Ćwiczenia z Metod Numerycznych II A
rok akademicki 2001/2002

seria 4

Jakub Narębski Tomasz Pawłowski

9 maja 2002 roku

1 Zagadnienie własne

Wektor $\mathbf{x} \neq \vec{0}$ nazywamy **wektorem własnym** macierzy $\mathbf{A}$, jeśli istnieje liczba λ taka, że

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \tag{1.1}$$

czyli

$$(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})\mathbf{x} = 0 \implies \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0, \tag{1.2}$$

gdzie $\mathbf{I}$ oznacza macierz jednostkową. Wielomian $w_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ nazywamy wielomianem charakterystycznym macierzy $\mathbf{A}$.

Jeśli $\mathbf{x}$ jest wektorem własnym, to $k\,\mathbf{x}$ też jest wektorem własnym z tą samą wartością własną.

2 Metoda potęgowa

Niech $\mathbf{A}$ rozmiaru $n \times n$ będzie macierzą diagonalizowalną. Istnieje wtedy n liniowo niezależnych wektorow własnych $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ odpowiadajacych wartościom własnym $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Zakładamy, że λ_1 jest wartościa dominującą co do modułu, tzn. $|\lambda_1| > |\lambda_i|$ dla każdego $i \neq 1$.

Metoda potegowa wyznaczająca λ_1 i kierunek wektora v_1, polega na konstrukcji ciągu wektorów $\mathbf{x}^{(k)}$, gdzie $\mathbf{x}^{(0)}$ jest danym wektorem poczatkowym, za pomocą wzoru iteracyjnego

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{A}^{k+1}\,\mathbf{x}^{(0)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.1}$$

Elementy $\mathbf{x}^{(k)}$ zbiegają do wektora odpowiadającego najwiekszej wartości własnej. Poniżej podano uzasadnienie tego faktu.

Każdy wektor początkowy $\mathbf{x}^{(0)}$ można (przy naszych założeniach) przedstawić jako kombinację liniową wektorów własnych $\mathbf{v}_i$ (gdyż tworzą one bazę). Niech $\mathbf{x}^{(0)} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$. Dla $k = 1, 2, \ldots$ otrzymujemy wtedy zależność

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{A}^k\,\mathbf{x}^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} c_i\;\mathbf{A}^k\,\mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{n} c_i\lambda_i^k\,\mathbf{v}_i = \\ = \lambda_1^k \left(c_1\mathbf{v}_1 + \sum_{i=2}^{n} c_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k \mathbf{v}_i \right) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Ponieważ dla $i \geq 2$ mamy $|\lambda_i/\lambda_1| < 1$, to przy założeniu, że $c_1 \neq 0$, ciąg wektorów $\mathbf{x}^{(k)}$ dąży do kierunku wektora własnego $\mathbf{v}_1$.

Wielkości $|\lambda_1|^k$ dążą do zera, gdy $|\lambda_1| < 1$ lub do nieskończoności, gdy $|\lambda_1| > 1$. Dla uniknięcia niedomiaru lub nadmiaru w rachunku numerycznym konieczne jest więc normowanie wektorow $\mathbf{x}^{(k)}$. Jeśli robimy to w każdym kroku, to metoda potęgowa ma postać:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &:= \mathbf{A}\,\mathbf{x}; \\ \mathbf{x} &:= \mathbf{y}/\|\mathbf{y}\|; \end{aligned} \tag{2.3}$$

Przybliżenia dominującej wartości własnej λ_1 wyznacza sie z tzw. *ilorazow Rayleigha*

$$\sigma^{(k)} = \frac{\mathbf{x}^{(k)T}\,\mathbf{A}\,\mathbf{x}^{(k)}}{\mathbf{x}^{(k)T}\,\mathbf{x}^{(k)}} = \frac{(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)})}{(\mathbf{x}^{(k)}|\mathbf{x}^{(k)})}, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{2.4}$$

co wynika z przemnożenia równania (1.1) z lewej strony przez $\mathbf{x}^{(k)T}$. $\mathbf{x}^T$ oznacza transpozycję wektora $\mathbf{x}$.

Uwaga: powinniśmy badać zbieżność ciągu $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(4)}, \ldots$ ze względu na możliwość $\lambda < 0$ (wtedy ciąg $\mathbf{x}^{(i)}$ oscyluje).

3 Odwrotna metoda potęgowa

Stosujac metode potęgowa do macierzy $\mathbf{A}^{-1}$ możemy wyznaczyć najmniejszą co do modułu wartość własna $\mathbf{A}$ gdyż:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \iff \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} \iff \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} = \lambda^{-1}\mathbf{x} \tag{3.1}$$

Ogólniej stosując metodę potęgową do macierzy $(\mathbf{A} - \lambda^*\mathbf{I})^{-1}$, gdzie λ^* jest ustaloną liczbą, możemy znaleźć wartość własną macierzy $\mathbf{A}$ najbliższą λ^*. Metodę tę można wprost zapisać wzorem:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (\mathbf{A} - \lambda^*\mathbf{I})^{-1}\,\mathbf{x}^{(k)} = (\mathbf{A} - \lambda^*\mathbf{I})^{-(k+1)}\,\mathbf{x}^{(0)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.2}$$

ale zamiast obliczać macierz odwrotną lepiej jest rozwiązywać w każdym kroku układ równań, co prowadzi do (równoważnego)wzoru

$$(\mathbf{A} - \lambda^*\mathbf{I})\,\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.3}$$

Ponieważ w każdym kroku rozwiązujemy układ równań z tą samą macierzą a różnym wektorem prawych stron, warto skorzystać z rozkładu $\mathbf{LU}$ macierzy $(\mathbf{A} - \lambda^*\mathbf{I})$ do rozwiązywania wielokrotnie tego układu.

Tak określona metoda nazywana jest *odwrotną metodą potęgową* lub *metodą Wielandta.* Ciag ilorazów Rayleigha dąży do wartości własnej macierzy $(\mathbf{A} - \lambda^*\mathbf{I})^{-1}$, czyli $\dfrac{1}{\lambda - \lambda^*}$.

Analogicznie jak w metodzie potęgowej w celu uniknięcia nadmiaru lub niedomiaru w obliczeniach numerycznych należy normalizować wektory.

4 Zadanie domowe

Napisać procedurę (funkcję) znajdująca wektor własny odpowiadający największej co do modułu wartości własnej oraz tę wartość własną. Jako parametry funkcja powinna przyjmować macierz oraz wektor początkowy oraz maksymalną liczbę iteracji.

Napisać procedurę (funkcję) znajdującą wartość własną macierzy $\mathbf{A}$ najbliższą zadanej wartości λ^*. Funkcja może nadpisywać macierz $\mathbf{A}$ jej rozkładem $\mathbf{LU}$. Funkcja powinna reagować na błędy obliczeń (typu wartość λ^* równa którejś z wartości własnych).

Przetestować obie funkcje znajdując wszystkie wartości i wektory własne macierzy o znanych jednokrotnych wartościach własnych. Przykładem może być macierz:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

o wartościach własnych $2, 5, 8.$, lub macierz

$$\begin{bmatrix} 11 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

o wartościach własnych $1, 2, 3, 5, 8$, czy też macierz

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

o wartościach własnych $3, 4, 5, 4 - \sqrt{3}, 4 + \sqrt{3}$, czy też macierz

$$\begin{bmatrix} 12 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

o wartościach własnych $6, 6 \pm \frac{1}{2}\sqrt{98 \pm 2\sqrt{949}} \simeq -1.316875950, 2.983863699, 6, 9.016136308, 12.31687596$

Przygotował: Jakub Narębski