widać, że pchnięcia (które zmieniają pojęcie równoczasowości) nie będą symetriami kinematycznymi. W nomenklaturze Diraca tę formę dynamiki nazywamy natychmiastową (*ang.* instant form). Będziemy stosowali oznaczenie RC (od równoczasowa).

Generatory:

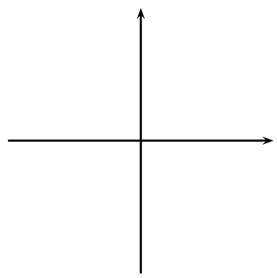
- niezależne od $\mathtt{H}_I$: $\mathbf{P}, \mathbf{J}$ — **6**. operatorów. Są to operatory kinematyczne w tej formie dynamiki (tzn. są takie same jak dla teorii swobodnej: $g = 0$).
- zależne od $\mathtt{H}_I$: $P^0 = E, \mathbf{K}$ — **4**. operatory. Są to operatory dynamiczne w tej formie dynamiki (tzn. zawierają człony zależne od g). Trzeba je wyliczać w rachunku zaburzeń. Jeśli $\mathtt{H}_I$ zawiera człony zmieniające liczbę cząstek, to operatory dynamiczne też mogą zmieniać liczbę cząstek.

Jest to standardowa, najczęściej używana forma dynamiki. Ponieważ operatory pędu $\mathbf{P}$ nie zależą od oddziaływania, zawsze możemy powiedzieć, co to jest środek masy ($\mathbf{P}$ dają nam środek masy). Operatory momentu pędu $\mathbf{J}$ i energii $E = P^0$ dają nam spektroskopię.

3.1.2 Dynamika punktowa

Dynamika punktowa (w/g Diraca: point form) to jedna z rzadziej używanych form dynamiki. Wartości stanu układu wyliczmy w hiperpłaszczyznach stałego czasu własnego liczonego od konkretnego zdarzenia. Operator ewolucji przeprowadza stan z jedngo czasu własnego do drugiego. Widać, że ta forma dynamiki wyróżnia punkt w przestrzeni, zatem przesunięcia (translacje) nie będą symetriami kinematycznymi.

Generatory:



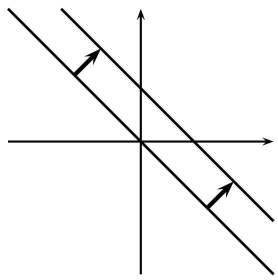
Rysunek 3.2: Dynamika punktowa

- niezależne od $\mathtt{H}_I$: $\mathbf{J}, \mathbf{K}$ — **6**
- zależne od $\mathtt{H}_I$: $\mathbf{P}, E$ — **4**

Operatory pędu **P** są zależne od oddziaływania — w tej formie dynamiki mamy kłopoty ze zbudowaniem wielkości niezmienniczych względem translacji (przesunięć). Dynamika jest zależna od punktu.

Operatory **K** są kinematyczne, co daje nam możliwość boostowania stanów **bez** rozwiązywania problemów dynamicznych. Jeśli znamy rozwiązanie w spoczynku, to znamy rozwiązanie w układzie poruszającym się z dowolną prędkością (ale przechodzącego w $\tau = 0$ przez punkt początkowy, charakterystyczny dla tej formy dynamiki).

3.1.3 Dynamika na froncie świetlnym



Rysunek 3.3: Dynamika na froncie świetlnym

Tę formę dynamiki nazywamy dynamiką na froncie świetlnym (*ang.* light front), bo powierzchnia stałej fazy fali elektromagnetycznej poruszającej się w przestrzeni jest powierzchnią „na której definiujemy stany”. Hamiltonian przeprowadza układ z jednej powierzchni frontu świetlnego (hiperpowierzchni stałego x^+) do drugiej. Widać, że obroty wzdłuż osi x i y, które nie przeprowadzają powierzchni frontu w siebie, mogą dawać symetrie dynamiczne (niekinematyczne). W nomenklaturze Diraca tę formę dynamiki nazywamy frontową (*ang.* front form). Będzimy stosowali oznaczemie FŚ (od frontu świetlnego).

Generatory:

- niezależne od $\mathtt{H}_I$: $P^+, \mathbf{P}^\perp, M^{+\perp}, J^3, M^{+-}$ — **7** (jeden więcej niż w innych formach dynamiki).
- zależne od $\mathtt{H}_I$: $P^-, M^{-\perp}$ — **3**.

gdzie odpowiednie generatory zdfiniowane są następująco ($i = 1, 2, 3$):

$$M^{0i} = K^i \tag{3.3a}$$

$$M^{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk} J^k \tag{3.3b}$$

$$M^{\pm} = K^i \pm \frac{1}{3}\varepsilon^{3ik} J^k \tag{3.3c}$$

Zaletą stosowania tej formy dynamiki jest jedna symetria [kinematyczna] więcej (generator pchnięcia wzdłuż frontu jest niezależny od $\mathtt{H}_I$). Mamy możliwość powiedzenia, co to środek masy. Dzięki kinematycznemu operatorowi pchnięcia możemy łączyć stany o różnych prędkościach. Trudnością konstrukcji jest konieczność dobrej znajomości STW i rozumienia ograniczeń formy równoczasowej. Dokładniejsze porównanie form RC i FŚ znajduje się w następnym rozdziale.

3.2 Symetrie niezależne od oddziaływania w różnych formach dynamiki

W tym rozdziale pokażemy, co to znaczy, że generator transformacji Poincare jest dynamiczny (zależy od oddziaływania). Znajdziemy te operatory w sformułowaniu równoczasowym i frontowym, które są kinematyczne (proste), oraz te które są dynamiczne (zależne od oddziaływania). Generatorom symetrii odpowiadają na mocy twierdzenia Nöther odpowiednie zachowane „ładunki".

Weźmy dla przykładu rozważany przez nas lagranżjan teorii φ^3

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^2\right) - \frac{g}{3!}\varphi^3$$

Zastosujemy twierdzenie Nöther dla przesunięć i obrotów. Aby grupa była grupą symetrii problemu, działanie tej symetrii nie może zmieniać równań ruchu. Niezmienniczość lagranżjanu względem translacji (przesunięć) oznacza że lagranżjan nie wyróżnia punktu w przestrzeni. Niezmienniczość względem obrotów oznacza, że nie wyróżnia kierunków w przestrzeni.

To które generatory są kinematyczne, a które kinematyczne nie zależy od użytej teorii (wziętego do obliczeń lagranżjanu $\mathscr{L}$), a tylko od formy dynamiki.

3.2.1 Generatory grupy translacji w ET i LF

Stosujemy twierdzenie Nöther do grupy translacji. Lagranżjan nie zależy jawnie od położeń x^μ, zależy od nich tylko poprzez pola. Zatem

$$0 = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x^\mu} = \frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} + \frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\partial^\nu\varphi}\frac{\partial\partial^\nu\varphi}{\partial x^\mu}$$

Pochodną lagranżjanu po polu możemy wyrazić przez pochodną z lagranżjanu po pochodnej pola przy pomocy równań Eulera–Lagrange'a.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x^\mu} &= \frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} + \frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\partial^\nu\varphi}\frac{\partial\partial^\nu\varphi}{\partial x^\mu} = \\
&= \left[\partial^\nu\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\partial^\nu\varphi}\right]\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} + \frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\partial^\nu\varphi}\partial^\nu\partial_\mu\varphi = \\
&= \partial^\nu\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial^\nu\varphi}\partial_\mu\varphi\right]
\end{aligned}$$

Przenosząc $\partial_\mu\mathscr{L}$ na prawą stronę otrzymujemy zasadę zachowania

$$0 = \partial_\mu T^{\mu\nu},$$

gdzie $T^{\mu\nu}$ jest tensorem energii—pędu

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\varphi}\partial^\nu\varphi - g^{\mu\nu}\mathscr{L} \tag{3.4}$$

Całkując równanie $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ po obszarze czasoprzestrzeni zawartym pomiędzy hiperpłaszczyznami stałego czasu $t = t_1$ i $t = t_2$, otrzymujemy

$$\int_{t_1}^{t_2} d^4x\, \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0,$$
$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \partial_0 T^{0\nu} - \partial_i T^{i\nu}$$

Całkujemy po czasie, a całkę z dywergencji zamieniamy na całkę strumienia przez brzeg. Zakładamy, że na brzegu (w przestrzennej nieskończoności) pole znika lub znoszą się warunki brzegowe

$$\underset{t=t_2}{\int} d^3x\, T^{0\nu} - \underset{t=t_1}{\int} d^3 T^{0\nu} = 0$$

Podsumowując

$$0 = \partial_\mu T^{\mu\nu} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\big[\underset{t=const}{\int} d^3x\, T^{0\nu} = P^\nu\big] = 0$$

Dostajemy, dla lagranżjanu teorii φ^3, następujące wyrażenie na tensor energii–pędu.

$$T^{00} = \frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\dot\varphi}\dot\varphi - \mathscr{L} = \mathscr{H} \qquad P^0 = \mathtt{H} = \int d^3x\, \mathscr{H} \tag{3.5}$$

$$T^{0i} = \dot\varphi\, \partial^i\varphi \qquad P^i = \mathbf{P} = \int d^3x\, \vec{\mathcal{P}} \tag{3.6}$$

Powyższe wzory zostały wyprowadzone dla dynamiki równoczasowej. Generator przesunięć (pęd) dla dowolnej formy dynamiki ma postać

$$P^\mu = \int d\sigma_\nu\, T^{\nu\mu}$$

gdzie $d\sigma_\nu$ oznacza element objętości hiperpowierzchni, na których określamy stany; np. dla $\nu = 0$ (odpowiadającego sformułowaniu równoczasowemu dynamiki) jest to $d\sigma_0 = d^3x$, natomiast dla $\nu = +$ (odpowiadającego dynamice na froncie świetlnym) jest to $d\sigma_+ = \frac{1}{2}dx^-\, d^2x^\perp$.

Na froncie świetlnym:

$$P^- = \frac{1}{2}\int dx^-\, d^2x^\perp\, T^{+-} \tag{3.7}$$

$$P^+ = \frac{1}{2}\int dx^-\, d^2x^\perp\, T^{++} \tag{3.8}$$

$$P^\perp = \frac{1}{2}\int dx^-\, d^2x^\perp\, T^{+\perp} \tag{3.9}$$

Z postaci $T^{\mu\nu}$ (3.4) wynika, że tylko w T^{00} pojawia się zależność od oddziaływania (gdy oddziaływanie nie zależy od pochodnych).

Uwaga:

$$\text{RC:} \quad \dot\varphi\partial^i\varphi \equiv \Pi\, \partial^i\varphi, \tag{3.10}$$

$$\text{FŚ:} \quad \partial^+\varphi\, \partial^i\varphi, \tag{3.11}$$

gdzie Π oznacza pęd kanonicznie sprzężony. W sformułowaniu równoczasowym, aby znać operator pędu, trzeba znać pędy kanoniczne — pochodne czasowe zależne od mas. W sformułowaniu na froncie świetlnym nie trzeba znać mas, bo wystarczy znać gradienty $\partial^+\varphi$ (patrz także wzór (3.14)).

Metryka na froncie świetlnym

$$g_{\mu\nu} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} + & - & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} + \\ - \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}, \qquad g^{\mu\nu} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} + & - & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} + \\ - \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}. \tag{3.12}$$

Iloczyn skalarny określony jest wzorem

$$ab = \frac{1}{2}a^+b^- + \frac{1}{2}a^-b^+ - \mathbf{a}^\perp\mathbf{b}^\perp. \tag{3.13}$$

Należy pamiętać, że

$$\partial^\pm = 2\frac{\partial}{\partial x^\pm}. \tag{3.14}$$

3.2.2 Generatory grupy Lorentza w formach RC i FŚ

Rozważmy teraz obroty. Wariacja $\mathscr{L}$ dla obrotów wymaga obliczenia zmiany $\mathscr{L}$, gdy zmiana x dana jest wzorem

$$\delta x^\mu = \omega^{\mu\nu} x_\nu,$$

gdzie tensor $\omega^{\mu\nu}$ jest tensorem antysymetrycznym. Z twierdzenia Nöther, analogicznie jak dla poprzedniego przypadku, dostajemy, że zachowany jest prąd

$$M^{\mu\nu} = \int d\sigma_\alpha \, \mathcal{M}^{\alpha\mu\nu}$$

gdzie, dla cząstek skalarnych,

$$\mathcal{M}^{\alpha\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(T^{\alpha\mu}x^\nu - T^{\alpha\nu}x^\mu\right).$$

Dla sformułowania równoczasowego,

$$M^{0i} = K^i = \int\limits_{t=x^0=0} d^3x \, \frac{1}{2}\left(T^{00}x^i - T^{0i}x^0\right) = \int\limits_{t=0} d^3x \, \frac{1}{2}\nabla^i \mathscr{H} \tag{3.15}$$

Czyli pchnięcia (boosty) zależą od oddziaływania, gdyż gęstośc hamiltonianu $\mathscr{H}$ zależy od oddziaływania. Zmiana układu odniesienia wiąże się ze zmianą liczby cząstek. Natomiast dla obrotów dostajemy

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}M^{ij} = J^k = \int\limits_{t=0} d^3x \, \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}T^{0i}x^j \tag{3.16}$$

Czyli obroty są wolne od oddziaływań — są operatorami kinematycznymi (w sformułowaniu równoczasowym).

Dla dynamiki na froncie świetlnym mamy:

$M^{+\perp}$ nie zależy od oddziaływania bo $g^{+\perp} = 0$.
J^3 — tak samo jak dla sformułowania równoczasowego.
$M^{-\perp}$ zawiera oddziaływanie.

Pozostaje sprawdzić M^{+-}. *Wybieramy* $x^+ = 0$ jako warunek początkowy

$$M^{+-} = \int\limits_{x^+=0} dx^- \, d^2x^\perp \, \left(T^{+-}x^+ - T^{++}x^-\right) = \int\limits_{x^+=0} dx^- \, d^2x^\perp \, T^{++}x^- \tag{3.17}$$

Ponieważ T^{++} nie zawiera oddziaływania, więc M^{+-} jest generatorem (dodatkowym) grupy Poincaré niezależnym od oddziaływania.

$M^{+\perp}$ — generuje odpowiedniki obrotów w układzie nieskończonego pędu. Operator J^3 jest znany z najczęściej używanego sformułowania równoczasowego. M^{+-} „zawiera” K^3 — boost z układu do układu (co pozwala nam np. przejść do opisu partonowego, w układzie nieskończonego pędu, wychodząc z układu środka masy).

$$M^{+-} = M^{0-} + M^{3-} = M^{00} - M^{03} + M^{30} - M^{33} = -2M^{03} = -2K^3, \tag{3.18}$$

gdzie skorzystalismy z antysymetrii $M^{\mu\nu}$: $M^{00} = M^{33} = 0$.

ET		LF	
+	przyzwyczajenie.	+	M^{+-}.
+	$\mathbf{J}$ — spektroskopia $\hat{\mathtt{H}}$.	+	model partonowy $\leftrightarrow$ układ spoczynkowy (model kwarków konstytuentnych).
−	$\mathbf{P} \neq 0$ nieosiągalne, bo operator pchnięcia $\mathbf{K}$ zależy od oddziaływania.	−	$J^{\perp}$ zależy od oddziaływania, więc nie ma łatwej spektroskopii.
−	$\vert\Omega\rangle = ?$.	+	$\mathtt{H}\vert 0\rangle = 0$.

Tabela 3.1: Porównanie sformułowania równoczasowego (RC) z dynamiką na froncie świetlnym (FŚ)

Filozofia: lepiej szukać znanej spektroskopii mając pchnięcia, niż nieznanych pchnięć mając obroty, kiedy szuka się opisu hadronów w układzie nieskończonego pędu (model partonowy).

Konkluzja:

Jeżeli nie rozumiemy fizyki lub matematyki w sformułowaniu FŚ, to nie rozumiemy fizyki lub matematyki w RC (+), i odwrotnie. Obecnie nie rozumiemy QCD w pełni w żadnej z form.

Rozdział 4

Teoria renormalizacji hamiltonianów

4.1 Wybór modelu do badania metod renormalizacji

4.1.1 Różne lagranżjany w kwantowej teorii pola

Chcemy mieć jak najprostszą teorię modelową do badania problemu renormalizacji, ale taką która ma własności renormalizacyjne takie jakie rzeczywiste, używane teorie. Najprostszą teorią modelową jest teoria rzeczywistego pola skalarnego. Zapiszmy ogólny lagranżjan modelowej teorii (teorii skalarnej)

$$\mathscr{L}_{\mathrm{S}} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^2\right) + V(\varphi) \tag{4.1}$$

Wypiszmy typowe lagranżjany i zobaczmy, jakie własności ma w nich oddziaływanie:

model Yukawy

$$\mathscr{L}_{\mathrm{Y}} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi\,\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^2\right) + \bar{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ - m\right)\psi - g\bar{\psi}\varphi\psi \tag{4.2}$$

elektrodynamika

$$\mathscr{L}_{\mathrm{ED}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \underbrace{\bar{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ - eA\!\!\!/ - m\right)\psi}_{=\bar{\psi}\left(iD\!\!\!\!/ - m\right)\psi} \tag{4.3}$$

chromodynamika

$$\mathscr{L}_{\mathrm{CD}} = -\frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{a\,\mu\nu} + \bar{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ - m\right)\psi - g\bar{\psi}A\!\!\!/^a T^a\psi \tag{4.4}$$

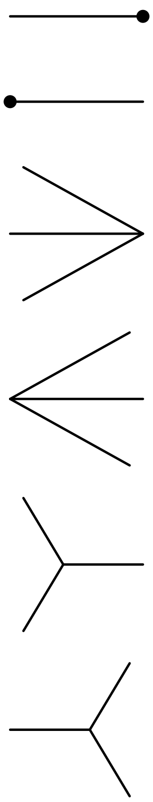
Model Standardowy

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\mathrm{SM}} = &-\frac{1}{4}F_{\mathrm{YM}}F_{\mathrm{YM}} + \bar{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ - m\right)\psi + \\ &-\bar{\psi}A\!\!\!/_+T^+\left(1+\gamma_5\right)\psi - \bar{\psi}A\!\!\!/_-T^-\left(1-\gamma_5\right)\psi + \\ &+\frac{1}{2}\left(D_\mu\varphi D^\mu\varphi - m^2\varphi^2\right) + V_{\mathrm{H}}(\varphi)\end{aligned} \tag{4.5}$$

Uwaga: W lagranżjanach chromodynamiki i Modelu Standardowego ψ oznacza wektor złożony z czterospinorów odpowiadających różnym fermionom, a m jest macierzą mas.

Widać zatem że typowy w kwantowych teoriach pola lagranżjan ma postać

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = &\text{ człon biliniowy dla bozonów}+ \\ &+\text{człon biliniowy dla fermionów}+ \\ &+\text{oddziaływanie}\end{aligned} \tag{4.6}$$



$a^\dagger \bar{\delta}(1)$

$a \bar{\delta}(1)$

$(a^\dagger)^3 \bar{\delta}(1+2+3)$

$(a)^3 \bar{\delta}(1+2+3)$

$(a^\dagger)^2 a \bar{\delta}(1+2-3)$

$a^\dagger (a)^2 \bar{\delta}(1+2-3)$

Rysunek 4.1: Diagramatyczne przedstawienie oddziaływań w hamiltonianie teorii φ^3

Człony biliniowe dają teorię cząstek swobodnych

Stabilne pole skalarne — teoria φ^4.

$$\mathscr{L} = \left(\partial_\mu \varphi \, \partial^\mu \varphi - \mu^2 \varphi^2\right) - \frac{g}{4!}\varphi^4 \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}\mathtt{H} = \int [\,k\,]\, E_k \, a_k^\dagger a_k + \frac{g}{4!}\int [\,1\,2\,3\,4\,]\, \bar{\delta}(p_{\text{in}} - p_{\text{out}}) \times \\ \times \left[a_1^\dagger a_2^\dagger a_3^\dagger a_4^\dagger + 4a_1^\dagger a_2^\dagger a_3^\dagger a_4 + 6a_1^\dagger a_2^\dagger a_3 a_4 + 4a_1^\dagger a_2 a_3 a_4 + a_1 a_2 a_3 a_4\right]\end{aligned} \tag{4.8}$$

4.1.2 Rozbieżności w kwantowych teoriach pola

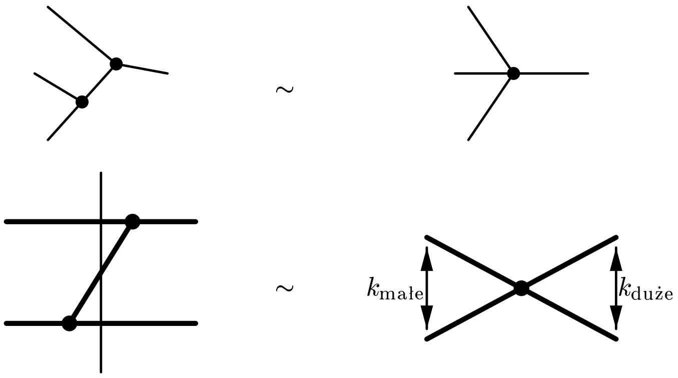
Porównajmy teorię φ^3 którą rozpatrywaliśmy do tej pory z trójcząstkowym oddziaływaniem spinor—skalar—spinor w teorii Yukawy (podobne do oddziaływań w teoriach zawierających oddziałujące fermiony).

$$\mathscr{L}_{\mathrm{S}} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \varphi \, \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2\right) - \frac{g}{3!}\varphi^3$$
$$\mathscr{L}_{\mathrm{Y}} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \varphi \, \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^2\right) + \bar{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ - m\right)\psi - g\bar{\psi}\varphi\psi$$

Hamiltonian w teorii φ^3

$$\mathtt{H} = \int [\,k\,]\, E_k \, a_k^\dagger a_k + \mathtt{H}_I$$
$$\mathtt{H}_I = \int [\,1\,2\,3\,]\, f(1\,2\,3) \bar{\delta}(1+2+3)\left[a_1^\dagger a_2^\dagger a_3 + \text{ h.c.}\right] + \text{reszta}$$

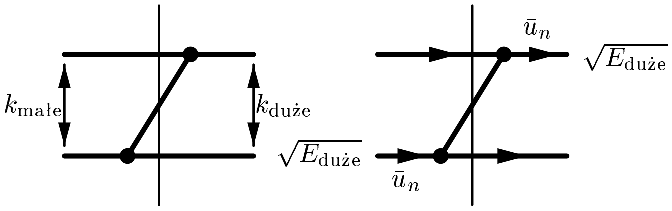
Nie słabnąca siła oddziaływania między stanami o dowolnie różnych energiach sprzęga wszystkie stopnie swobody w teorii i prowadzi do rozbieżności logarytmicznych.



mianownik energetyczny	bez mianowników energetycznych
$\dfrac{1}{E_{\text{pośrednie}} - E_{\text{zewnętrzne}}}$	nie słabnie z energią

Rysunek 4.2: Porównanie macierzy rozpraszania w φ^3 i oddziaływań w φ^4

φ^3	$\bar{\psi}\varphi\psi$
$f \equiv 1$	$f \equiv E$
$\varphi^3 \to 1$	$\bar{\psi}\varphi\psi \to \bar{u}_1 u_2 \sim \sqrt{\lvert\mathbf{k}_1\rvert\lvert\mathbf{k}_2\rvert}$



tak jak φ^4

Rysunek 4.3: Porównanie rozpraszania w φ^3 i w teorii Yukawy

4.2 Opis stosowanego modelu

4.2.1 Definicja modelu

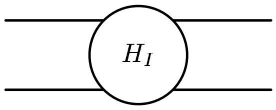
Przykład modelowy: φ^4 obcięte do przestrzeni dwu cząstek.
Hamiltonian teorii φ^4 ograniczony do potrzeb modelu.

$$\mathtt{H}_{\varphi^4} = \int [\,k\,]\, E_k\, a_k^\dagger a_k + g \int [\,1\,2\,3\,4\,]\, a_1^\dagger a_2^\dagger a_3 a_4 \delta(1+2-3-4) \tag{4.9}$$

$$\tag{4.10}$$

Hamiltonian modelowy obcięty do przestrzeni dwucząstkowej

$$\mathtt{H}_{\mathrm{model}} = \int [\,k\,]\, E_k\, a_k^\dagger a_k + g \int [\,1\,2\,3\,4\,]\, a_1^\dagger a_2^\dagger |0\rangle\langle 0| a_3 a_4 \delta(1+2-3-4) \tag{4.11}$$



Rysunek 4.4: Hamiltonian modelowy (obcięty do przestrzeni dwucząstkowej)

Własności: Hamiltonian obcięty do potrzeb modelu zachowuje liczbę cząstek. $\mathtt{H}_{\mathrm{model}}$ działa w przestrzeni dwucząstkowej.
Uwagi o modelu:

1. Model jest analogiczny do hamiltonianów w dynamice na froncie (FŚ), jak i równoczasowych (RC)
2. Rozbieżności w modelu mają charakter dostatecznie ogólny, aby wnioski znalazły zastosowanie w realistycznych teoriach

4.2.2 Porównanie form ET i LF

Całki niezmiennicze i delty Diraca

.
Zobaczmy jak wyglądają niezmiennicze całkowania w $D = 3$ wymiarach:

$$[\,k\,] = \frac{d^3k}{(2\pi)^3\, 2E_k}, \quad \text{zwykła forma RC,} \tag{4.12}$$

$$[\,k\,] = \frac{dk^+\, d^2k^\perp}{(2\pi)^2\, 2k^+} \qquad k^\pm = k^0 \pm k^3, \quad \text{forma frontowa.} \tag{4.13}$$

Zobaczmy jak wyglądają „niezmiennicze delty Diraca". Dla sformułowania równoczasowego postać delty otrzymaliśmy z niezmienniczej delty Diraca zawierającej wyrażenie lorentzowsko niezmienniczą wielkość $k^2 - m^2$

$$d^4k\, \delta(k^2 - m^2)\, \Theta(k^0)$$

Zobaczmy do czego prowadzi ten wzór przy całkowaniu po przestrzeni trójwymiarowej

$$\delta({k^0}^2 - \mathbf{k}^2 - m^2) = \frac{\delta\left(k^0 + \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}\right)}{2\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}} + \frac{\delta\left(k^0 - \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}\right)}{2\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}}$$

$$\delta(k^+k^- - {k^\perp}^2 - m^2) = \delta\left[k^- - \frac{{k^\perp}^2 + m^2}{k^+}\right]\frac{1}{k^+}$$

Zatem w sformułowaniu równoczasowym (RC) mamy

$$\delta({k^0}^2 - \mathbf{k}^2 - m^2)\,\Theta(k^0) = \frac{\delta\left(k^0 + \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}\right)}{2\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}}$$

Wprowadzenie funkcji Heaviside'a Θ (funkcji skoku jednostkowego) było potrzebne, aby wybrać rozwiązania z dodatnią (fizyczną) energią

$$\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} > 0 \;\rightarrow\; \Theta(k^0).$$

Tymczasem przy obliczeniach na froncie świetlnym (FŚ)

$$k^- = k^0 - k^3 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} - k^3 \geq 0$$

równość może zachodzić tylko dla $|\mathbf{k}| = \infty$, lub $m \equiv 0$ i $k^\perp \equiv 0$

$$k^+ = k^0 + k^3 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} + k^3 \geq 0$$

równość może zachodzić tylko dla $k^3 \rightarrow -\infty$, lub $m \equiv 0$, $k^3 < 0$ i $k^\perp \equiv 0$

Zatem, korzystając z faktu, że $dk^0\,dk^3 = \frac{1}{2}dk^+\,dk^-$ otrzymujemy

$$d^4k\,\delta(k^2 - m^2)\,\Theta(k^0) = \frac{d^3k}{2E_k} = \frac{dk^+\,d^2k^\perp}{2k^+}\Theta(k^+)$$

Porównajmy wyniki dla obu form dynamiki (RC i FŚ)

ET 3-wymiarowa przestrzeń pędów $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^n 3 \cdot m$. W mierze całkowania występuje masa.

LF połowa 3-wymiarowej przestrzeni pędów $k^\perp \in \mathbb{R}^n 2 \cdot m$, $k^+ \in \mathbb{R}_+ \cdot m$. W mierze całkowania nie ma masy.

Zobaczmy jak wyglądają transformaty Fouriera jedynki w sformułowniu równoczasowym (RC) i frontowym (FŚ) w $D = 3$ wymiarach

$$\text{RC:} \quad \int d^3x\, e^{ikx} = (2\pi)^3\delta^{(3)}(k) = \delta_{\text{RC}}(k) \tag{4.14}$$

$$\text{FŚ:} \quad \int dx^-\, d^2x^\perp\, e^{i\frac{1}{2}k^+x^- - ik^\perp x^\perp} = (2\pi)^2\delta^{(2)}(k^\perp)\,2(2\pi)\delta(k^+) = \delta_{\text{FŚ}}(k) \tag{4.15}$$

Struktura przestrzeni (dostepnych) pędów jest inna w sformułowaniu równoczasowym i frontowym. Wypiszmy podobieństwa i róznice RC i FŚ

- $k^\perp$ jest podobne w obu (RC i FŚ) formach.
- k^+ i k^3 są różne i różnica nie jest łatwa do zrozumienia $\equiv$ nie rozumiemy nie tylko różnicy $\equiv$ ani jednej z form nie rozumiemy w obecności oddziaływania.

Odpowiednikiem energii w sformułowaniu frontowym (FŚ) ($x^+ - 0$ jest

$$k^- = \frac{{k^\perp}^2}{k^+} + \frac{m^2}{k^+} = \frac{{k^\perp}^2 + m^2}{k^+}$$

Nierelatywistyczna E_k, a E_k dla LF

.

Nierelatywistyczna postać energii kinetycznej dana jest wzorem

$$E = \frac{\mathbf{k}^2}{2m}.$$

Energia „prostopadła” na froncie

$$E^{\perp}_{\mathrm{LF}} = \frac{{k^{\perp}}^2}{k^+} \sim \frac{{k^{\perp}}^2}{2m} \quad \text{jeśli} \quad k^+ \sim 2m;$$

wzór jest analogiczny, jeśli utożsamimy k^+ z nierelatywistyczną masą: $k^+ \sim 2m$.

Jeśli cząstki są bezmasowe ($m = 0$), tzn. $k^- = \frac{{k^{\perp}}^2}{k^+}$, to $\perp$ LF jest nierelatywistyczną teorią o ciągłym spektrum mas.

Analogia $k^+ \sim 2m$ jest trudna do zrozumienia; nie rozumiemy jej. Ale możemy przeanalizować dynamikę tylko dla jednej wartości k^+ (w nierelatywistycznej mechanice kwantowej stany o różnych masach należą do różnych przestrzeni Hilberta).

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{{k^{\perp}}^2 + m^2}{k^+ = 2m} = \frac{m}{2} + \frac{{k^{\perp}}^2}{2m} \\ E_k &= \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \simeq m + \frac{\mathbf{k}^2}{2m} + \cdots \approx m + \frac{\mathbf{k}^2}{2m} \xrightarrow{3\to 2} m + \frac{{k^{\perp}}^2}{2m}, \end{aligned}$$

gdzie $3 \to 2$ oznacza zmianę liczby wymiarów na 2, bo tylko 2 są $\perp$.
Wniosek:

$$E = \frac{{k^{\perp}}^2}{m} + m = (m^2 + k^2)\frac{1}{m}$$

obejmuje dwa przypadki:

1. Nierelatywistyczną teorię równoczasową (RC) z energią zadaną wzorem $E_k = m + \frac{\mathbf{k}^2}{2m}$, z redukcja z $D = 4$ wymiarów czasoprzestrzeni do $D = 3$ (czas plus poprzeczne składowe przestrzenne).

2. Dynamikę na froncie świetlnym (FŚ); energia dla ustalonego pędu podłużnego k^+.

Zapiszmy nasz hamiltonian dla tej postaci energii kinetycznej, dla przypadku $D = 2$ wymiarów (jeden wymiar przestrzeny i jeden czasowy) $E_k = \frac{1}{m}(m^2 + k^2)$. Ma on wtedy postać (po rozpisaniu E_k):

$$\begin{aligned} \mathtt{H} = &\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{1}{m}(m^2 + \mathbf{k}^2) a^\dagger_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} + \\ &- \frac{g}{m}\int [\, k_1 k_2 k_3 k_4 \,]\, \delta^{(2)}(k_1 + k_2 - k_3 - k_4) a^\dagger_{\mathbf{k}_1} a^\dagger_{\mathbf{k}_2} |0\rangle\langle 0| a_{\mathbf{k}_3} a_{\mathbf{k}_4} \end{aligned}$$

Zwróćmy uwagę na to, że

$$[a_{\mathbf{k}}, a^\dagger_{\mathbf{q}}] = (2\pi)^2 \delta^{(2)}(\mathbf{k} - \mathbf{q});$$

we wzorze na komutator operatorów kreacji i anihilacji **nie** występuje składowa podłużna k^+ pędu.

Chcemy się pozbyć niewygodnego m z mianownika we wzorze na `H` modelu. Będziemy się zatem posługiwali wielkością

$$\begin{aligned} M^2 = m\,\mathtt{H}_{\mathrm{model}} = &\underbrace{\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}(m^2 + \mathbf{k}^2) a^\dagger_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}}_{M_0^2} + \\ &\underbrace{-g\int [\,1\,2\,3\,4\,]\, \delta^{(2)}(1 + 2 - 3 - 4) a^\dagger_1 a^\dagger_2 |0\rangle\langle 0| a_3 a_4}_{M_I^2}. \end{aligned}$$

Przy tych oznaczeniach

$$M^2 = M_0^2 + M_I^2 \quad \neq (M_0 + M_I)^2$$

Od tej pory będziemy się posługiwać tylko powyższą formą, więc możemy wprowadzić następujące oznaczenia

$$H := M^2 \tag{4.16a}$$

$$H_0 := M_0^2 \tag{4.16b}$$

$$H_I := M_I^2 \tag{4.16c}$$

4.2.3 Norma stanu $\mathtt{H}_I\big|k_1 k_2\big\rangle$

W kwantowej teorii pola mieliśmy problemy związane z działaniem hamiltonianu oddziaływania. M. in. norma stanu uzyskanego przez zadziałanie hamiltonianem na stan próżni wychodziła nieskończona. Nasz model jest ograniczony do przestrzeni dwucząstkowej. Chcemy na jego podstawie wnioskować na temat metod używanych do renormalizacji kwantowej teorii pola. Musimy zatem zobaczyć, czy model nasz posiada nieskończoności tego samego typu co KTP.

Chcemy obliczyć normę stanu uzyskanego przez zadziałania hamiltonianem na stan dwucząstkowy (hamiltonian nasz z definicji zeruje się na stanie próżni)

$$\|\mathtt{H}_I\big|k_1 k_2\big\rangle\|^2 = ?$$

Stany, którymi się posługujemy, spełniają następujący warunek unormowania:

$$\|\big|k_1 k_2\big\rangle\|^2 = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) = \mathrm{V}^2 \quad (\text{dla } k_1 \neq k_2)$$

Obliczamy element macierzowy hamiltonianu oddziaływania w naszym (dwucząstkowym) modelu

$$\begin{aligned}
&\big\langle k_1' k_2'\big|\mathtt{H}_I^2\big|k_1 k_2\big\rangle = \\
&\quad = g^2 \int [\,\ddot{1}\ddot{2}\ddot{3}\ddot{4}\,][\,\dot{1}\dot{2}\dot{3}\dot{4}\,]\ \delta(\ddot{1}+\ddot{2}+\ddot{3}+\ddot{4})\ \delta(\dot{1}+\dot{2}+\dot{3}+\dot{4}) \times \\
&\qquad \times \big\langle 0\big|a_{1'} a_{2'} a^\dagger_{\ddot{1}} a^\dagger_{\ddot{2}}\big|0\big\rangle \big\langle 0\big|a_{\ddot{3}} a_{\ddot{4}} a^\dagger_{\dot{1}} a^\dagger_{\dot{2}}\big|0\big\rangle \big\langle 0\big|a_{\dot{3}} a_{\dot{4}} a^\dagger_{1} a^\dagger_{2}\big|0\big\rangle.
\end{aligned}$$

Komutujemy i całkujemy po deltach „komutacyjnych” korzystając z symetrii, co daje nam czynnik $8 = 2\cdot 2\cdot 2$,

$$\big\langle k_1' k_2'\big|\mathtt{H}_I^2\big|k_1 k_2\big\rangle = g^2\, 8 \int [\,\dot{1}\dot{2}\,]\ \delta(1'+2'-\dot{1}-\dot{2})\ \delta(\dot{1}+\dot{2}-1-2)$$

Zamieniamy następnie pędy całkowania na całkowanie po pędzie całkowitym i różnicy pędów: $P = \dot{1}+\dot{2}, q = \dot{1}-\dot{2}$,

$$\big\langle k_1' k_2'\big|\mathtt{H}_I^2\big|k_1 k_2\big\rangle = g^2\, 2 \int [\,qP\,]\ \delta(1'+2'-P)\ \delta(P-1-2).$$

Wykonujemy całkę po pędzie całkowitym P, otrzymując

$$\big\langle k_1' k_2'\big|\mathtt{H}_I^2\big|k_1 k_2\big\rangle = g^2\, 2 \int [\,q\,]\ \delta(1'+2'-1-2)$$

Ostatnia delta Diraca $\delta(1'+2'-1-2)$ nie zależy od pędu względnego q, i można ją wyciągnąć przed znak całki. Rozpoznajemy w niej iloczyn skalarny dwu stanów dwucząstkowych. Całka po q daje $\int d^2q^\perp = \infty$. Mówimy, że całka ta jest całką rozbieżną kwadratowo, gdyż wynik jest proporcjonalny do kwadratu parametru obcięcia $\propto \Delta^2$.

Zatem ostatecznie

$$\frac{\|\mathtt{H}_I\big|k_1 k_2\big\rangle\|^2}{\|\big|k_1 k_2\big\rangle\|^2} = \frac{g^2 2 \int [\,q\,]\,\mathrm{V}}{\mathrm{V}^2} == \frac{g^2}{2\pi^2}\frac{\mathrm{V}_q}{\mathrm{V}_x} \sim \frac{g^2}{2\pi^2}\frac{\Delta^2}{\mathrm{V}} \tag{4.17}$$

4.2.4 Poprawka do energii stanu

Policzmy poprawkę do energii stanu (w drugim rzędzie rachunku zaburzeń). Aby uprościć zapis, powiedzmy, że wszystkie całki wykonywane są w sensie wartości głównej.

$$\Delta E_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} = \frac{\left\langle \mathbf{k}_1\mathbf{k}_2 \right| \mathtt{H}_I \dfrac{1}{E_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_1} - \mathtt{H}_0 + i\varepsilon} \mathtt{H}_I \left| \mathbf{k}_1\mathbf{k}_2 \right\rangle}{\| \left|\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\right\rangle \|^2}.$$

Analogicznie jak poprzednio, otrzymujemy

$$\frac{1}{[\delta(0)]^2} g^2 8 \int [\,\tilde{1}\,\tilde{2}\,]\ \delta(1+2-P)\delta(0) \frac{1}{k_1^2 + k_2^2 + 2m^2 - \tilde{k}_1^2 - \tilde{k}_2^2 - 2m^2 + i\varepsilon} =$$
$$= \frac{1}{\delta(0)} g^2 8 \int [\,p_1\,p_2\,]\, \delta(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) \frac{1}{k_1^2 + k_2^2 - p_1^2 - p_2^2 + i\varepsilon} =$$

Wykonujemy całkowanie po jednym z pędów (po pędzie p_2), korzystając z delty zachowania. Otrzymujemy

$$\frac{g^2 8}{\delta(0)} \int [\,p_1\,]\, \frac{1}{k_1^2 + k_2^2 - p_1^2 - (k_1 + k_2 - p_1)^2 + i\varepsilon}.$$

Rozwijamy wyrazy w mianowniku i skracamy odpowiednie wyrazy. Wyłączamy przed całkę czynnik 2. Korzystamy z definicji wartości głównej całki, rozbijając ją na dwie części:

$$\frac{g^2 4}{\mathrm{V}} \left[\int\limits_{U_{k_1k_2}} \frac{d^2p}{(2\pi)^3} \frac{-1}{p^2 - p(k_1+k_2) + k_1k_2 - i\varepsilon} - \int\limits_{R_{k_1k_2}} \frac{d^2p}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^2} \right] \sim$$
$$\sim \frac{g^2}{2\pi^2} \frac{1}{2} \frac{\ln \Delta}{\mathrm{V}},$$

gdzie przez $U_{k_1k_2}$ oznaczyliśmy otoczenie k_1, k_2, zaś przez $R_{k_1k_2}$ zewnętrze tego otoczenia, gdzie pominęliśmy wyrazy małe w porównaniu z p^2.

Zbierając te wzory razem, otrzymujemy wzór na część zależną od obcięcia Δ

$$\frac{\| \mathtt{H}_I \left| k_1 k_2 \right\rangle \|^2}{\| \left| k_1 k_2 \right\rangle \|^2} \sim \frac{g^2}{2\pi^2} \frac{\Delta^2}{\mathrm{V}}, \tag{4.18}$$

$$\Delta E^{(1)}_{k_1k_2} \sim \frac{g^2}{2\pi^2} \frac{1}{2} \frac{\ln \Delta}{\mathrm{V}}. \tag{4.19}$$

Wniosek:

Trzeba ograniczyć objętość przestrzeni pędów i w ten sposób wprowadzić obcięcie nadfioletowe (ultrafioletowe) Δ (UV)

4.2.5 Równanie stacjonarne Schrödingera

Równanie Schrödingera z odseparowaną zależnością od czasu daje problem własny (np. dla stanów związanych)

$$\mathtt{H}\left|\psi\right\rangle = E\left|\psi\right\rangle. \tag{4.20}$$

Weźmy stan $\left|\psi\right\rangle$ w postaci

$$\left|\psi\right\rangle = \int [\,1\,2\,]\ \psi(1,2)\, \left|1\,2\right\rangle \qquad \text{gdzie} \quad \psi(1,2) \equiv \psi(2,1). \tag{4.21}$$

Podstawienie do równania Schrödingera dla modelowego hamiltonianu daje

$$\int [\,\tilde{1}\,\tilde{2}\,] \left[\int [\,k\,]\, E_k a^\dagger_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} - g \int [\,1\,2\,3\,4\,]\, \delta(1+2-3-4) \left|1\,2\right\rangle\!\left\langle 3\,4\right| \right] \left|\tilde{1}\,\tilde{2}\right\rangle =$$
$$= E \int [\,\tilde{1}\,\tilde{2}\,]\, \psi(\tilde{1},\tilde{2}) \left|\tilde{1}\,\tilde{2}\right\rangle$$

Pierwszy wyraz daje energię swobodną $E_{\tilde{1}} + E_{\tilde{2}}$. Korzystając z symetrii funkcji falowej stanu $\psi(1,2) \equiv \psi(2,1)$, dostajemy

$$E \int [\,\tilde{1}\,\tilde{2}\,]\, \psi(\tilde{1},\tilde{2}) \big|\tilde{1}\,\tilde{2}\big\rangle \stackrel{!}{=}$$

$$= \int [\,\tilde{1}\,\tilde{2}\,] \left[(E_{\tilde{1}} + E_{\tilde{2}}) \big|\tilde{1}\,\tilde{2}\big\rangle - 2g \int [\,1\,2\,]\, \delta(1+2-\tilde{1}-\tilde{2}) \big|1\,2\big\rangle \right] =$$

$$= \int [\,\tilde{1}\,\tilde{2}\,]\, \psi(\tilde{1},\tilde{2})\, (E_{\tilde{1}} + E_{\tilde{2}}) \big|\tilde{1}\,\tilde{2}\big\rangle - 2g \int [\,\tilde{1}\,\tilde{2}\,] \int [\,1\,2\,]\, \psi(1,2) \delta(1+2-\tilde{1}-\tilde{2}) \big|\tilde{1}\,\tilde{2}\big\rangle.$$

Zamieniamy zmienne

$$\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 = \tilde{P}, \qquad \tilde{p}_1 = \frac{1}{2}\tilde{P} + \tilde{q},$$

$$\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 = 2\tilde{q}, \qquad \tilde{p}_2 = \frac{1}{2}\tilde{P} - \tilde{q}.$$

Stosując to podstawienie, otrzymujemy

$$E \int [\,\tilde{P}\,\tilde{1}\,]\, \psi(\tilde{P},\tilde{1}) \big|\tilde{P}\,\tilde{q}\big\rangle \stackrel{!}{=}$$

$$\stackrel{!}{=} \int [\,\tilde{P}\,\tilde{q}\,]\, \psi(\tilde{P},\tilde{q}) \left(\tfrac{1}{2}\tilde{P}^2 + 2\tilde{q}^2 \right) \big|\tilde{P}\tilde{q}\big\rangle +$$

$$- 2g \int [\,\tilde{P}\,\tilde{q}\,] \int [\,P\,q\,]\, \psi(P,q) \delta(P-\tilde{P}) \big|\tilde{P}\tilde{q}\big\rangle$$

Dzięki obecności $\delta(P-\tilde{P})$ w ostatnim członie możemy podstawić

$$\psi(P,q) = \delta(P-P_0)\phi(q) \tag{4.22}$$

Zależność od pędu całkowitego się faktoryzuje. Postać funkcji falowej zależy tylko od pędów względnych. Podstawiamy:

$$E \int [\,\tilde{P}\,\tilde{q}\,]\, \delta(\tilde{P}-P_0)\phi(\tilde{q}) \big|\tilde{P}\,\tilde{q}\big\rangle \stackrel{!}{=}$$

$$\stackrel{!}{=} \int [\,\tilde{P}\,\tilde{q}\,]\, \delta(\tilde{P}-P_0)\phi(\tilde{q}) \left(\tfrac{1}{2}\tilde{P}^2 + 2\tilde{q}^2 \right) \big|\tilde{P}\tilde{q}\big\rangle +$$

$$- 2g \int [\,\tilde{P}\,\tilde{q}\,] \int [\,P\,q\,]\, \delta(P-P_0)\phi(q) \delta(P-\tilde{P}) \big|\tilde{P}\tilde{q}\big\rangle$$

Możemy odcałkować po P i $\tilde{P}$.

Zatem to równanie Schrödingera można zapisać jako

$$E \int [\,\tilde{q}\,]\, \phi(\tilde{q}) \big|P_0\,\tilde{q}\big\rangle =$$

$$= \int [\,\tilde{q}\,]\, \phi(\tilde{q}) \left[\tfrac{1}{2}P_0^2 + 2\tilde{q}^2 + 2m^2 \right] \big|P_0\,\tilde{q}\big\rangle - 2g \int [\,\tilde{q}\,] \left[\int [\,q\,]\, \phi(q) \right] \big|P_0\,\tilde{q}\big\rangle,$$

gdzie $2m^2$ oznacza po prostu zmianę notacji dla wartości własnej E. Rzutując na stanu o określonym $\tilde{q}$, otrzymujemy następujące równanie dla funkcji falowej

$$\left(\tfrac{1}{2}P_0^2 + 2\tilde{q}^2 + 2m^2 \right) \phi(\tilde{q}) - 2g \int [\,q\,]\, \phi(q) = E\phi(\tilde{q})$$

Możemy przenieść stałą $\frac{1}{2}P_0^2$ na prawa stronę, podzielić równanie obustronnie przez 2, wprowadzić oznaczenie $\mathcal{E}$ na $\mathcal{E} := \frac{1}{2}(E - \frac{1}{2}P_0^2)$ i zapisać równanie własne na funkcję ϕ jako

$$\boxed{(m^2 + \mathbf{q}^2)\phi(\mathbf{q}) - g \int [\,k\,]\, \phi(\mathbf{k}) = \mathcal{E}\phi(\mathbf{q}).} \tag{4.23}$$

Separujemy zależność $\phi(\mathbf{q})$ od kąta.

Możemy rozłożyć $\phi(\mathbf{q})$ na „harmoniki sferyczne" (pamiętamy o tym, że $\mathbf{q}$ jest wektorem dwuwymiarowym $\mathbf{q} = q\,(\cos\varphi, \sin\varphi)$, gdzie $q = |\mathbf{q}|$):

$$\phi(\mathbf{q}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_m(q) e^{im\varphi}. \tag{4.24}$$

Podstawiając powyższy rozkład do równania własnego na funkcje ϕ dostajemy

$$(m^2 + \mathbf{q}^2) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \phi_j(q)\, e^{ij\varphi} - g \int_0^{\infty} k\, dk \int_0^{2\pi} d\theta \sum_{l=-\infty}^{\infty} \phi_l(q)\, e^{il\theta} = \mathcal{E} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \phi_j(q)\, e^{ij\varphi}$$

Odcałkowujemy po kącie θ. Całka $\int_0^{2\pi} d\theta\, e^{il\theta}$ nie znika tylko dla $l = 0$. Możemy skorzystać z ortonormalności funkcji $e^{il\theta}$ i odcałkować równanie z $\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}\, d\theta$, otrzymując

$$(m^2 + q^2)\phi_n(q) - \delta_{n0}\, g\, \frac{1}{2} \int_0^{\infty} dk^2\, \phi_0(k) = \mathcal{E}\phi_n(q).$$

Dla $n \neq 0$ mamy

$$(m^2 + q^2)\phi_n(q) = \mathcal{E}\phi_n(q)$$

Dostajemy zatem $\phi_n(q) \sim \delta(m^2 + q^2 - \mathcal{E})$ i widmo ciągłe, takie jak dla przypadku cząstki swobodnej — jest to przypadek gdy cząstka mija centrum ($l > 0$). Zatem dalej interesować się będziemy tylko falą s [$l = n = 0$].

Zobaczmy jakiemu potencjałowi odpowiada to równanie. Mamy

$$\mu\left(\mu + \frac{\mathbf{q}^2}{\mu}\right)\phi(\mathbf{q}) - g\int [\, k\,]\, \phi(\mathbf{k}) = \mathcal{E}\phi(\mathbf{q}). \tag{4.25a}$$

Wykonujemy transformatę Fouriera (przechodzimy do przestrzeni położeniowej) i otrzymujemy

$$\mu\left(\mu - \frac{\triangle}{\mu}\right)\hat{\phi}(\mathbf{r}) - cg\delta^{(2)}(\mathbf{r})\hat{\phi}(\mathbf{r}) = \mathcal{E}\hat{\phi}(\mathbf{r}). \tag{4.25b}$$

Dostaliśmy równanie Schrödingera dla potencjału $V \sim -g\,\delta^{(2)}(\mathbf{r})$.

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$m := m^2 \qquad g := \tfrac{g}{2}$$
$$z := \mathbf{q}^2 \qquad E := \mathcal{E}$$
$$\phi := \phi_0$$

Równanie Schrödingera w tych oznaczeniach ma postać

$$\boxed{(m + z)\phi(z) - g\int dz'\, \phi(z') = E\phi(z)} \tag{4.26}$$

Równanie to, zapisane z całkowaniem rozciągającym się od 0 do ∞ jest źle określone (co za chwilę pokażemy). Interesują nas rozwiązania dla wartości własnych $E < m$ — stany związane (wykluczony rachunek zaburzeń).

Wprowadźmy oznaczenie

$$C := \int_0^{\infty} dz'\, \phi(z')$$

Korzystając z powyższej definicji możemy napisać

$$(m + z)\phi(z) - gC = E\phi(z).$$

Z tego równania w prosty sposób możemy wyznaczyć $\phi(z)$,

$$\phi(z) = \frac{gC}{\underbrace{(m-E)}_{>0}+z}$$

($m - E > 0$ bo interesują nas stany związane). Wstawiamy otrzymany wynik do wzoru na C,

$$C = \int_0^\infty dz' \, \frac{gC}{(m-E)+z'}$$

i otrzymujemy relację

$$1 = g\int_0^\infty \frac{ds}{(m-E)+s} = g\cdot\infty.$$

Dostaliśmy sprzeczność.

Aby sobie z tym poradzić musimy wprowadzić jakąś regularyzację. Najprościej jest obciąć pędy od góry: zakładamy, że $z < \Delta$ (piszemy Δ zamiast Δ^2, zgodnie z $m := m^2$).

Przy tak wprowadzonym obcięci (przy takiej regularyzacji) zamiast $1 = g\cdot\infty$, otrzymamy równanie

$$1 = g\,\ln\frac{\Delta+m-E}{m-E}$$

Równanie to wiąże energię E, stałą sprzężenia g i parametr obcięcia Δ. Możemy stad wyznaczyć E

$$\boxed{E = m - \frac{\Delta}{e^{\frac{1}{g}}-1}} \tag{4.27}$$

Równanie to jest nierozwijalne w szereg w stałej sprzężenia g (wszystkie pochodne $E(g)$ w zerze są równe zero)

$$\left(\frac{d}{dg}\right)^n E(g)\bigg|_{g=0} = 0$$

$E(g)$ = swoja reszta w szeregu Taylora w g. Oznacza to między innymi, że nie możemy znajdować $E(g)$ w rachunku zaburzeń.

Musimy więc zapytać, czy wyjściowa teoria odpowiada granicy $\Delta\to\infty$. Z powyższego równania wynika, że $E \xrightarrow{\Delta\to\infty} -\infty$ dla dowolnego (stałego) g. Zatem granica $\Delta\to\infty$ nie ma sensu (przy ustalonej masie m i ustalonej stałej sprzężenia g)!.

4.3 Idea [grupy] renormalizacji na przykładzie renormalizacji przez obcięcie

Ustalmy E (wielkość nieperturbacyjna)

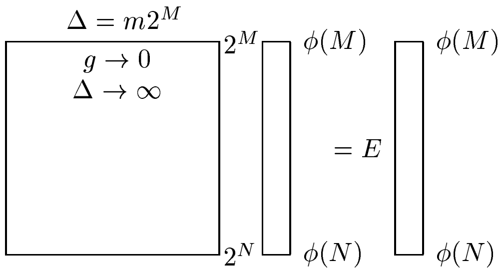
$$E(g,\Delta,m) = E_0 \qquad \leftarrow \text{równanie nieperturbacyjne},$$

tzn. ustalamy pewna wartość energii. Wykorzystujemy to rozwiązanie inaczej niż początkowo zamierzaliśmy, t.j. co innego jest dane, a co innego szukane. Na początku uważaliśmy g i Δ za dane i szukalismy E_0.

Zobaczmy ciekawą rzecz,

$$\int_\Delta^{2\Delta}\frac{ds}{m-E+s} = \ln\frac{m-E+2\Delta}{m-E+\Delta} \sim \ln 2.$$

$$\int_{2^n\Delta}^{2^{n+1}\Delta}\frac{ds}{m-E+s} = \ln 2 \qquad \text{dla każdego } n\text{, gdy } \Delta \gg m-E$$



Rysunek 4.5: Regularyzacja przez proste obcięcie — obrazek

Gdy $\Delta \to \infty$, to każda skala $2^n\Delta$ wnosi ten sam wkład.

Zdefiniujmy $z_n = 2^n m$, gdzie $n \in \mathbb{Z}$, dla $M \le n \le N$, gdzie $M < 0, 0 < N$ i ponadto $|M| \gg 1, |N| \gg 1$. Niech N określa parametr obcięcia $2^N m = \Delta$; czyli $M = \frac{\log \frac{\Delta}{m}}{\log 2}$.

Oznaczenie:

$$\phi_n := \phi(z_n) = \phi(2^n m)$$

Wszystkie elementy macierzowe `H` dają koherentny wkład do E.

Nie możemy zdiagonalizować tej macierzy w rachunku zaburzeń, a jej rozmiary dążą do nieskończoności, gdy $\Delta \to \infty$.

Standardowe podejście do problemu renormalizacji polega na ustaleniu $E = E_0$. Wtedy

$$E_0 = m - \frac{\Delta}{e^{\frac{1}{g}} - 1},$$
$$1 = g \ln \frac{\Delta + m - E_0}{m - E_0}.$$

Z warunku $E(g, \Delta, m) = E_0$ wynika, że g musi zależeć od Δ, $g \equiv g_\Delta$,

$$g_\Delta = \frac{1}{\ln \frac{\Delta}{m-E}}, \qquad \text{dla} \quad \Delta \to \infty.$$

Jest to sposób na uczynienie z hamiltonianu operatora skończonego.

Wyniki na E_0 nie zależą od Δ. Mając g_Δ można znaleźć pozostałe rozwiązania i zobaczyć, czy zależą od Δ.

Wynik: Pozostałe wyniki na skończone wielkości fizyczne nie zależą od Δ.

[•] R. Jackiv „Delta-function potentials ...”

[•] Phys. Rev. D, Vol. 49, and references therein

Dygresja:

Ten sposób wymaga wiedzy której nie mamy w QCD

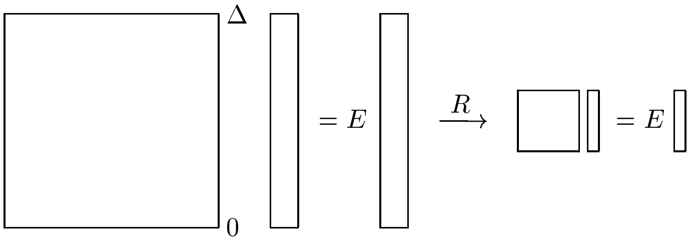
$$g_\Delta = \frac{g_0}{1 \pm g_0 \ln \frac{\Delta}{m}}$$

Znak + odpowiada modelowi i chromodynamice kwantowej (QCD), zaś znak − elektrodynamice kwantowej (QED). Widać, że z powodu tego znaku pojawia się problem dużych g_Δ ($g_0 \sim \alpha = \frac{1}{137}$ dla QED w małych energiach) $\frac{\Delta}{m} = e^{127}$. Zatem w QED, nieperturbacyjnie w równaniu Schrödingera, możemy się ograniczyć do podprzestrzeni $|\mathbf{q}| \le m$ i mamy tam małe sprzężenia. W QCD tak się nie da, bo d_Δ wybucha do ∞ gdy Δ maleje.

4.4 Metoda renormalizacji Wilsona 1964 (Nobel '82)

4.4.1 Idea renormalizacji Wilsona

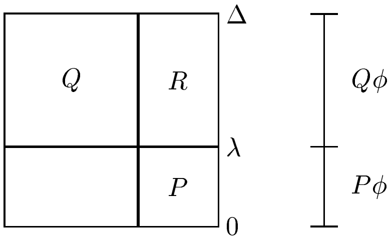
Przedstawimy tutaj renormalizację Wilsona w zastosowaniu do modelu (przygotowanie do renormalizacji przez transformację podobieństwa).



Rysunek 4.6: Redukcja hamiltonianu metodą Wilsona

4.4.2 Konstrukcja algebraiczna

Operację R konstruujemy jak pokazano na rysunku 4.7.



Rysunek 4.7: Rozkład $\mathtt{H}$ w metodzie renormalizacji Wilsona

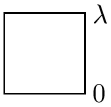
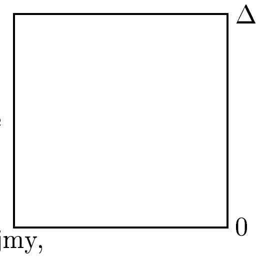
Definiujemy operatory P i Q wzorami:

$$P_\lambda + Q_\lambda = \mathrm{id}_\Delta,$$
$$P_\lambda^2 = P_\lambda, \qquad Q_\lambda^2 = Q_\lambda.$$

Są to operacje rzutowe

$$P_\lambda = \Theta(\mathtt{H}_0 - \lambda) \qquad , Q_\lambda = \Theta(\lambda - \mathtt{H}_0)$$

Żądamy by elementy macierzowe $\mathtt{H}_\lambda$, jako jawne funkcje Δ, nie zależały od Δ. Wtedy stany własne (związane) opisywane przez mały hamiltonian $\mathtt{H}_\lambda$ nie zależą od parametru obcięcia Δ dużego hamiltonianu.

R konstruujemy tak, żeby macierz  miała takie same wartości własne, co małe wartości własne  .

Zdefiniujmy,

$$\psi_P = P\psi,$$
$$\psi_Q = Q\psi.$$

Rozpisując równanie Schrödingera za pomocą powyższych oznaczeń,

$$\mathtt{H}\psi = E\psi,$$

dostajemy

$$\begin{aligned} P\mathtt{H}\left(\psi_P + \psi_Q\right) &= E\psi_P, \\ Q\mathtt{H}\left(\psi_P + \psi_Q\right) &= E\psi_Q. \end{aligned}$$

Załóżmy, że istnieje taki operator R, że

$$R\,\psi_P = \psi_Q$$

Wprowadźmy oznaczenie $\mathtt{H}_{AB}$ na $A\,\mathtt{H}\,B$, gdzie A, B są operatorami rzutowymi. W tych oznaczeniach możemy zapisać równania na ψ_Q i ψ_P (tzn. równanie Schrödingera) za pomocą operatora R w następujący sposób,

$$\begin{aligned} \mathtt{H}_{PP}\psi_P + \mathtt{H}_{PQ}R\psi_P &= E\psi_P, \\ \mathtt{H}_{QP}\psi_P + \mathtt{H}_{QQ}R\psi_P &= ER\psi_P. \end{aligned}$$

Jeśli nie wyeliminujemy zależności od E z drugiego równania, to nie da się znaleźć wzoru na R perturbacyjnie, bo będzie zawierał nieperturbacyjną wielkość E. Musimy zatem wyeliminować E z równań na R.

Zakładamy, że

$$RP = R, \qquad PR = 0, \tag{4.28a}$$
$$QR = R, \qquad RQ = 0. \tag{4.28b}$$

[•] K. Wilson Phys. Rev. B 140, 445 (1965) — pomysł
[•] K. Wilson Phys. Rev. D 1, 1438 (1970) — realizacja

Korzystając z powyższych założeń dostajemy

$$\begin{aligned} \left[R\mathtt{H} + R\mathtt{H}R\right]P\psi &= ER\psi, \\ \left[Q\mathtt{H}P + Q\mathtt{H}R\right]P\psi &= ER\psi. \end{aligned}$$

Odejmujemy stronami

$$\left[R\mathtt{H} + R\mathtt{H}R - Q\mathtt{H} - Q\mathtt{H}R\right]P\psi = 0.$$

To równanie obowiązuje być dla stanów $P|\psi\rangle$. Być może istnieje takie R, że

$$R\mathtt{H}P + R\mathtt{H}R - Q\mathtt{H}P - Q\mathtt{H}R = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R. \tag{4.29}$$

Z tego równania możemy szukać R.

Równanie własne dla małej macierzy można wyliczyć. Zajmijmy się równaniem własnym dla stanów ψ_P, które powinny mieć te odpowiadać stanom o tych samych wartościach własnych dla dużej i małej (obciętej) macierzy.

$$\begin{aligned} P\mathtt{H}\left(\psi_P + \psi_Q\right) &= E\psi_P \\ \mathtt{H}_{PP}\psi_P + \mathtt{H}_{PQ}R\psi_P &= E\psi_P \\ P\mathtt{H}\left(P + R\right)\psi_P &= E\psi_P \\ \left(P\mathtt{H}P + P\mathtt{H}R\right)\psi_P &= E\psi_P \end{aligned}$$

Mała macierz ma te same wartości własne co duży hamiltonian. Ale część $P\mathtt{H}R$ nie jest niehermitowska. Równanie własne jest różne od po prostu obcięcia wyjściowego równania własnego od λ.

Spróbujmy znaleźć R, dane wzorem (4.29), w rachunku zaburzeń. Rozpiszmy $\mathtt{H} = \mathtt{H}_0 + \mathtt{H}_I$ w równaniu (4.29):

$$R\mathtt{H}_0 + R\mathtt{H}_I P + R\mathtt{H}R - Q\mathtt{H}_I P - \mathtt{H}_0 R - Q\mathtt{H}_I R = 0 \tag{4.30}$$

Skorzystaliśmy z tego, że $\mathtt{H}_0$ jest diagonalny i zachodzą następujące własności

$$\begin{aligned} &\mathtt{H}_0 P = P\mathtt{H}_0, \qquad && Q\mathtt{H}_0 P = 0, \\ &\mathtt{H}_0 Q = Q\mathtt{H}_0. && \end{aligned}$$

Przenieśmy wszystko co nie zależy jawnie od hamiltonianu oddziaływania $\mathtt{H}_I$ na lewą stronę równania (4.30)

$$[R, \mathtt{H}_0] = Q\mathtt{H}_I P + Q\mathtt{H}_I R - R\mathtt{H}_I P - R\mathtt{H}R. \tag{4.31}$$

Wiodącym wyrazem po prawej stronie jest $Q\mathtt{H}_I P$. Dlatego R_I jest co najmniej rzędu $\mathtt{H}_I$ i pozostałe wyrazy po prawej stronie sa co najmniej rzedu $\mathtt{H}_I^2$. Zatem w wiodącym rzędzie

$$R_{ij} \simeq \frac{\mathtt{H}_{I\,ij}}{E_j - E_i}, \qquad \text{gdzie } i \in Q, j \in P$$

R można znaleźć w rachunku zaburzeń, ale nie wtedy, gdy $E_j - E_j$ jest małe.
Procedura rekurencyjna znajdowania R:

$$R_{ij}^{(1)} = \frac{\mathtt{H}_{I\,ij}}{E_j - E_i}, \qquad \text{gdzie} \quad i \in Q, j \in P.$$
$$R_{ij}^{(n)} = \frac{Q_{ij}^{(n)}}{E_j - E_i} \qquad \text{w dowolnym rzędzie,}$$

gdzie $Q_{ij}^{(n)}$ znajduje się znając $Q^{(k)}$ dla $k < n$

.

Niestety, zdefiniowane przez nas φ_P nie muszą być ortogonalne, nawet gdy odpowiadają różnym wartościom E.

Mamy

$$\varphi_1^\dagger \varphi_2 = \delta_{12} \qquad \text{dla} \quad E_1 \neq E_2,$$

ale

$$(P\varphi_1)^\dagger (P\varphi_2) \neq \delta_{12}.$$

Skorzystajmy z ortonormalności stanów własnych pełnego $\mathtt{H}$ i zapiszmy

$$\left[(1+R)P\psi_1\right]^* (1+R)P\psi_2 = \delta_{12}.$$

Przekształcamy:

$$\begin{aligned}
\varphi_1^*(P + R^\dagger)(P + R)\psi_2 &= \delta_{12}, \\
\varphi_1^*(P + \underbrace{R^\dagger P}_{=0} + \underbrace{PR}_{=0} + R^\dagger R)\psi_2 &= \delta_{12}, \\
\varphi_1^*(P + R^\dagger R)\psi_2 &= \delta_{12}, \\
\varphi_1^* \sqrt{P + R^\dagger R}\sqrt{P + R^\dagger R}\psi_2 &= \delta_{12}.
\end{aligned}$$

Zatem możemy wprowadzić bazę efektywna złożoną ze stanów własnych małej macierzy

$$\phi = \sqrt{P + R^\dagger R} P\psi. \tag{4.33}$$

Zobaczmy, jak wygląda w tej bazie równanie własne,

$$\begin{aligned}
\mathtt{H}\psi &= E\psi, \\
\mathtt{H}(P + R)\psi_P &= E\psi = E(P + R)\psi_P = \\
&= E(P + R)\frac{1}{\sqrt{P + R^\dagger R}}\phi.
\end{aligned}$$

Mnożymy obie strony tego równania lewostronnie przez $(P + R^\dagger)$ i dostajemy

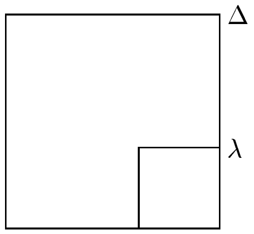
$$(P + R^\dagger)\,\mathtt{H}\,(P + R)\frac{1}{\sqrt{P + R^\dagger R}}\phi = E(P + R^\dagger R)\frac{1}{\sqrt{P + R^\dagger R}}\phi$$

czyli

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{P + R^\dagger R}}(P + R^\dagger)\mathtt{H}(P + R)\frac{1}{\sqrt{P + R^\dagger R}}\phi = E\phi} \tag{4.34}$$

Dostaliśmy jawnie hermitowski hamiltonian, określony na stanach ortogonalnych dla różnych wartości własnych E.

$$\begin{aligned}\mathtt{H}_\lambda &= \frac{1}{\sqrt{P + R^\dagger R}}(P + R^\dagger)\mathtt{H}(P + R)\frac{1}{\sqrt{P + R^\dagger R}} \\ &= P_\lambda \mathtt{H}_\Delta P_\lambda + \text{reszta (rzędu} \sim \mathrm{O}(\mathtt{H}_I^2))\end{aligned} \tag{4.35}$$



$$H_{\text{eff}} \neq P_\lambda \mathtt{H}_\Delta P_\lambda$$
$$H_{\text{eff}} = P_\lambda \mathtt{H}_\Delta P_\lambda + \text{coś}$$

Oznaczamy „coś” przez X_λ.

Zatem wzór

$$1 = g\int_0^\Delta ds\,\frac{1}{m - E + s}$$

to nie wszystko, gdyż pomijał obecność X_Δ. Potrzebne są *kontrczłony.*

$$\begin{aligned}\mathtt{H}_\infty &\longrightarrow \mathtt{H}_\Delta + X_\Delta = P_\Delta \mathtt{H}_\infty P_\Delta + X_\Delta \\ \mathtt{H}_{\tilde\Delta} &\longrightarrow \mathtt{H}_{\tilde\lambda} = P_{\tilde\lambda}\mathtt{H}_{\tilde\Delta}P_{\tilde\lambda} + X_{\tilde\Delta\tilde\lambda}\end{aligned}$$

Stwierdzenie 3. *X_Δ dobieramy z warunku, że wszystkie elementy macierzowe $\mathcal{H}_\lambda$ mają granicę, gdy $\Delta \to \infty$. Z tego warunku otrzymamy g_Δ. Jest to warunek dostateczny, ale nie konieczny.*

Jeżeli $\boxed{}\Big|\; = E \;\Big|$ nie zawiera Δ, to E też nie zawiera Δ.
Z konstrukcji, E jest takie samo dla $\mathtt{H}_\lambda$ co dla $\mathtt{H}_\Delta$.

4.4.3 Uproszczona metoda algebraiczna

Formuła na $\mathcal{H}_\lambda$ dana równaniem (4.35) potrzebna jest dla rozbieżności kwadratowych, dla logarytmicznych można procedurę szukania X_Δ uprościć.

W rozpisanym równani Schrödingera,

$$\begin{aligned}\mathtt{H}_{PQ}\,\psi_Q + \mathtt{H}_{PP}\,\psi_P &= E\psi_P, \\ \mathtt{H}_{QP}\,\psi_P + \mathtt{H}_{QQ}\,\psi_Q &= E\psi_Q,\end{aligned}$$

z drugiego równania otrzymujemy

$$\mathtt{H}_{QP}\psi_P = (E - \mathtt{H}_{QQ})\psi_Q.$$

Formalnie

$$\psi_Q = \frac{1}{E - \mathtt{H}_{QQ}}\mathtt{H}_{QP}\psi_P.$$

Wstawiamy to „rozwiązanie” do pierwszego równania i otrzymujemy równanie własne dla ψ_P:

$$\left[\mathtt{H}_{PP} + \mathtt{H}_{PQ}\frac{1}{E - \mathtt{H}_{QQ}}\mathtt{H}_{QP}\right]\psi_P = E\psi_P. \tag{4.36}$$

„Hamiltonian" w tym równaniu zawiera E, które musi być samozgodne, ale okaże się, że E w „hamiltonianie" nie odgrywa roli w szukaniu X_Δ i ten „hamiltonian" wystarczy dla rozbieżności logarytmicznych.

Rozwiążmy to równanie dla hamiltonianu modelowego. Mamy

$$\begin{aligned}
\langle z'|\mathtt{H}_{PP\infty}|z\rangle &= \big[(z+m)\delta(z-z') - g\big]\Theta(\lambda - z)\Theta(\lambda - z'),\\
\langle z'|\mathtt{H}_{\Delta}|z\rangle &= \big[(z+m)\delta(z-z') - g + X_\Delta\big]\Theta(\Delta - z)\Theta(\Delta - z'),\\
\langle z'|\mathtt{H}_{\lambda}|z\rangle &= \big[(z+m)\delta(z-z') - g + X_\Delta\big]\Theta(\lambda - z)\Theta(\lambda - z')\\
&\quad + \langle z'|\mathtt{H}_{PQ}\frac{1}{E-\mathtt{H}_{QQ}}\mathtt{H}_{QP}|z\rangle.
\end{aligned}$$

W $\mathtt{H}_{PQ}$ i $\mathtt{H}_{QP}$ uwzględniamy wyrazy pierwszego rzędu (pamiętamy, ze wyrazy zerowego rzędu znikają), co pociąga za sobą to, że w drugim rzędzie rachunku zaburzeń w $\mathtt{H}_{QQ}$ wchodzi do mianownika tylko $\mathtt{H}_0$ i E można zaniebać, gdy $\mathtt{H}_0 \geq \lambda \gg E$.

Obliczamy elementy macierzowe $\mathtt{H}_\lambda$ w drugim rzędzie rachunku zaburzeń. Wpisujemy w środek drugiego składnika jedynkę w postaci rozkładu na stany własne: $\mathrm{id} = \int dz\,|z\rangle\langle z|$ i podstawiamy za $\mathtt{H}_{PQ}$ odpowiednie wyrażenia, wynikające z definicji operatorów rzutowych P i Q.

$$\begin{aligned}
\langle z'|\mathtt{H}_{\lambda}|z\rangle &= \big[(z+m)\delta(z-z') - g + X_\Delta\big]\Theta(\lambda - z)\Theta(\lambda - z')\\
&\quad + \int_0^\Delta dx \int_0^\Delta dy\,\langle z'|\mathtt{H}_I|x\rangle\Theta(x-\lambda)\langle x|(E-\mathtt{H}_{QQ})^{-1}|y\rangle\Theta(y-\lambda)\langle y|\mathtt{H}_I|z\rangle,
\end{aligned}$$

gdzie całkowanie zostało ograniczone do Δ przez wyjściowe obcięcie w $\mathtt{H}_\Delta$.

Musimy obliczyć $\langle x|(E-\mathtt{H}_{QQ})^{-1}|y\rangle$. W tym celu zastosujemy następującą równość (szereg Neumanna):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{A-B} &= (A-B)^{-1} = \big[A(1-A^{-1}B)\big]^{-1} =\\
&= (1-A^{-1}B)^{-1}A^{-1}
\end{aligned}$$

i dla $\|A^{-1}B\| \ll 1$ otrzymujemy szereg

$$\begin{aligned}
\frac{1}{A-B} &= A^{-1} + A^{-1}BA^{-1} + A^{-1}BA^{-1}BA^{-1} + \dots\\
&= \sum_{j=0}^{\infty} A^{-1}\left(BA^{-1}\right)^j.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Stosując ten wzór dostajemy:

$$\begin{aligned}
&\langle x|(E-\mathtt{H}_{QQ})^{-1}|y\rangle =\\
&\qquad = \langle x|(\underbrace{E-\mathtt{H}_0}_{A} - \underbrace{\mathtt{H}_I}_{B})^{-1}|y\rangle\\
&\qquad = \langle x|\frac{1}{E-\mathtt{H}_0}|y\rangle + \langle x|\frac{1}{E-\mathtt{H}_0}\mathtt{H}_I\frac{1}{E-\mathtt{H}_0}|y\rangle + \dots.
\end{aligned}$$

$\mathtt{H}_0$ jest diagonalne, więc otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&\langle x|(E-\mathtt{H}_{QQ})^{-1}|y\rangle =\\
&\qquad = \delta(x-y)\frac{1}{E-m-x} + \langle x|\iint du\,dv\,\frac{1}{E-\mathtt{H}_0}|u\rangle\langle u|\mathtt{H}_I|v\rangle\langle v|\frac{1}{E-\mathtt{H}_0}|y\rangle + \dots\\
&\qquad = \frac{\delta(x-y)}{\underbrace{E-m}_{<0}-x} + \frac{1}{E-x-m}(-g)\frac{1}{E-y-m} + \dots
\end{aligned}$$

Korzystając z powyższych wzorów, oraz z tego, że $|E-m| \ll \lambda$ obliczamy

$$\Theta(x-\lambda)\Theta(y-\lambda)\big\langle x\big|(E-\mathtt{H}_{QQ})^{-1}\big|y\big\rangle,$$

szacując

$$\Theta(x-\lambda)\Theta(y-\lambda)\big\langle x\big|(E-\mathtt{H}_{QQ})^{-1}\big|y\big\rangle =$$

$$= \frac{\Theta(x-\lambda)\Theta(y-\lambda)\delta(x-y)}{E-m-x} + \frac{\Theta(x-\lambda)\Theta(y-\lambda)(-g)}{(E-m-x)(E-m-y)} + \cdots \simeq$$

Mamy $|E-m| \ll \lambda$ oraz x i $y \geq \lambda$, zatem $|E-m| \ll x$ i y, i pierwszy wyraz tego rozwinięcia ma postać

$$\frac{\Theta(x-\lambda)\Theta(y-\lambda)\delta(x-y)}{-x} + \mathrm{o}\left(\frac{E-m}{\lambda}\right) + \mathrm{o}\left(g\right)$$

Podstawiając to do równania na elementy macierzowe $\mathcal{H}_\lambda$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\big\langle z'\big|\mathtt{H}_\lambda\big|z\big\rangle = \Theta(\lambda-z)\Theta(\lambda-z')\big[(z+m)\delta(z-z') - g + X^{(2)}_\Delta + \\ + \int_\lambda^\Delta dx \int_\lambda^\Delta dy\,(-g)\frac{\delta(x-y)}{-x}(-g)\big] + \\ + \mathrm{o}(g^3) + \mathrm{o}\left(g^2\frac{E-m}{\lambda}\right).\end{aligned}$$

Rozwijamy $\mathtt{H}_\lambda$ w rzędach stałej sprzężenia g,

$$\mathtt{H}_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \mathtt{H}^{(n)}_\lambda g^n, \tag{4.38}$$

i elementy macierzowe $\mathtt{H}^{(2)}_\lambda$ są dane wzorem

$$\begin{aligned}\big\langle z'\big|\mathtt{H}^{(2)}_\lambda\big|z\big\rangle &= \Theta(\lambda-z)\Theta(\lambda-z')\big[X^{(2)}_\Delta(z',z) - g^2\int_\lambda^\Delta \frac{dx}{x}\big] + \mathrm{o}(g^3) + \mathrm{o}\left(g^2\frac{E-m}{\lambda}\right) = \\ &\simeq \Theta(\lambda-z)\Theta(\lambda-z')\big[X^{(2)}_\Delta(z',z) - g^2\ln\frac{\Delta}{\lambda}\big].\end{aligned}$$

Elementy macierzowe $\mathcal{H}_\lambda$ zależałyby od Δ, gdyby $X^{(2)}_\Delta(z',z) = 0$ (*Uwaga:* zakładamy, że $\lambda \ll \Delta$ oraz $\lambda \gg |E-m|$). Żeby uniezależnić elementy macierzowe $\mathtt{H}_\lambda$ od Δ, $X^{(2)}_\Delta(z',z) = +g^2\ln\frac{\Delta}{\mu}$, gdzie μ jest pewną stałą, a to znaczy, że kontrczłon musi usunąć zależności od Δ, czyli

$$\big\langle z'\big|X^{(2)}_\Delta\big|z\big\rangle = X^{(2)}_\Delta(z',z) = g^2\ln\frac{\Delta}{\mu} + c = g^2\ln\frac{\Delta}{\mu_0}. \tag{4.39}$$

Niezależność $\big\langle z'\big|\mathtt{H}_\lambda\big|z\big\rangle$ od Δ dla skończonych λ, takich że $\lambda \gg |E-m|$, implikuje:

$$\mathtt{H}^{(0+1+2)}_\Delta = \mathbb{P}_\Delta\big[\mathtt{H}_0 + \mathtt{H}^{(1)}_I + X^{(2)}_\Delta\big]\mathbb{P}_\Delta,$$

oraz

$$\big\langle z'\big|\mathtt{H}^{(0+1+2)}_\Delta\big|z\big\rangle = \Theta(\Delta-z')\Theta(\Delta-z)\left[(z+m)\delta(z-z') - g + g^2\ln\frac{\Delta}{\mu}\right].$$

Przypomina to obcięty hamiltonian, ale z biegnącą (zależną od Δ) stałą sprzężenia

$$g_\Delta = g\left(1 - g\ln\frac{\Delta}{\mu}\right)$$

Gdybyśmy ten wynika zapisali jako pierwsze dwa wyrazy rozwinięcia w potęgi g wzoru $g_\Delta = \frac{g}{1+g\ln\frac{\Delta}{mu_0}}$, to widzielibyśmy asymptotyczną swobodę.

Wnioski:

1. Obcięcie Δ implikuje $g \to g\left(\frac{\Delta}{\mu_0}\right)$.
2. Zależność g_Δ od Δ wprowadza dowolną wymiarową liczbę μ (zjawisko transmutacji wymiarowej).

4.4.4 Pełna metoda algebraiczne

Przypomnijmy pełny wzór na $\mathtt{H}_\lambda$ w bazie efektywnej (czyli w postaci jawnie hermitowskiej) — wzór (4.35) na stronie 59,

$$\mathtt{H}_{\mathrm{eff}\,\lambda} = \frac{1}{\sqrt{P+R^\dagger R}}(P+R^\dagger)\mathtt{H}(P+R)\frac{1}{\sqrt{P+R^\dagger R}}.$$

Równanie na operator R do drugiego rzędu (patrz wzór (4.31)) ma postać

$$[R,\mathtt{H}_0] = Q(\mathtt{H}_I + X_\Delta)P + \mathrm{o}(g^2).$$

Zatem $R \sim g + \mathrm{o}(g^2)$, zawiera wyrazy rzędu co najmniej g. Możemy więc napisać

$$\frac{1}{\sqrt{P+R^\dagger R}} = P - \frac{1}{2}R^\dagger_{(1)}R_{(1)} + \mathrm{o}(g^3).$$

Korzystając z powyższego równania możemy wypisać kolejne rzędy rozwinięcia $\mathtt{H}_{\mathrm{eff}\,\lambda}$ w potęgach [gołej] stałej sprzężenia] ($\mathtt{H}_I$ jest rzędu g)

$$\mathtt{H}^{(0)}_{\mathrm{eff}\,\lambda} = P_\lambda \mathtt{H}_0 P_\lambda, \tag{4.40a}$$

$$\mathtt{H}^{(1)}_{\mathrm{eff}\,\lambda} = P_\lambda \mathtt{H}_I P_\lambda, \tag{4.40b}$$

$$\begin{aligned} g^2\mathtt{H}^{(2)}_{\mathrm{eff}\,\lambda} = g^2 \Big[& \big(P - \tfrac{1}{2}g^2 R^\dagger_{(1)}R_{(1)}\big)\big(P + gR^\dagger_{(1)} + g^2R^\dagger_{(2)}\big)\times \\ & \times \big(\mathtt{H}_0 + \mathtt{H}_I + g^2X^{(2)}_\Delta\big)\big(P + gR_{(1)} + g^2R_{(2)}\big)\big(P - \tfrac{1}{2}g^2R^\dagger_{(1)}R_{(1)}\big)\Big]_{(2)}, \end{aligned} \tag{4.40c}$$

gdzie $A_{(i)}$ (lub $A^{(i)}_{ijk\dots}$) oznacza, że wyławiamy wyraz i-tego rzędu w stałej sprzężenia w członie A, tzn. $A = \sum_{i=0}^\infty g^i A_{(i)}$. Mamy

$$\begin{aligned} g^2\mathtt{H}^{(2)}_{\mathrm{eff}\,\lambda} &= g^2X^{(2)}_\Delta + gR^\dagger_{(1)}\mathtt{H}_I + \mathtt{H}_I R_{(1)}g + P\mathtt{H}_0\big(g^2R_{(2)}P - \tfrac{1}{2}g^2R^\dagger_{(1)}R_{(1)}\big) + \\ &+ gPR^\dagger_{(1)}\mathtt{H}_0R_{(1)}gP + \big(Pg^2R^\dagger_{(2)} - \tfrac{1}{2}g^2R^\dagger_{(1)}R_{(1)}\big)\mathtt{H}_0P. \end{aligned}$$

Korzystamy ze wzorów (4.28), z których wynika m. in., że $R^\dagger P = 0$.

$$\begin{aligned} g^2\mathtt{H}^{(2)}_{\mathrm{eff}\,\lambda} &= g^2X^{(2)}_\Delta + gR^\dagger_{(1)}\mathtt{H}_I + \mathtt{H}_I R_{(1)}g + \\ &- \tfrac{1}{2}g^2P\mathtt{H}_0R^\dagger_{(1)}R_{(1)} - \tfrac{1}{2}g^2R^\dagger_{(1)}R_{(1)}\mathtt{H}_0P + g^2R^\dagger_{(1)}\mathtt{H}_0R_{(1)}. \end{aligned}$$

Potrzebny jest nam operator R w pierwszym rzędzie. Wprowadźmy tymczasowe oznaczenia

$$\begin{aligned} gV &:= \mathtt{H}_I, \\ R &:= R^{(1)}, \\ P &:= P_\lambda. \end{aligned}$$

W tych oznaczeniach możemy zapisać równanie na wyraz pierwszego rzędu w R jako

$$[R,\mathtt{H}_0] = QVP \qquad \Rightarrow \qquad \big[\mathtt{H}_0, R^\dagger\big] = PVQ.$$

Wyraz drugiego rzędu w hamiltonianie efektywnym w tych oznaczeniach (opuszczamy co się da, upraszczając notację)

$$\begin{aligned} \mathtt{H}^{(2)}_{\mathrm{eff}\,\lambda} &= PX^{(2)}_\Delta P + R^\dagger VP + PVR + \mathtt{H}_0(-\frac{1}{2}R^\dagger R) + R^\dagger\mathtt{H}_0R - \frac{1}{2}R^\dagger R\mathtt{H}_0 = \\ &= PX^{(2)}_\Delta P + R^\dagger VP + PVR + \frac{1}{2}\left[R^\dagger, \mathtt{H}_0\right] + \frac{1}{2}R^\dagger\left[\mathtt{H}_0, R\right] = \\ &= PX^{(2)}_\Delta P + R^\dagger VP + PVR - \frac{1}{2}(PVR + R^\dagger VP) \\ &= PX^{(2)}_\Delta P + \frac{1}{2}(PVR + R^\dagger VP). \end{aligned}$$

Pełną metodą otrzymujemy do rzędu g^2:

$$\mathtt{H}^{(2)}_{\mathrm{eff}\,\lambda} = PX^{(2)}_{\Delta}P + \frac{1}{2}(PVR + R^{\dagger}VP). \tag{4.41}$$

To oznacza, że elementy macierzowe są postaci

$$\begin{aligned}\langle z'|\mathtt{H}^{(2)}_{\mathrm{eff}\,\lambda}|z\rangle = \Theta(\lambda - z)\Theta(\lambda - z')\Big[X^{(2)}_{\Delta}(z', z) +\\ + \frac{1}{2}\int_{\lambda}^{\Delta} dx \Big\{R^{\dagger}(z', x)V(x, z) + V(z', x)R(x, z)\Big\}\Big].\end{aligned}$$

Wstawiamy

$$\begin{aligned}R(x, z) &= \frac{V(x, z)\Theta(\Delta - x)\Theta(z - \lambda)\Theta(\lambda - z)}{z + m - x - m},\\ R^{\dagger}(z', x) &= \frac{V(z', x)\Theta(\Delta - x)\Theta(z - \lambda)\Theta(\lambda - z')}{z' + m - x - m},\end{aligned}$$

i dostajemy

$$\begin{aligned}\langle z'|\mathtt{H}^{(2)}_{\mathrm{eff}\,\lambda}|z\rangle = \Theta(\lambda - z)\Theta(\lambda - z')\Big[X^{(2)}_{\Delta}(z', z) +\\ + \int_{\lambda}^{\Delta} dx V(z', x)\frac{1}{2}\left[\frac{1}{z - x} + \frac{1}{z' - x}\right]V(x, z)\Big].\end{aligned}$$

Zauważmy, że w metodzie uproszczonej otrzymaliśmy $(E - m - x)^{-1}$, zaś w pełnej mamy $\frac{1}{2}\left[(z - x)^{-1} + (z' - x)^{-1}\right]$.

Podsumowując:

$$\begin{aligned}\text{Uproszczona operacja } R: &\quad \frac{1}{E - m - x},\\ \text{Pełna operacja } R: &\quad \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z - x} + \frac{1}{z' - x}\right].\end{aligned}$$

Obliczmy całki występujące w elementach macierzowych hamiltonianu efektywnego w drugim rzędzie w pełnej metodzie algebraicznej

$$\begin{aligned}\int_{\lambda}^{\Delta} dx\, \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{-z + x} + \frac{-1}{-z' + x}\right] &= \frac{1}{2}\big(-\ln(-z + x) - \ln(-z' + x)\big)\Big|_{\lambda}^{\Delta} =\\ = -\frac{1}{2}\left[\ln\frac{\Delta - z}{\lambda - z} + \ln\frac{\Delta - z'}{\lambda - z'}\right] &= -\frac{1}{2}\left[2\ln\frac{\Delta}{\lambda} + \ln\frac{\mu - z\frac{\mu}{\Delta}}{\lambda - z} + \ln\frac{\mu - z'\frac{\mu}{\Delta}}{\lambda - z'}\right]\\ \xrightarrow{\Delta\to\infty} -\ln\frac{\Delta}{\mu} + \frac{1}{2}\ln\frac{\lambda - z}{\mu}\frac{\lambda - z'}{\mu}.\end{aligned}$$

Czyli dostajemy następujący wzór na elementy macierzowe (dla $\Delta \to \infty$),

$$\langle z'|\mathtt{H}^{(2)}_{\mathrm{eff}\,\lambda}|z\rangle \overset{\Delta\to\infty}{=} \Theta(\lambda - z)\Theta(\lambda - z')\left[X^{(2)}_{\Delta}(z', z) - \ln\frac{\Delta}{\mu} + \ln\frac{\sqrt{(\lambda - z')(\lambda - z)}}{\mu}\right].$$

Wniosek:

$$X^{(2)}_{\Delta}(z', z) = \ln\frac{\Delta}{\mu} + c = \ln\frac{\Delta}{\mu_0}.$$

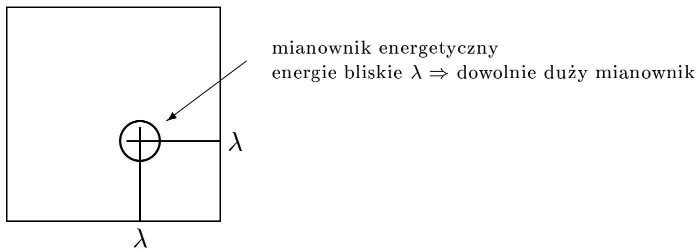
Biegnąca stała sprzężenia

$$g \to g_{\Delta} = g\left(1 - g\ln\frac{\Delta}{\mu_0}\right)$$

wychodzi taka sama, jak z uproszczonej metody.

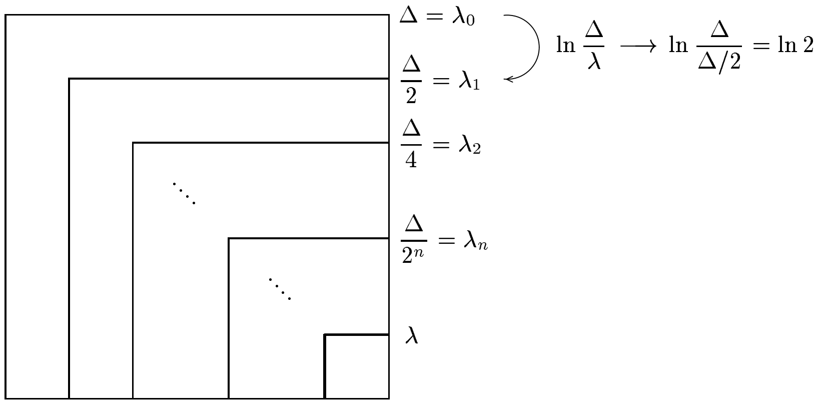
Z postaci elementów macierzowych hamiltonianu widzimy, że

$$\begin{pmatrix} z \to \lambda \\ \text{lub} \\ z' \to \lambda \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \left(\mathtt{H}^{(2)}_{\mathrm{eff}\,\lambda}(z, z') \to -\infty\right)$$



Rysunek 4.8: Mianowniki energetyczne w metodzie Wilsona

4.4.5 Co to jest grupa renormalizacji?



Rysunek 4.9: Pojęcie grupy renormalizacji

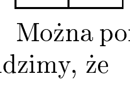
Krok $\mathtt{H}_\Delta \longrightarrow \mathtt{H}_{\Delta/2}$ (w przeciwieństwie do przejścia $\mathtt{H}_\infty \longrightarrow \mathtt{H}_\Delta$) nie zawiera rozbieżności, gdyż

$$\ln \frac{\Delta}{\lambda} \to \ln \frac{\Delta}{\Delta/2} = \ln 2.$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$\mathtt{H}_{\lambda_m}(z,z') = \Theta(\lambda_m - z)\Theta(\lambda_m - z') f_{\lambda_m}(z,z').$$

Dla λ_{m+1} zakres argumentów z i z' jest dwa razy mniejszy niż dla λ_m:



Można porównać ze sobą $f_{\lambda_n}(z,z')$ i $f_{\lambda_{n+1}}(2z,2z')$. Patrząc na stosunek $f_{\lambda_n}(z,z') \;/\; f_{\lambda_{n+1}}(2z,2z')$ widzimy, że

$$\mathtt{H}_n(z,z') = f_{\lambda_n}(2^n z, 2^n z'),$$

czyli zakres z-ów się *nie zmienia*.

Wprowadźmy oznaczenie

$$f_n(x,y) := f_{\lambda_n}(2^n x, 2^n y)$$

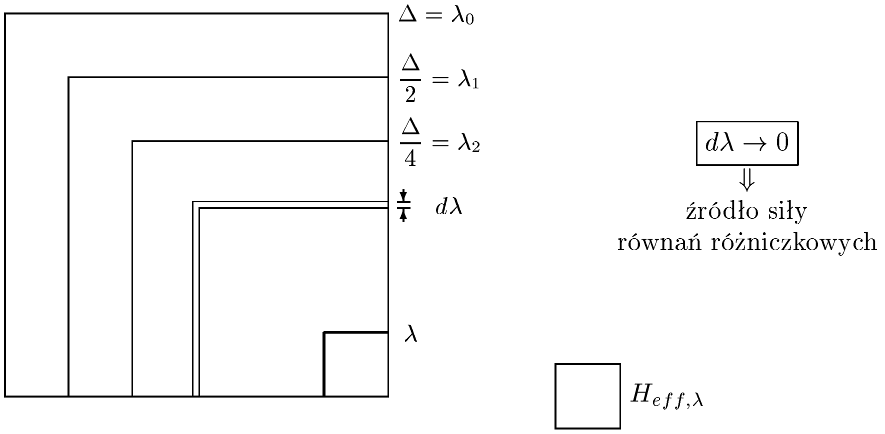
rozpatrujemy w ustalonym zakresie (x,y).

Przy tych oznaczeniach mamy

$$\begin{aligned} f_0(x,y) &= \mathtt{H}_\Delta(x,y) \\ f_1(x,y) &= \mathtt{H}_{\frac{\Delta}{2}}(2x,2y) \\ &\vdots \\ f_n(x,y) &= \mathtt{H}_{\frac{\Delta}{2^n}}(2^n x, 2^n y) \end{aligned}$$

4.4.6 Metoda wykorzystująca równania różniczkowe

W granicy $\lambda_{n+1} = \lambda_n - d\lambda$ otrzymujemy infinitezymalne kroki $2 \to 1 + \varepsilon$. Szukamy kontrczłonu X_Δ, usuwającego zależność od regularyzacji (obcięcia). $d\lambda \to 0$ jest źródłem siły równań różniczkowych w grupie renormalizacji, bo zyskujemy nowy mały parametr do rozwijania skomplikowanych wyrażeń. Ceną za to jest niemożliwość rozwiązywania zagadnień z przerwą energrtyczną (przynajmniej nie wprost).



Rysunek 4.10: Rozwiązywanie równań grupy renormalizacji za pomocą równań różniczkowych

Z dokładnością do g^2,

$$\begin{aligned} \mathtt{H}_\Delta(z,z') &= \Theta(\Delta - z')\Theta(\Delta - z)\big[(z+m)\delta(z-z') - g_\Delta\big], \\ \mathtt{H}_\lambda(z,z') &= \Theta(\lambda - z')\Theta(\lambda - z).f_\lambda(z,z') \end{aligned}$$

Stawiamy pytanie

$$\frac{df_\lambda(z,z')}{d\lambda} = ?$$

Równanie własne ma postać

$$(z+m)\phi_\Delta(z) + \int_0^\Delta V_\Delta(z,z')\phi_\Delta(z')\,dz' = E\phi_\Delta(z),$$

gdzie

$$V_\Delta(z,z') = -g_\Delta + X_\Delta^{(3)+\cdots}(z,z').$$

Dla pewnego λ:

$$E\phi_\lambda(z) = (z+m)\phi_\lambda(z) + \int\limits_0^\lambda V_\lambda(z,z')\phi_\lambda(z')\,dz.$$

Rozpiszmy całkę.

$$E\phi_\lambda(z) = (z+m)\phi_\lambda(z) + \int\limits_0^{\lambda-d\lambda} V_\lambda(z,z')\phi_\lambda(z')\,dz' + d\lambda\, V_\lambda(z,\lambda)\phi_\lambda(\lambda),$$

gdzie w ostatnim $\phi_\lambda(\lambda)$ występują tylko wyrazy rzędu 1, bez wyrazów rzędu $d\lambda$. Zapiszmy równanie na $\phi_\lambda(\lambda)$ z dokładnością do wyrazów rzędu 1.

$$(\lambda+m)\phi_\lambda(\lambda) - E\phi_\lambda(\lambda) = \int\limits_0^{\lambda-d\lambda} dz'\, V_\lambda(\lambda,z')\phi_\lambda(z') + \mathrm{o}(d\lambda)$$

Wstawiamy formalne rozwiązanie do poprzedniego równania,

$$(z+m)\phi_\lambda(z) + \int\limits_0^{\lambda-d\lambda} dz'\, V_\lambda(z,z')\phi_\lambda(z') +$$
$$+\, d\lambda\, V_\lambda(z,\lambda)\frac{-1}{\lambda+m-E}\int\limits_0^{\lambda-d\lambda} dz'\, V_\lambda(\lambda,z')\phi_\lambda(z') = E\phi_\lambda(z),$$

czyli, zapisując to w skróconej postaci,

$$(z+m)\phi_\lambda(z) + \int\limits_0^{\lambda-d\lambda}\left[V_\lambda(z,z') - d\lambda\, V_\lambda(z,\lambda)\frac{1}{\lambda+m-E}V(\lambda,z')\right]\phi_\lambda(z') = E\phi_\lambda(z).$$

Zatem, porównując wyrazy podcałkowe, możemy zapisać

$$V_{\lambda-d\lambda}(z,z') = V_\lambda(z,z') - d\lambda\, V_\lambda(z,\lambda)\frac{1}{\lambda+m-E}V(\lambda,z')$$

Zakładamy, że $|m-E| \ll \lambda$ i można pominąć $m-E$ w mianowniku,

$$V_\lambda(z,z') - V_{\lambda-d\lambda}(z,z') = \frac{d\lambda}{\lambda}V_\lambda(z,\lambda)V_\lambda(\lambda,z').$$

Otrzymujemy następujące równanie różniczkowe

$$\frac{d}{d\lambda}V_\lambda(z,z') = V_\lambda(z,\lambda)\frac{1}{\lambda}V_\lambda(\lambda,z'), \tag{4.42}$$

które opisuje wszystkie możliwe trajektorie oddziaływania jako funkcji λ.

Możemy to równanie różniczkowe formalnie odcałkować. Otrzymujemy ewolucję hamiltonianu w tym modelu (w postaci całkowej).

$$V_\lambda(z,z') = V_\Delta(z,z') - \int_\lambda^\Delta ds\, V_s(z,s)\frac{1}{s}V_s(s,z'). \tag{4.43}$$

To oddziaływanie powinno opisywać dynamike stanów własnych o $E \ll \lambda$.

Pamiętamy, że podobne przybliżenie stosowaliśmy w przybliżonej metodzie algebraicznej. Możemy przypuszczać, że dla pełnej metody dostalibyśmy takie samo równanie z zamianą

$$\frac{1}{s} \quad\longrightarrow\quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda-z}+\frac{1}{\lambda-z'}\right).$$

Uwaga: Warunek początkowy dla róanania rózniczkowego,

$$V_\Delta(z,z') = -g + X_\Delta(z,z'),$$

zatem nieznane X_Δ. Powstaje pytanie, ile wynosić musi X_Δ żeby $V_\lambda(z,z')$ o skończonym λ było niezależne od Δ dla $\Delta\to\infty$? Trzeba „wcelować" warunkiem początkowym tzn. wartością (postacią) X_Δ.

Metoda kolejnych przybliżeń

Przypuśćmy, że

$$V_\Delta = -g + X_\Delta$$

I rząd rachunku,

$$V_\lambda = V_\Delta + v_{1\lambda}.$$

Dostajemy następujące równanie na $v_{1\lambda}$,

$$\begin{aligned} v_{1\lambda}(z,z') &= -g + X_\Delta - \int_\lambda^\Delta \frac{ds}{s}(-g+X_\Delta)^2 = \\ &= (-g+X_\Delta) + (-g+X_\Delta)^2 \ln\frac{\Delta}{\lambda} = \\ &= -g + X_\Delta^{(2)} - g^2 \ln\frac{\Delta}{\lambda} + \underbrace{X_\Delta^{(>2)} + (-2gX_\Delta + X_\Delta^2)\ln\frac{\Delta}{\lambda}}_{\text{wyrazy wyższego rzędu niż drugi}} \end{aligned}$$

II rząd rachunku,

$$V_\lambda = V_\Delta + v_{1\lambda} + v_{2\lambda}.$$

Też uzyskamy V_λ niezależne od z, z'.

Załóżmy zatem, że

$$V_\lambda = -g_\lambda \quad \text{(nie zależy od } z \text{ i } z').$$

Wtedy mamy równanie różniczkowe

$$\frac{d(-g_\lambda)}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda}(-g_\lambda)^2. \tag{4.44}$$

Jest to równanie różniczkowe o rozdzielonych zmiennych. Przenosimy wyrazy zależne od $(-g_\lambda)$ na lewą, a wyrazy z λ na prawą, i odcałkowujemy obie strony od λ do Δ, otrzymując

$$g_\lambda = \frac{g_\Delta}{1 + g_\Delta \ln\frac{\lambda}{\Delta}} = g_\lambda(g_\Delta).$$

W ten sposób otrzymujemy wyrażenie na g_λ w funkcji g_Δ (nieznana stała sprzężenia), dla $\Delta \to \infty$.

Załóżmy, że znamy g_λ dla $\lambda = \lambda_0$, np. z danych doświadczalnych przy pewnej skali, które analizowaliśmy używając $\mathtt{H}_{\lambda=\lambda_0}$.

Tym razem rozwiązujemy równanie różniczkowe na g_λ z warunkiem początkowym $g_\lambda(\lambda_0) = g_{\lambda_0}$, w odwrotną stronę:

$$g_\lambda = \frac{g_{\lambda_0}}{1 + g_{\lambda_0} \ln\frac{\lambda}{\lambda_0}}.$$

Końcowy wynik procedury renormalizacji przejął rolę warunku początkowego, a wzór

$$g_\Delta = \frac{g_{\lambda_0}}{1 + g_{\lambda_0} \ln\frac{\Delta}{\lambda_0}},$$

można teraz uważać za wynik końcowy.

Dla $\lambda > \lambda_0$ stała sprzężenia maleje, zaś dla $\lambda < \lambda_0$ stała sprzężenia rośnie. Zjawisko to nazywamy asymptotyczną swobodą.

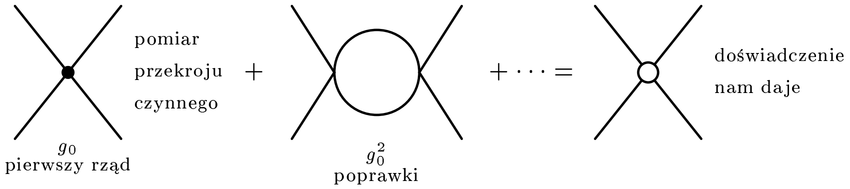
Sprawdźmy teraz, co się stanie z zaleznością od λ w równaniu własnym. Równanie własne ma postać

$$(z+m)\phi(z) - g_\lambda \int_0^\lambda dz'\, \phi(z') = E\phi(z).$$

Wstawiamy nasze znalezione g_λ

$$\phi(z) = \frac{c}{z+m-E},$$

$$c = g_\lambda \int_0^\lambda dz' \frac{c}{z'+m-E}.$$



Rysunek 4.11: Efektywne sprzężenie — obrazek

Warunek na stałą c daje:

$$1 = g_\lambda \ln \frac{\lambda + m - E}{m - E}.$$

Podstawiamy (g_0 oznacza dla skrótu g_{λ_0}).

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{g_0}{1 + g_0 \ln \frac{\lambda}{\lambda_0}} \ln \frac{\lambda + m - E}{m - E}. \\ 1 + g_0 \ln \frac{\lambda}{\lambda_0} &= g_0 \ln \frac{\lambda + m - E}{m - E}. \\ 1 &= g_0 \ln \left(\frac{\lambda + m - E}{m - E} \frac{\lambda_0}{m - E} \right). \end{aligned}$$

Weźmy $\lambda \to \infty$. Wtedy

$$1 = g_0 \ln \frac{\lambda_0}{m - E}.$$

Gdyby λ nie dążyło do ∞ mielibyśmy zależność bardziej skomplikowaną.

Dostaliśmy równanie na E, które możemy rozwiązać. Rozwiązaniem jest

$$E = m - \lambda_0 e^{-\frac{1}{g_0}}.$$

Nie ma śladu po λ w rozwiązaniu.

Przy wyprowadzaniu równania różniczkowego pominęliśmy wyrazy $m - E$ (założyliśmy, że $|m - E| \ll \lambda$). Dlatego musimy się posługiwać granicą $\lambda \to \infty$. (Patrz komentarz do wzoru (4.42)).

Równanie postaci (4.42) mozna rozwiązać w ogólniejszy sposób niż w przypadku stałej ((4.44), strona 67). Stosujemy rozkład $V_\lambda(z, z')$ na zupełny układ funkcji,

$$V_\lambda(z, z') = \sum_{m,n} a_{mn}(\lambda) f_m(z) f_n^*(z'); \tag{4.45}$$

ograniczając się do skończonej liczby członów otrzymujemy przybliżenie separowalne.

Wstawiając tę postać do równania różniczkowego, otrzymujemy

$$\frac{d}{d\lambda} a_{mn}(\lambda) f_m(z) f_n^*(z') = \frac{1}{\lambda} a_{mk}(\lambda) f_m(z) f_k^*(\lambda) f_l(\lambda) f_n^*(z') a_{ln}(\lambda).$$

Jeżeli funkcje te tworzą ortonormalny okład zupełny, to

$$\frac{d}{d\lambda} a_{mn}^{(\lambda)} = \frac{1}{\lambda} a_{mk}^{(\lambda)} f_k^*(\lambda) f_l(\lambda) a_{ln}^{(\lambda)}.$$

Wprowadźmy oznaczenie $K_{kl}^{(\lambda)}$.

Definicja 4.

$$K_{kl}^{(\lambda)} = \frac{1}{\lambda} f_k^*(\lambda) f_l(\lambda).$$

Niech $'$ oznacza pochodna po λ.
Przy tych oznaczeniach możemy zapisać nasze równania na współczynniki rozkładu a_{mn} jako

$$a' = aKa.$$

Zauważmy, że: $aa^{-1} = 1$ więc $a'a^{-1} + a(a^{-1})' = 0$, zatem $(a^{-1})' = -a^{-1}a'a^{-1}$. Widać, że przypomina to nasze równanie. Jeśli wprowadzimy oznaczenie $b := a^{-1}$, to widzimy, że $b' = b\big((-b)^{-1}\big)'b$, co oznacza, że

$$K = -\left(\frac{1}{a}\right)'.$$

Zatem

$$\left(\frac{1}{a}\right)(\lambda) = -\int_{\Delta}^{\lambda} K_s\, ds + K_{\Delta}.$$

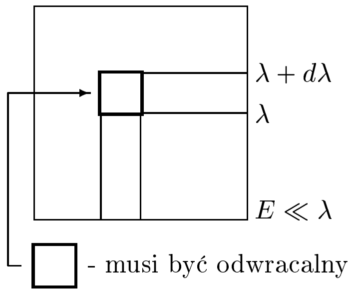
W takim razie

$$a^{(\lambda)} = \left(K_{\Delta} + \int_{\lambda}^{\Delta} ds\, K_s\right)^{-1}.$$

Rozwiązanie ma postać

$$V_{\lambda}(z, z') = \sum_{m,n} \left(\frac{1}{K_{\Delta} + \int_{\lambda}^{\Delta} ds\, K_s}\right)_{mn} f_m(z) f_n^*(z') \tag{4.46}$$

4.4.7 Problemy metody renormalizacji Wilsona



Rysunek 4.12: Renormalizacja Wilsona — podejście różniczkowe — problemy

Problemy:

1. $\square$ może nie mieć odwrotności.

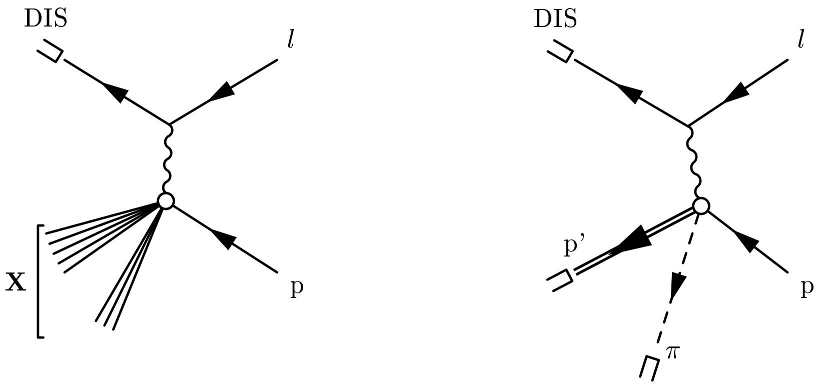
2. W przypadku rachunku zaburzeń degeneracja uniemożliwia naiwny rachunek zaburzeń (w przypadku dużej degeneracji znacząco utrudniony jest rachunek zaburzeń), a degeneracja ciągłego i dyskretnego widma w QFT jest ogromna.

3. Problem faktoryzacji części wysokoenergetycznej od niskoenergetycznej (czy jest możliwa w metodzie Wilsona? — zakładamy, że jest).

   Hipoteza: daje się odseparować procesy wysokoenergetyczne od niskoenergetycznych (patrz rysunek 4.14).

   Hipoteza: można to faktoryzować jak na rysunku 4.14, i nie zajmować się wszystkim na raz, nie uwzględniać tych korelacji (tzn. korelacje są nieistotne numerycznie lub uwzględnione za pomocą modelu).

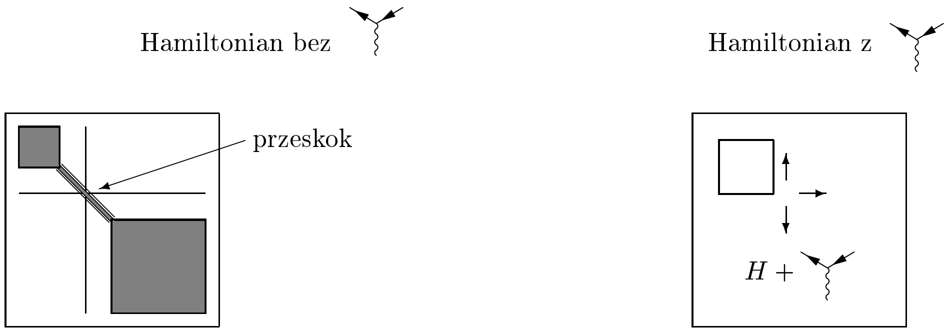
   Nie wiemy jednak, czy te hipotezy sprawdzają się w kwantowej teorii pola.



proces inkluzywny proces ekskluzywny
pomiędzy: semiinkluzywny, semiekskluzywny

Rysunek 4.13: Procesy inkluzywne i ekskluzywne

...
[Rysunek do zrobienia]
...



faktoryzacja wszystko rozgrywa się w wysokich energiach

Rysunek 4.14: Faktoryzacja w DIS

4. Następny problemem jest utrata niezalezności od E:

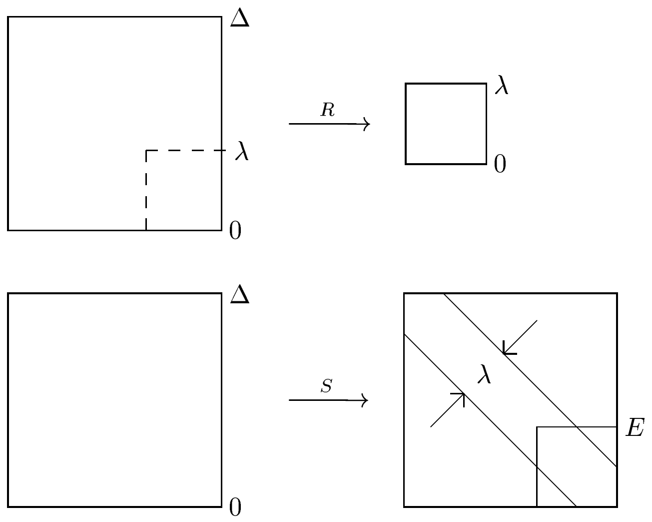
$$\int \frac{ds}{s+m-E} V_s(z,s)V_s(s,z') \approx \int \frac{ds}{s}\left(1+\frac{m-E}{s}+\ldots\right)V_s(z,s)V_s(s,z') \rightarrow$$
$$\rightarrow V_\lambda(z,z').$$

Teoria rozbieżności logarytmicznych dotyczy tylko pierwszego wyrazu tego rozwinięcia. Zobaczmy co się dzieje, gdy uwzględnimy drugi wyraz, tzn.

$$(m-E)\int \frac{ds}{s^2} V_s(z,s)V_s(s,z') \rightarrow V_\lambda(z,z').$$

Ten wyraz prowadzi do $V_\lambda(z,z') = V_\lambda(z,z',E)$.

Ale, gdy $|V_s(z,s)|$ majoryzuje się przez stała dla $s \to \infty$ i $z \leq \lambda$, to całka jest zbieżna i zależność od E nie pojawia sie w X_Δ. W konsekwencji, X_Δ jest określone w pełni dla $\Delta \to \infty$ z pierwszego członu rozwinięcia, niezależnego od $E \ll \lambda$. Natomiast wtedy, gdy $|V_s(z,s)|$ nie majoryzuje się przez stałą, drugi człon staje się rozbieżny i metoda nie daje uniwersalnej postaci X_Δ, bo X_Δ zaczyna zależeć od E. Istotą wsólczesnych metod renormalizacji w QFT jest to, że rozbieżności są wyłącznie logarytmiczne, jak w pierwszym wyrazie. W hamiltonianach kwantowej teorii pola pojawiają się potencjały nie majoryzowalne przez stałe, i dlatego potrzebna nam nowa teoria.



Rysunek 4.15: Porównanie renormalizacji za pomocą operacji R i renormalizacji przez podobieństwo

Oddziaływania zależne od pędów (typowe – np. teoria Fermiego) dają $V^2 \sim s$ i X_Δ zależy od E.

5. $X_\Delta(E)$ dla $V_s(s,z) \sim s$ — czyli początkowy hamiltonian musi wiedzieć co liczymy (błędne koło).

Uwagi:

Regularyzacja wymiarowa w rachunku feynmannowskim prowadzi do całek zawierających dodatnie potęgi pędu. Kładzie się je równe zeru.

$$\int d^D k \, k^n = 0 \qquad \text{kiedy } n \geq 0.$$

Krok ten wykonuje się po obrocie Wicka w przestrzeni Euklidesowej — w hamiltonowskim sformułowaniu „nie ma czasu” i nie ma takiej możliwości.

4.5 Renormalizacja za pomocą transformacji podobieństwa

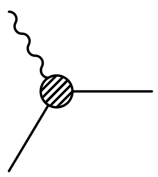
Zalety:

1. Nie ma problemu z degeneracją.
2. Nie ma problemu z eliminacją stanów (z krawędzią $E = \lambda$).
3. $\mathtt{H}_\lambda$ ma tę cechę, że $\langle m|\mathtt{H}_\lambda|n\rangle = 0$ dla $\Delta E_{mn} > \lambda$, czyli oddziaływania są miękkie.

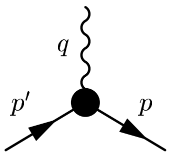
4.5.1 Idea znajdowania kontrczłonów — metoda algebraiczna

Chcemy znaleźć kontrczłon X_Δ w renormalizacji za pomocą trnasformacji podobieństwa.

$$\begin{aligned}
\langle z|\mathtt{H}_\infty|z'\rangle &= \delta(z-z')(z+m) - g \\
\langle z|\mathtt{H}_\Delta|z'\rangle &= \Theta(\Delta - z)\Theta(\Delta - z')\big[\delta(z-z')(z+m) - g + \\
&\quad + X_\Delta(z,z')\big]
\end{aligned}$$



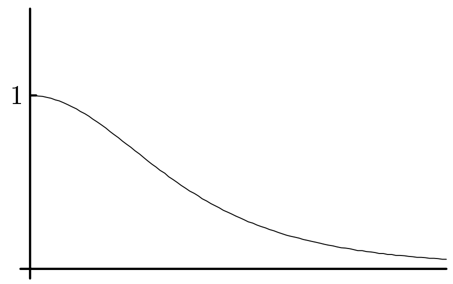
wierzchołek efektywny

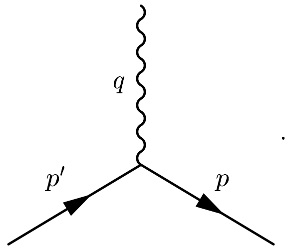


$$= F(q^2)(p^{'\mu} + p^{\mu}) \qquad\qquad q^2 = -Q^2$$

$F(q^2)$ — czynnik kształtu (formfaktor)

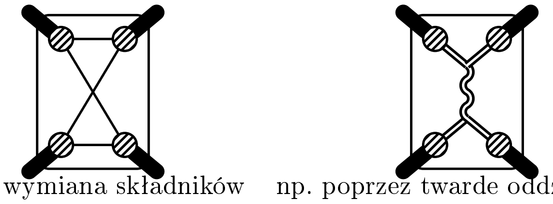
$$G_{M,E\,p}(Q^2) = \frac{1}{\left(1 + \frac{Q^2}{0.71\mathrm{GeV}^2}\right)^2} \sim \frac{1}{Q^4}$$





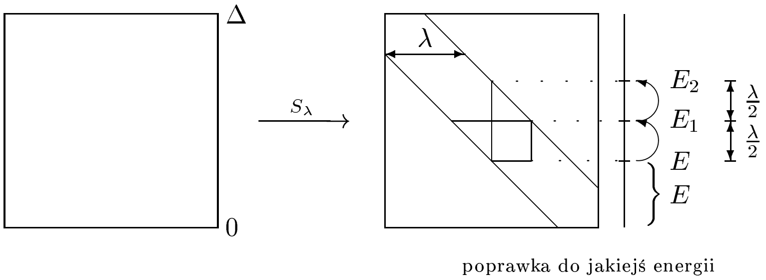
$$\cdot\, f_\lambda(\vec{q}, \vec{p}, \vec{q}') \xrightarrow[\frac{|\vec{q}|}{\lambda} \to \infty]{} 0$$

Rysunek 4.16: Cząstki efektywne, wierzchołki efektywne, czynniki kształtu



np. wymiana składników np. poprzez twarde oddziaływania

Rysunek 4.17: Zderzenia cząstek efektywnych



Rysunek 4.18: Poprawki do energii liczone z wąskiego $\mathtt{H}_\lambda$

W renormalizacji metodą Wilsona mieliśmy warunek, ze $\mathtt{H}_\lambda$ ma elementy macierzowe niezależne od Δ.

$$\langle n|\mathtt{H}_I \frac{1'}{E_m - \mathtt{H}_0} \mathtt{H}_I \frac{1'}{E_n - \mathtt{H}_0} \mathtt{H}_I |n\rangle = `DE_{nm}$$

musimy wrócić

$$E_{\max} \sim n\frac{\tilde{\lambda}}{4} + E$$
$$E_{\max} \sim \frac{n}{2}\lambda + E$$

Jeśli λ jest skończone ($\lambda < \infty$) i $\Delta \to \infty$, to $2\frac{\Delta}{\lambda}$ rzędów rachunku zaburzeń jest niezależnych od Δ i liczba ta $\to \infty$

Metoda szukania X_Δ

Jeżeli elementy macierzowe $\mathtt{H}_\lambda$ o skończonych indeksach nie zależą od regularyzacji, to spektrum $\mathtt{H}_\lambda$ jest niezależne od regularyzacji do rzędu $\simeq \frac{\Delta}{\lambda}$. $\frac{\Delta}{\lambda} \to \infty$ przy $\Delta \to \infty$ (usuwamy regularyzację). Jest to słabszy warunek na niezależność wyniku od regularyzacji niż poprzednie dla małego hamiltonianu $\mathtt{H}_\lambda$ przy renormalizacji za pomocą transformacji R.

4.5.2 Znajdowanie transformacji podobieństwa

Słabszy warunek (na niezależność wyniku od regularyzacji). Wprowadźmy na potrzeby tego warunku oznaczenie $\mathtt{H}'$ na hamiltonian po transformacji: $\mathtt{H} \xrightarrow{S} \mathtt{H}'$. $\mathtt{H}'$ ma mieć te same wartości własne, musi być więc podobny do $\mathtt{H}$: $\mathtt{H}' = S^{-1}\mathtt{H}S$. Jeśli S jest operacją unitarną (zachowującą prawdopodobieństwo), to $S^{-1} = S^\dagger$, zatem $\mathtt{H}' = S^\dagger \mathtt{H} S$. S możemy zapisać jako $S = 1 + T$. Część swobodna hamiltonianu $\mathtt{H}_0$ jest diagonalna; $T \to 0 \mathrm{gdy} \mathtt{H}_I \to 0$ Rozpisując hamiltonian na część swobodną i oddziaływanie, i wymagając unitarności S dla uproszczenia obliczeń dla S^{-1}, otrzymujemy

$$\mathtt{H}'_0 + \mathtt{H}'_I = (1 + T^\dagger)(\mathtt{H}_0 + \mathtt{H}_I)(1 + T)$$

Powstaje pytanie, jak sformułować warunek, żeby elementy macierzowe poza pasmem przydiagonalnym o szerokości λ było równe 0 (lub bliskie 0). Mamy

$$\begin{aligned}\mathtt{H}'_0 + \mathtt{H}'_I &= (1 + T^\dagger)(\mathtt{H}_0 + \mathtt{H}_I)(1 + T) = \\ &= \mathtt{H}_0 + \mathtt{H}_I + T^\dagger(\mathtt{H}_0 + \mathtt{H}_I) + (\mathtt{H}_0 + \mathtt{H}_I)T + \\ &\quad + T^\dagger(\mathtt{H}_0 + \mathtt{H}_I)T.\end{aligned}$$

Dostajemy stąd równanie na $\mathtt{H}'_I$, zakładając, że $\mathtt{H}_0 = \mathtt{H}'_0$;

$$\mathtt{H}'_I = \mathtt{H}_I + T^\dagger \mathtt{H} + \mathtt{H}T + T^\dagger \mathtt{H} T.$$

Rozłóżmy T na część hermitowską i antyhermitowską,

$$T = h + a,$$

gdzie

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2}\left(T + T^\dagger\right) && \text{— część hermitowska} \\ a &= \frac{1}{2}\left(T - T^\dagger\right) && \text{— część antyhermitowska} \end{aligned}$$

Unitarność S

$$S^\dagger S = SS^\dagger = 1,$$

implikuje

$$\begin{gathered} (1+T^\dagger)(1+T) = (1+T)(1+T^\dagger) = 1, \\ \Downarrow \\ T^\dagger T + T + T^\dagger = TT^\dagger + T + T^\dagger = 0, \\ \Downarrow \\ TT^\dagger = T^\dagger T. \end{gathered}$$

Dostaliśmy, że $[T, T^\dagger] = 0$, czyli T jest operatorem normalnym.

Zobaczmy jakie to narzuca warunki na część hermitowską h i antyhermitowską a operatora $T = h + a$:

$$\begin{gathered} TT^\dagger = T^\dagger T, \\ (h+a)(h-a) = (h-a)(h+a), \end{gathered}$$

$$[a, h] = 0.$$

Z drugiego równania (czyli z $S^\dagger S = SS^\dagger$) dostajemy

$$\begin{gathered} TT^\dagger + T + T^\dagger = 0, \\ (h+a)(h-a) + 2h = 0, \end{gathered}$$

$$h = \frac{1}{2}\left(a^2 - h^2\right).$$

To oznacza, że jeśli rozwiniemy T w rzędach stałej sprzężenia

$$T \sim \mathtt{H}_I + \mathtt{H}_I^2 + \dots,$$

to dla a i h mamy

$$\begin{gathered} a \sim \mathrm{o}(\mathtt{H}_I), \\ h \sim \mathrm{o}(\mathtt{H}_I^2). \end{gathered}$$

W szczególności rozwinięcie perturbacyjne części hermitowska h operatora T zaczyna się od drugiego rzędu.

Wynika z tego, że możemy liczyć rząd po rzędzie części hermitowską i antyhermitowska operatora T niezależnie, tzn. zawsze liczenie $a^{(n)}$ poprzedza liczenie $h^{(n)}$:

$$h = \frac{1}{2}(a^2 - h^2),$$

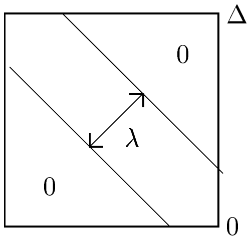
$$\begin{aligned}
h^{(1)} &= 0,\\
h^{(2)} &= \frac{1}{2}(a^{(2)})^2,\\
h^{(3)} &= \frac{1}{2}(a^{(2)}a^{(1)} + a^{(1)}a^{(2)}),\\
h^{(4)} &= \frac{1}{2}(a^{(1)}a^{(3)} + \cdots - h^{(2)}h^{(2)}), \quad \text{itd.}
\end{aligned}$$

Rozpiszmy równanie na $\mathtt{H}'_I$, podstawiając postać $T = a + h$ i grupując wyrazy w najniższych rzędach g:

$$\begin{aligned}
\mathtt{H}'_I &= \mathtt{H}_I + T^\dagger \mathtt{H} + \mathtt{H}T + T^\dagger \mathtt{H} T =\\
&= \mathtt{H}_I + (h-a)(\mathtt{H}_0 + \mathtt{H}_I) + (\mathtt{H}_0 + \mathtt{H}_I)(h-a) +\\
&\qquad + (h-a)(\mathtt{H}_0 + \mathtt{H}_I)(h+a) =\\
&= \mathtt{H}_I - a\mathtt{H}_0 - \mathtt{H}_0 a +\\
&+ h\mathtt{H}_0 - a\mathtt{H}_I + \mathtt{H}_0 h - \mathtt{H}_I a - a\mathtt{H}_0 a +\\
&+ h\mathtt{H}_I + \mathtt{H}_I h + h\mathtt{H}_0 a - a\mathtt{H}_0 h - a\mathtt{H}_I a +\\
&+ h\mathtt{H}_0 h +\\
&+ h\mathtt{H}_I h.
\end{aligned}$$

Ważne:

Mamy *jedno* równanie na *dwie* niewiadome: $\mathtt{H}'_I$ i $T = a + h$. Potrzebny jest dodatkowy warunek. Do tej pory żądaliśmy tylko unitarności macierzy S, a niczego od tego jak ona działa — że powinna dawać macierz przydiagonalną.

Dodatkowy warunek: 

.

Możemy go spełnić (wymóc) pisząc:

$$\begin{aligned}
\mathtt{H}'_I = \mathtt{H}_I &+ [\mathtt{H}_0, a] + \{\mathtt{H}_0, h\} +\\
&+ [\mathtt{H}_I, a] + \{\mathtt{H}_I, h\} +\\
&+ (h-a)\mathtt{H}(h+a).
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Tylko wyrazy $\mathtt{H}_I + [\mathtt{H}_0, a]$ mogą być pierwszego rzędu w g. Możemy wydzielić człony zawierające wyrazy pierwszego rzędu i człony zawierające tylko wyrazy wyższego rzędu, i zapisać

$$\mathtt{H}'_I + [a, \mathtt{H}_0] = \underbrace{\mathtt{H}_I}_{\text{wyr. znane}} + \underbrace{[\mathtt{H}_I, a] + \{\mathtt{H}, h\} + (h-a)\mathtt{H}(h+a)}_{\text{wyrazy wyższego rzędu niż po lewej stronie}} =: Q$$

Znając $a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}$ i $h^{(2)}, \ldots, h^{(n)}$ można znaleźć $a^{(n+1)}$ i $h^{(n+1)}$ oraz $\mathtt{H}_I^{(n+1)}$.

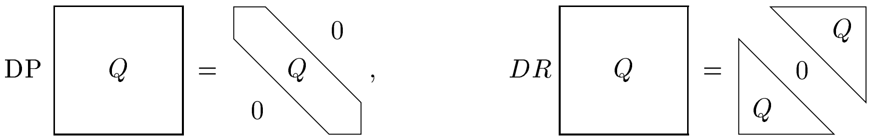
Znając $a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}$ i $h^{(2)}, \ldots, h^{(n)}$ można wyliczyć $Q^{(n+1)}$ i znaleźć $\mathtt{H}_I^{'(n+1)}$, usuwając zależność w $\mathtt{H}_I^{'(n+1)}$ od regularyzacji za pomocą $X_\Delta^{(n+1)}$.

Znając $Q^{(1)}, \ldots, Q^{(n)}$ możemy znaleźć $Q^{(n+1)}$ i $X_\Delta^{(n+1)}$.

Narzucamy żądanie, aby operacja S dawała macierz przydiagonalną.

$$\mathtt{H}'_{I\lambda} = \mathrm{DP}[Q], \qquad [a_\lambda, \mathtt{H}_0] = \mathrm{DR}[Q],$$

gdzie $\mathrm{DP}[Q]$ oznacza część bliską diagonali, a $\mathrm{DR}[Q]$ część daleką od diagonali (patrz rysunek 4.19). Z definicji $\mathrm{DP} + \mathrm{DR} = 1$.



Rysunek 4.19: Definicja $\mathrm{DP}[Q]$ i $\mathrm{DR}[Q]$

Zatem

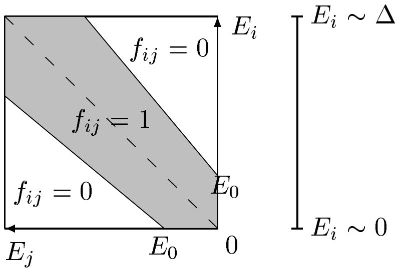
$$\mathtt{H}'_{I\lambda} + [a_\lambda, \mathtt{H}_0] = \mathrm{DP}[Q] + \mathrm{DR}[Q].$$

Wprowadźmy następujące oznaczenie na elementy macierzowe operatora. Niech $\langle j|Q|i\rangle = Q_{ij}$. Wówczas

$$\big(\mathrm{DP}[Q]\big)_{ij} = f_{ij} Q_{ij}$$
$$\big(\mathrm{DR}[Q]\big)_{ij} = (1 - f_{ij}) Q_{ij}$$

gdzie f_{ij} — czynnik „similarity", nazwijmy go czynnikiem „podobieństwa".

Możemy przyjąć f_{ij} w postaci (patrz rysunek 4.20)



Rysunek 4.20: f_{ij} — czynnik similarity

$$f_{ij} = \begin{cases} 1 & (\beta+1)|E_i - E_j| \le (\beta-1)(E_i+E_j) + 2E_0 \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}. \tag{4.48}$$

Warunek w definicji f_{ij} oznacza, że gdy

$$\begin{aligned} E_i > E_j, \text{ to } \ (\beta+1)(E_i - E_j) &\le (\beta-1)(E_i+E_j) + 2E_0, \\ 2E_i &\le (\beta - 1 + \beta + 1)E_j + 2E_0, \\ E_i &\le \beta E_j + E_0; \end{aligned}$$

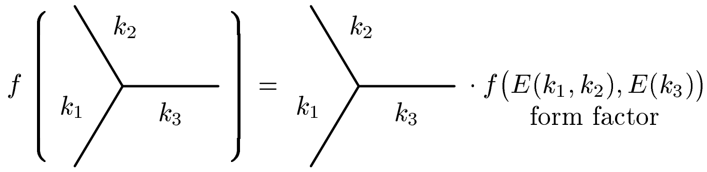
a gdy

$$\begin{aligned} E_i < E_j, \text{ to } \ (\beta+1)(E_j - E_i) &\le (\beta-1)(E_i+E_j) + 2E_0, \\ 2E_j &\le (\beta - 1 + \beta + 1)E_i + 2E_0, \\ E_i &\ge \frac{1}{\beta}\left(E_j + E_0\right). \end{aligned}$$

Notacja

$$\begin{aligned}\mathrm{DP}[Q] &\equiv f[Q] \equiv fQ,\\ \mathrm{DR}[Q] &\equiv (1-f)[Q] \equiv (1-f)Q,\end{aligned}$$

(patrz rysunek 4.21 dla uzasadnienia tej notacji).



oddziałujące cząstki są efektywne, gdyż nie mogą absorbować duzych przekazów pedu z powodu obecności czynnika f.

Rysunek 4.21: Notacja $f\mathtt{H}_I$

4.5.3 Hamiltonian efektywny metodą algebraiczną

Obliczamy rząd po rzędzie hamiltonian efektywny (o szerokości λ). Metoda algebraiczna zakłada, że $f(1-f) \equiv 0$.
[•]„Renormalization of Hamiltonians" PRD (1993).
W pierwszym rzędzie w stałej oddziaływania mamy

$$\begin{aligned}Q^{(1)} &= \mathtt{H}_I^{(1)},\\ \mathtt{H}_I^{'(1)} &= f\mathtt{H}_I^{(1)},\end{aligned}$$

$$[a^{(1)}, \mathtt{H}_0] = (1-f)Q^{(1)},$$

$$a_{ej}^{(1)} = \frac{(1-f_{ij})Q_{ij}^{(1)}}{E_j - E_i}.$$

Wydawać by się mogło, że pojawia się problem z mianownikami energetycznymi. Jednak dzięki żądaniu ograniczonej szerokości macierzy $\mathtt{H}_I^{'(1)}$, mamy czynnik similarity (form factor) $1-f$, który zabija małe mianowniki energetyczne w wyrażeniach na a_{ij}: kiedy E_i bliskie E_j) $\Rightarrow f_{ij} = 1 \Rightarrow a_{ij} = 0$, ponieważ $a_{ij} \equiv 0$ jeśli

$$|E_i - E_j| < \frac{1-\beta}{1+\beta}(E_i + E_j) + \frac{2}{1+\beta}E_0.$$

Gdy $\beta \to 1$, wtedy $|E_i - E_j| < E_0 \sim \lambda$.
W drugim rzędzie w stałej oddziaływania otrzymujemy

$$\begin{aligned}\mathtt{H}_I^{'(2)} &= fQ^{(2)},\\ Q^{(2)} &= \mathtt{H}_I^{(2)} + [\mathtt{H}_0, h^{(2)}] + [\mathtt{H}_I^{(1)}, a^{(1)}] - a^{(1)}\mathtt{H}_0 a^{(1)}.\end{aligned}$$

Skorzystaliśmy z tego, że $h \sim (\mathtt{H}_I)^2$.
Pamiętając, że $\mathtt{H}_I^{(2)} = X_\Delta^{(2)}$ oraz, że $h^{(2)} = \frac{1}{2}a_{(1)}^2$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\mathtt{H}_{I\lambda}^{'(2)} &= f_\lambda Q^{(2)}\\ Q^{(2)} &= X_\Delta^{(2)} + \frac{1}{2}\big(\mathtt{H}_0 a_{(1)}^2 + a_{(1)}^2\mathtt{H}_0\big) + \big(\mathtt{H}_I^{(1)} a_{(1)} - a_{(1)}\mathtt{H}_I^{(1)}\big) - a_{(1)}\mathtt{H}_0 a_{(1)}.\end{aligned}$$

Korzystamy z $[a^{(1)}, \mathtt{H}_0] = (1-f)Q^{(1)} = (1-f)\mathtt{H}_I^{(1)}$,

$$\begin{aligned} Q^{(2)} &= X_\Delta^{(2)} + \frac{1}{2}[\mathtt{H}_0, a^{(1)}]a^{(1)} + \frac{1}{2}a^{(1)}[a^{(1)}, \mathtt{H}_0] + [\mathtt{H}_I^{(1)}, a^{(1)}] = \\ &= X_\Delta^{(2)} + \frac{1}{2}(f-1)\mathtt{H}_I^{(1)}a^{(1)} + \frac{1}{2}a^{(1)}(1-f)\mathtt{H}_I^{(1)} + \\ &\quad + \mathtt{H}_I^{(1)}a^{(1)} - a^{(1)}\mathtt{H}_I^{(1)}, \end{aligned}$$

i upraszczamy tę postać do

$$Q^{(2)} = X_\Delta^{(1)} + \frac{1}{2}(1+f)\mathtt{H}_I^{(1)}a^{(1)} - \frac{1}{2}a^{(1)}(1+f)\mathtt{H}_I^{(1)}.$$

Zapisujemy wynik jako komutator

$$Q^{(2)} = X_\Delta^{(1)} + \frac{1}{2}\left[(1+f)\mathtt{H}_I^{(1)}, a^{(1)}\right].$$

Korzystamy z

$$[a^{(1)}, \mathtt{H}_0] = (1-f)Q^{(1)} = (1-f)\mathtt{H}_I^{(1)},$$

i otrzymujemy równanie na elementy macierzowe:

$$\begin{aligned} Q_{ij}^{(1)} &= X_{\Delta\,ij}^{(1)} + \frac{1}{2}\left[(1+f)\mathtt{H}_I^{(1)}, a^{(1)}\right]_{ij} \\ &= X_{\Delta\,ij}^{(1)} + \frac{1}{2}\sum_k \left\{(1+f_{ik})\mathtt{H}_{I\,ik}^{(1)}a_{kj}^{(1)} - a_{ik}^{(1)}\mathtt{H}_{I\,kj}^{(1)}\right\}. \end{aligned}$$

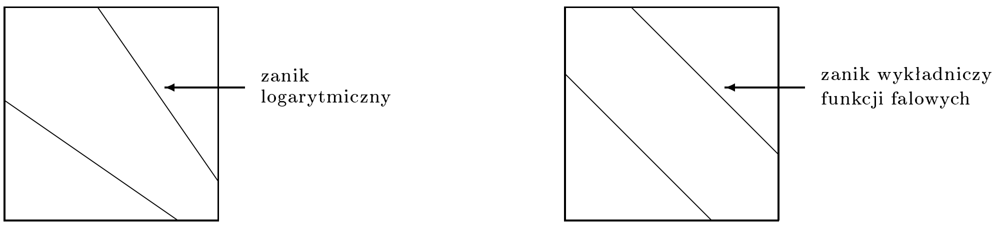
Mamy

$$\begin{aligned} a_{kj}^{(1)} &= \frac{\mathtt{H}_{I\,kj}^{(1)}(1-f_{kj})}{E_k - E_j}, \\ a_{ik}^{(1)} &= \frac{\mathtt{H}_{I\,ik}^{(1)}(1-f_{ik})}{E_i - E_k}. \end{aligned}$$

Zatem ostatecznie w drugim rzędzie

$$Q_{ij}^{(1)} = X_{\Delta\,ij}^{(1)} + \frac{1}{2}\sum_k \mathtt{H}_{I\,ik}^{(1)}\mathtt{H}_{I\,kj}^{(1)} \left(\frac{(1+f_{ik})(1-f_{kj})}{E_j - E_k} - \frac{(1-f_{ik})(1+f_{kj})}{E_k - E_j}\right).$$

Nie ma wartości własnych pełnego hamiltonianu w tym wyniku, a mianowniki są większe od $E_0 \equiv \lambda$.



Rysunek 4.22: Różne „sposoby" ograniczenia szerokości hamiltonianu

$$\mathtt{H}_{I\,ij}^{'(2)} = f_{ij}Q_{ij}^{(2)}.$$

Pozostaje pytanie o postać kontrczłonu,

$$f_{ij} X^{(1)}_{\Delta\, ij} = \ ?$$

$X^{(2)}_{\Delta\, ij}$ usuwa zależność od Δ (od regularyzacji) z $\mathtt{H}'^{(2)}_{I\, ij} \sim f_{ij} Q^{(2)}_{ij}$. X_Δ można odczytywać z Q „dzieląc" przez f_{ij}. Tzn. X_Δ usuwa zależność od regularyzacji z Q_{ij} dla $E_i, E_j \ll \Delta$.

Gdy E_i i E_j są skończone, to zależność od regularyzacji bierze się z energii pośrednich $E_k \gg E_i, E_j$. Niech $E_N = \Delta$. Możemy podzielić sumę po energiach na dwie części

$$X^{(2)}_{\Delta\, ij} + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{i+j} + \sum_{k=i+j+1}^{N}\right)\Big[\dots\Big] = X^{(2)}_{\Delta\, ij} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{i+j}\Big[\dots\Big]}_{\substack{\text{nie ma zależności}\\ \text{od regularyzacji}}} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{k=i+j+1}^{N}\Big[\dots\Big]}_{\substack{E_k > E_j + E_k \\ \\ f_{ik}=0 \\ f_{kj}=0}}$$

$X^{(2)}_{\Delta\, ij}$ usuwa zależność od regularyzacji z sumy

$$\frac{1}{2}\sum_{k=i+j+1}^{N}\left(\frac{1}{E_i - E_k} + \frac{1}{E_j - E_k}\right)\mathtt{H}^{(1)}_{I\, ik}\mathtt{H}^{(1)}_{I\, kj}$$

W notacji ciągłej mamy warunek, że

$$X^{(2)}_{\Delta}(z,z') + \frac{1}{2}\int_{z+z'}^{\Delta} ds\,\left(\frac{1}{z-s} + \frac{1}{z'-s}\right)(-g)^2$$

ma być niezależne od Δ (patrz wcześniej).

Odcałkowujemy

$$X^{(2)}_{\Delta}(z,z') - \frac{1}{2}\left(\ln\frac{\Delta - z}{z'} + \ln\frac{\Delta - z'}{z}\right)(-g)^2 =$$
$$= X^{(2)}_{\Delta}(z,z') - g^2 \ln\frac{\Delta}{\mu} - g^2\frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{z'z}$$

Dostaliśmy zatem

$$X^{(2)}_{\Delta\, ij} = g^2 \ln\frac{\Delta}{\mu}.$$

Poprawka do stałej sprzężenia w $\mathtt{H}_\Delta$ wynosi więc

$$-g + g^2\ln\frac{\Delta}{\mu_0} = -g\left(1 - g\ln\frac{\Delta}{\mu_0}\right)$$

W ten sposób $\mathtt{H}_\lambda$ można wyliczać metodą transformacji podobieństwa rząd po rzędzie w rachunku zaburzeń.

4.5.4 Metoda wykorzystująca równania różniczkowe

Chcemy znaleźć $\mathtt{H}_\lambda$. Gdy znamy transformację podobieństwa S_λ, to $\mathcal{H}_\lambda$ możemy wyliczyć rozwiązując równanie różniczkowe:

$$\frac{d\mathtt{H}_\lambda}{d\lambda} = \left[T_\lambda, \mathtt{H}_\lambda\right].$$

Wystarczy znać

$$T_\lambda = -S^\dagger_\lambda \frac{dS_\lambda}{d\lambda}$$

i warunki początkowe

$$\mathtt{H}_\infty = X_\Delta + \mathtt{H}_{\mathrm{pocz}}.$$

Uwaga: $\mathtt{H}_\infty \equiv \mathtt{H}_{\lambda > \Delta}$.

Dowód

Różniczkujemy równanie $\mathtt{H}_\lambda = S_\lambda^\dagger \mathtt{H} S_\lambda$ po λ, otrzymując

$$\frac{d\mathtt{H}_\lambda}{d\lambda} = \frac{dS_\lambda^\dagger}{d\mathtt{H}} S_\lambda + S_\lambda^\dagger \mathtt{H} \frac{dS_\lambda}{d\lambda}.$$

Korzystając ze wzoru na pochodną iloczynu dostajemy wniosek z $S_\lambda^\dagger S_\lambda = S_\lambda S_\lambda^\dagger = 1$, że

$$\frac{dS_\lambda^\dagger}{d\lambda} S_\lambda = -S_\lambda^\dagger \frac{dS_\lambda}{d\lambda},$$
$$\frac{dS_\lambda^\dagger}{d\lambda} = -S_\lambda^\dagger \frac{dS_\lambda}{d\lambda} S_\lambda^\dagger.$$

Podstawiając te wzory do równania różniczkowego na $\mathtt{H}_\lambda$ dostajemy:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathtt{H}_\lambda}{d\lambda} &= -S_\lambda^\dagger \frac{dS_\lambda}{d\lambda} S_\lambda^\dagger \mathtt{H} S_\lambda + S_\lambda^\dagger \mathtt{H} S_\lambda S_\lambda^\dagger \frac{dS_\lambda}{d\lambda} \\ &= \left[\mathtt{H}_\lambda, S_\lambda^\dagger \frac{dS_\lambda}{d\lambda}\right],\end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy ponownie z faktu, że $\mathtt{H}_\lambda = S_\lambda^\dagger \mathtt{H} S_\lambda$. Zatem definiując T_λ jako

$$T_\lambda = -S_\lambda^\dagger \frac{dS_\lambda}{d\lambda},$$

(*uwaga* — to nowe T ma niewiele wspólnego z poprzednim T (to poprzednie będziemy oznaczać teraz przez $\breve{T}$) poza tym, że też *generuje* transformację podobieństwa) dostajemy nasze równanie różniczkowe na $\mathtt{H}_\lambda$.

X_Δ wyznaczamy dobierając tak warunki początkowe tak, by $\mathtt{H}_\lambda$ miał elementy macierzowe o skończonym indeksach niezależne od $\Delta \to \infty$.

Musimy najpierw określić T_λ. Wiemy, że w tej definicji tkwi warunek, aby $\mathtt{H}_\lambda$ był „wąski".

Heurystyka rachunku zaburzeń (korzystamy z tego, co wyliczyliśmy w poprzedniej metodzie) dyktuje

$$S = 1 + \breve{T} = 1 + (a + h).$$

Z definicji T,

$$\begin{aligned}T &= -S^\dagger \frac{dS}{d\lambda} \\ &= -(1 + \breve{T})^\dagger \frac{d\breve{T}}{d\lambda} \\ &= -(1 + h - a) \frac{d(a+h)}{d\lambda} \\ &\approx -\frac{da}{d\lambda} \quad \text{w pierwszym rzędzie.}\end{aligned}$$

Mieliśmy poprzednio

$$[a, \mathtt{H}_0] = (1 - f_\lambda)\, \mathtt{H}_I,$$

zatem różniczkując po λ

$$\left[\frac{da}{d\lambda}, \mathtt{H}_0\right] = \left[(1 - f_\lambda)\mathtt{H}_I\right]'.$$

Proponujemy więc

$$[T_\lambda, \mathtt{H}_{0\lambda}] = \Big[(1-f_\lambda)\mathtt{H}_\lambda\Big]'. \tag{4.49}$$

Dzielimy hamiltonian $\mathtt{H}_\lambda$ na część swobodną (diagonalę) i oddziaływanie

$$\begin{aligned} \mathtt{H}_\lambda &= \mathtt{H}_{0\lambda} + \mathtt{H}_{I\lambda}, \\ f_{\lambda\, ij} &= f_\lambda(E_{\lambda i}, E_{\lambda j}), \end{aligned}$$

w bazie stanów własnych $\mathtt{H}_{0\lambda}$; $E_{\lambda i}$ są wartościami własnymi hamiltonianu $\mathtt{H}_\lambda$.

Widać, że

$$\begin{aligned} (1-f_\lambda)\mathtt{H}_{0\lambda} &\equiv 0, \quad \text{czyli} \\ (1-f_\lambda)\mathtt{H}_\lambda &= (1-f_\lambda)\mathtt{H}_{I\lambda} \end{aligned}$$

Wegner: (fizyka ciała stałego)

$$\begin{aligned} -T_\lambda &= [\mathtt{H}_{0\lambda}, \mathtt{H}_\lambda], \\ \mathtt{H}_{0\lambda} &= \mathtt{H}_0. \end{aligned}$$

Wtedy

$$\frac{d\mathtt{H}_{I\lambda}}{ds} = \Big[\Big[\mathtt{H}_0, \mathtt{H}_{I\lambda}\Big], \mathtt{H}_0 + \mathtt{H}_{I\lambda}\Big].$$

Rozważmy tę wersję w najniższym rzędzie. Wyrzucamy ostatnie $\mathtt{H}_{I\lambda}$ z komutatora, bo da ono wyrazy wyższego rzędu. Dostajemy następujące równanie różniczkowe na elementy macierzowe efektywnego hamiltonianu [oddziaływania]

$$\begin{aligned} \frac{d\mathtt{H}_{I\,ij}}{ds} &= \left[2\mathtt{H}_0\mathtt{H}_I\mathtt{H}_0 - \mathtt{H}_I\mathtt{H}_0^2 - \mathtt{H}_0^2\mathtt{H}_I\right]_{ij} \\ &= \mathtt{H}_{I\,ij}\left(2E_iE_j - E_i^2 - E_j^2\right) \\ &= -\left(E_i - E_j\right)^2 \mathtt{H}_{I\,ij}. \end{aligned}$$

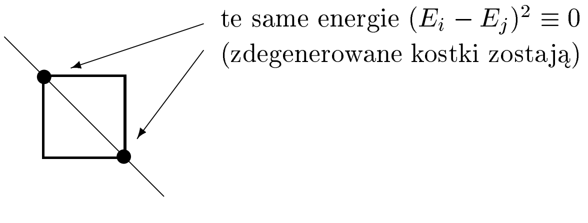
To równanie różniczkowe ma rozwiązania postaci

$$\mathtt{H}_{I\,ij}(s) = e^{-s(E_i-E_j)^2}\mathtt{H}_{I\,ij}(0).$$

Ponieważ parametr s w metodzie Wegnera wiąże się z naszym parametrem λ, czyli szerokością (energetyczna) efektywnego hamiltonianu, wzorem $s = \frac{1}{\lambda^2}$ zatem (w metodzie Wegnera)

$$f_{ij} = e^{-\frac{(E_i-E_j)^2}{\lambda^2}}.$$

Otrzymaliśmy gaussowski czynnik zwężający [hamiltonian].



Rysunek 4.23: Kiedy metoda Wegnera zostawia bloki

Problemy w metodzie Wegnera

1. brak rozszerzania (techniczny problem teorii renormalizacji potrzebny do szacowania przez sumę energii [potrzebny do dowodu renormalizowalności teorii])
2. brak niezmienniczości względem boostów (ogólnie: utrata symetrii teorii), bo $[\mathtt{H}_0, \mathtt{H}_I]$ zależy od układu odniesienia.

$$\begin{aligned} \frac{d\mathtt{H}_\lambda}{d\lambda} &= -\left[T_\lambda, \mathtt{H}_\lambda\right], \\ \left[T_\lambda, \mathtt{H}_{0\lambda}\right] &= \left[(f - f_\lambda)\mathtt{H}_\lambda\right]'. \end{aligned}$$

Hamiltonian zapisujemy jako wąski, z definicji,

$$\mathtt{H}_\lambda = f_\lambda G_\lambda.$$

Podstawiając tę postać do równania na $\mathtt{H}_\lambda$ dostajemy ($fG_0 = G_0$)

$$\begin{aligned} f'G + fG' &= -[T, \mathtt{H}_0] - [T, \mathtt{H}_I] = \\ &= \underbrace{[T, G_0]}_{\text{wyraz najniższego rzędu}} - [T, fG_I], \\ fG' + [T, G_0] &= -[T, fG_I] - f'G\,. \end{aligned}$$

G, T — niewiadome: dwie niewiadome, jedno równanie. Trzeba powiedzieć, jak będzie zdefiniowane $[T, G_0]$, jak będziemy definiowali G'.

$$\begin{aligned} fG' &= \underbrace{f[T, fG_I]}_{\text{człon drugiego rzędu}} \\ G' &= [T, fG_I] \end{aligned}$$

zmiana $f \to$ efekt zerowego rzędu $\to T$ bierze na siebie zmiany pierwszego rzędu $f'G$ i daleką od diagonali częśc komutatora:

$$\begin{aligned} [T, G_0] &= (1 - f)\underbrace{[T, fG_I]}_{=G'} - f'G. \\ [T, G_0] &= (1 - f)G' - f'G, \\ [T, G_0] &= \big((1 - f)G\big)'. \end{aligned}$$

Czyli ostatecznie dostajemy następujące równanie na $\mathcal{H}_\lambda$

$$\left\{ \begin{aligned} \mathtt{H}_\infty &= \mathtt{H}^\Delta_{\text{pocz}} + X_\Delta \\ \mathtt{H}_\lambda &= f_\lambda G_\lambda \\ \frac{dG_\lambda}{d\lambda} &= -\left[\left\{\left[(1 - f_\lambda)G_\lambda\right]'\right\}, f_\lambda G_{I\lambda}\right], \end{aligned} \right. \tag{4.50}$$

gdzie

$$\left\{\left[(1 - f)G\right]'\right\}$$

oznacza takie T że,

$$[T, G_0] = \left[(1 - f)G\right]'.$$

Spróbujemy rozwiązać równanie

$$\frac{dG_\lambda}{d\lambda} = \left[f_\lambda G_{I\lambda}, \left\{\left[(1 - f_\lambda)G_\lambda\right]\right\}_{G_0}\right]$$

metodą kolejnych przybliżeń. $\{\}_{G_0}$ oznacza mianownik energetyczny z wartości własnych G_0, mnożący elementy macierzowe operatora w nawiasie.

$$\begin{aligned}
\frac{dG_\lambda}{d\lambda} &= \left[f_\lambda G_{I\lambda}, \left\{ \left[(1-f_\lambda)G_\lambda\right]' \right\}_{G_0} \right] = \\
&= \left[f_\lambda G_{I\lambda}, \left\{ -f'_\lambda G_\lambda \right\}_{G_0} + \left\{ (1-f_\lambda)G'_\lambda \right\}_{G_0} \right] = \\
&= \left[\left\{ f'_\lambda G_\lambda \right\}_{G_0}, f_\lambda G_{I\lambda} \right] + \left[f_\lambda G_{I\lambda}, \left\{ (1-f_\lambda)G'_\lambda \right\}_{G_0} \right]
\end{aligned}$$

tzn. $G' = A + B(G') = A(G) + B(G, G')$, gdzie $A, B \sim G^2$.

Pierwsze przybliżenia mają postać

$$G^2_{I\lambda} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad G^3_{I\lambda}$$

$$\begin{aligned}
&\text{(I)}\ \frac{dG_{I\lambda}}{d\lambda} = \left[\left\{ f'_\lambda G_\lambda \right\}_{G_0}, f_\lambda G_{I\lambda} \right] \\
&\text{(II)}\ \frac{dG_{I\lambda}}{d\lambda} = \left[\left\{ f_\lambda G_\lambda \right\}_{G_0}, f_\lambda G_{I\lambda} \right] \qquad + \left[f_\lambda G_{I\lambda}, \left\{ (1 - f_\lambda \left[\left\{ f'_\lambda G_\lambda \right\}_{G_0}, f_\lambda G_{I\lambda} \right] \right\}_{G_0} \right] \\
&\qquad \vdots \\
&\frac{dG_{I\lambda}}{d\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[f_\lambda G_{I\lambda}, \underbrace{\{(1-f_\lambda)[-f'_\lambda G_{I\lambda}}_{n-1 \text{ razy}}, \ldots, \{f_\lambda G_{I\lambda} \underbrace{\}_{G_0}] \ldots \}}_{n-1 \text{ razy}} \right]
\end{aligned}$$

Rząd po rzędzie (wiedząc, że $f'G = f'G_I$)

$$\frac{dG_{I\lambda}}{d\lambda} = \left[\{ f'_\lambda G_{I\lambda} \}, f G_{I\lambda} \right],$$

daje te same wyniki w modelu co poprzednie metody, ze wzoru

$$G^{(2)}_{I\lambda} = G^{(2)}_{I\infty} + \int_\infty^\lambda ds \, \left[\{ f'_s G^{(2)}_I \}, f_s G^{(2)}_I \right].$$

4.5.5 Teoria renormalizacji Hamiltonianów przez podobieństwo w języku operatorów kreacji i anihilacji

Wyjaśnimy pojęcie zrenormalizowanego pola kwantowego. Pojęcie to ma inne znaczenie niż w rachunku feynmannowskim.

Transformacja podobieństwa ($q_\infty = a_\infty$ lub $a^\dagger_\infty$, czyli oznacza operator kreacji lub anihilacji) przeprowadza hamiltonian zapisany za pomocą operatorów q_∞ w operator zapisany za pomocą q_λ.

$$\mathtt{H}_{\lambda=\infty}(q_\infty) = \mathtt{H}_\lambda(q_\lambda) = \tag{4.51}$$

Ta sama dynamika jest zapisana za pomocą różnych operatorów q, dla różnych λ. Współczynniki przy iloczynach q zmieniają się, a operator energii jest stale ten sam.

Jak zmieniają się współczynniki?

q_∞ gołe, wyjściowe obiekty (np. kwarki prądowe, struny, superstruny).

q_λ złożone cząstki efektywne (kwarki „ubrane” do skali λ, konstytuentne dla $\lambda \lesssim 1$GeX).

Między tymi operatorami zakładamy *unitarną równoważność*, tzn. zakładamy, że

$$q_\lambda = U_\lambda q_\infty U^\dagger_\lambda. \tag{4.52}$$

$\mathcal{L} \to \mathtt{H} \equiv \mathtt{H}_\infty(q_\infty)$ otrzymane z $T^{\mu\nu}$ wyliczonego z lokalnego $\mathcal{L}$. $\mathtt{H}_\infty(q_\infty)$ musi być zregularyzowane. Δ — parametr regularyzacji. $\mathtt{H}_\infty(q_\infty)$ musi zawierać X_Δ, które jest nieznane .

$$\begin{aligned} \mathtt{H}_\lambda(q_\lambda) &= \mathtt{H}_\infty(q_\infty), \\ U_\lambda^\dagger \mathtt{H}_\lambda(q_\lambda) U_\lambda &= U_\lambda^\dagger \mathtt{H}_\infty(q_\infty) U_\lambda. \end{aligned}$$

Jeśli $\mathtt{H}_\lambda(q_\lambda)$ jest superpozycją skończonych iloczynów q_λ (a w rachunku zaburzeń na pewno tak będzie), to

$$U_\lambda^\dagger \mathtt{H}_\lambda(q_\lambda) U_\lambda = \mathtt{H}_\lambda(U_\lambda^\dagger q_\lambda U_\lambda) = \mathtt{H}_\lambda(q_\infty) =: \mathcal{H}_\lambda. \tag{4.53}$$

$\mathcal{H}_\lambda$ ma takie same współczynniki przy q_∞ jak $\mathtt{H}_\lambda$ ma przy q_λ.

Zatem dostajemy równania jak poprzednio.

$$\mathcal{H}_\lambda = U_\lambda^\dagger \mathcal{H}_\infty U_\lambda, \tag{4.54a}$$
$$\mathcal{H}'_\lambda = -\left[\mathcal{T}_\lambda, \mathcal{H}_\lambda\right], \tag{4.54b}$$

gdzie

$$\mathcal{T}_\lambda \stackrel{\mathrm{df}}{=} U_\lambda^\dagger U'_\lambda.$$

Dowód:

$$\mathcal{H}'_\lambda = U_\lambda^{'\dagger} U_\lambda \underbrace{U_\lambda^\dagger \mathcal{H}_\infty U_\lambda}_{=\mathcal{H}_\lambda} + \underbrace{U_\lambda^\dagger \mathcal{H}_\infty U_\lambda}_{=\mathcal{H}_\lambda} U_\lambda^\dagger U'_\lambda$$

Do rozwiązania potrzebne jest nam jeszcze równanie na $\mathcal{T}_\lambda$, zapewniające ograniczoną do λ „szerokość" hamiltonianu efektywnego (tzn. hamiltonian efektywny zeruje się w sensie elementów macierzowych między stanami różniącymi się zbytnio energią). Analogicznie jak poprzednio

$$\mathcal{T}_\lambda = \left\{\left[(1-f_\lambda)\mathcal{G}_\lambda\right]'\right\}_{\mathcal{G}_{0\lambda}}, \qquad \text{oraz } \mathcal{H}_\lambda = f_\lambda \mathcal{G}_\lambda. \tag{4.55}$$

$$\begin{aligned} \mathtt{H}_\lambda(q_\lambda) &= U_\lambda \mathcal{H}_\lambda U_\lambda^\dagger \\ \frac{d}{d\lambda}\mathcal{G}_\lambda &= \left[f_\lambda \mathcal{G}_{I\lambda}, \left\{ (1-f_\lambda)\frac{d\mathcal{G}_{I\lambda}}{d\lambda} \right\}_{G_{0\lambda}} \right]. \\ G_\infty &= \mathtt{H}_\infty(q_\infty) = \mathtt{H}^\Delta_{\text{kanoniczny}}(q_\infty) + X^\Delta \end{aligned}$$

Lokalna kwantowa teoria pola jest granicą rozwiązań dla $\Delta \to \infty$.

$$\psi_{\text{can}}(x)\Big|_{\substack{x^+=0\\ t=0 \\ \varkappa=0}} = \sum_\sigma \int [\,k\,] \left[a_{\infty\,k\sigma} e^{-ikx} + a^\dagger_{\infty\,k\sigma} e^{ikx}\right],$$

przechodzi pod działaniem obrotu unitarnego w

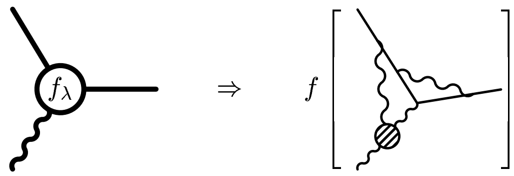
$$\psi_\lambda(x)\Big|_{\substack{x^+=0\\ t=0 \\ \varkappa=0}} = \sum_\sigma \int [\,k\,] \left[a_{\lambda\,k\sigma} e^{-ikx} + a^\dagger_{\lambda\,k\sigma} e^{ikx}\right].$$

(właściwie to zamiast $a_{\infty\,k\sigma}$ powinno się brać zregularyzowane $a^\Delta_{\infty\,k\sigma}$ i analogicznie dla operatora kreacji)

Relacje komutacji zachowują się.

Oddziaływania się zmieniają.

[•] Stanisław D. Głazek „Boost-Invariant Running Couplings in Effective Hamiltonians", hep-th/9904029v2, Phys. Rev. **D60**, 105030 (1999).



Rysunek 4.24: Efektywne oddziaływania „z daleka i z bliska”

Spis rysunków

Spis tabel

Spis treści