Zadania do Metod Numerycznych II A
Grupy 2, 3. Seria 4.

Splatanie i odplatanie przy użyciu transformaty Fouriera

Jakub Narębski

09.05.2001 r.

Do obliczania szybkiej transformaty Fouriera dwu funkcji rzeczywistych na raz (co jest przydatne np. przy obliczaniu splotu za pomocą transformaty Fouriera) mozna zastosować procedurę twofft z NRC zadeklarowaną jako:

void twofft(**float** data1 [], **float** data2 [], **float** fft1 [], **float** fft2 [],
unsigned long n);

Oblicza ona transformatę Fouriera dwu rzeczywistych tablic wejściowych data1 [1.. n] i data2 [1.. n] o rozmiarze n i zapisuje je w dwu zespolonych tablicach wyjściowych fft1 [1..2 n] i fft2 [1..2 n] o rozmiarze rzeczywistym $2n$. Rozmiar tablicy n musi byc całkowitą potęgą 2. Uwaga: w tej funkcji tablice indeksowane są od 1 do n! (Można stosować z nią tablice indeksowane normalnie od 0, korzystając z faktu, że (arr −1)[1..n] ≡ arr [0.. n−1]. Funkcja ta korzysta z procedury four1 z NRC (która musi być dołączona do programu).

1 Splatanie i odplatanie

Przetestować twierdzenie o splocie dyskretnym. Obliczyć splot sygnału „rozciągłego" (np. funkcji okresowej piłokształtnej) z funkcją odpowiedzi impulsowej o małej szerokości (np. funkcji Gaussa lub prostokątnej bariery t.j. $\Theta(a-|x|)$) z definicji:

$$(r \otimes s)_j := \sum_{k=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} r_k s_{j-k}, \tag{1}$$

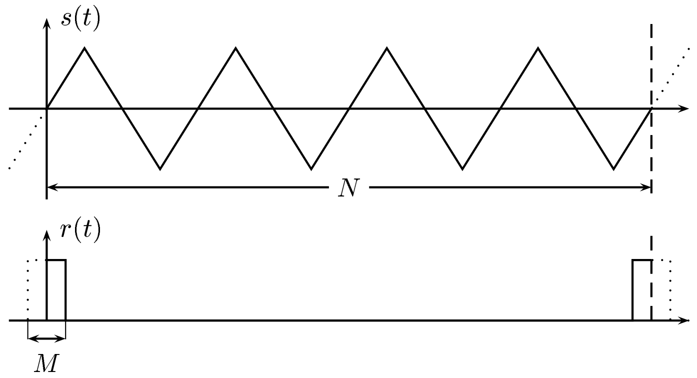
oraz za pomocą transformaty Fouriera, korzystając z twierdzenia o splocie dyskretnym:

$$(R \otimes S)_j = R_j S_j. \tag{2}$$

Funkcja odpowiedzi impulsowej warto przyjąć znormalizowaną, tzn. przeskalować ją tak, aby $\sum r_k = 1$.

Uwaga: sygnał możemy traktować albo jako funkcję okresową, albo jako funkcję nieokresową (wycinek funkcji nieskończonej w czasie, np. jeśli sygnał jest funkcją zanikającą). Należy postępować stosownie do przypadku:

- Sygnał **okresowy**: $s_{k+lN} = s_k$. Przy liczeniu splotu z definicji należy pamiętać o tym, że $s_{j-k} \equiv s_{j-k \bmod N}$. Funkcję odpowiedzi można traktować



Rysunek 1: Sygnał okresowy

albo jako $r_k: \ -M/2 < k \leq M/2$ i sumować po k od $-M/2+1$ do $M/2$ (sięgając do odpowiednich elementów tablicy $r[k]$), albo używać w postaci „zawiniętej" $r_k: 0 \leq k < N$ i sumować po k od 0 do $N-1$. M oznacza tutaj szerokość funkcji odpowiedzi; można przyjąć ją równą N.

Przy liczeniu splotu za pomocą transformaty Fouriera nie dopełnia się sygnału zerami. Funkcja odpowiedzi jednostkowej r powinna być zapisana w postaci „zawiniętej", korzystając z tożsamości $r_{-k} = r_{N-k}$. Niezerowe elementy powinny się znajdować na końcu i na początku tablicy.

Patrz także rysunek 1.

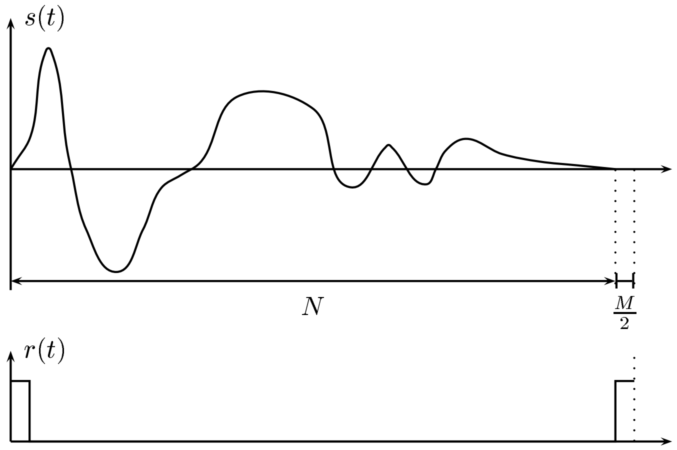
- Sygnał **nieokresowy**: $s_k \neq 0, \quad k = 0, \ldots N$. Przy liczeniu splotu z definicji należy przyjąć $s_k = 0$ dla $k < 0$ i dla $k \geq N$. Funkcję odpowiedzi należy traktować jako $r_k: \ -M/2 < k \leq M/2$ i sumować po k od $-M/2+1$ do $M/2$ (sięgając do odpowiednich elementów tablicy $r[k]$), lub odpowiednio przeliczyć indeksy.

  Przy liczeniu splotu za pomocą transformaty Fouriera należy dopełnić sygnał s zerami (patrz rozdział 1.2 w `fft-splot.ps`) na długości połowy szerokości funkcji odpowiedzi, a dokładniej na większej z szerokości „dodatniej" i „ujemnej" funkcji odpowiedzi jednostkowej r. Nastepnie należy zapisać r do tablicy o długości równej długości tablicy zawierającej sygnał rozszerzony zerami, w postaci „zawiniętej", korzystając z tożsamości $r_{-k} = r_{N-k}$. Uzupełniające zera powinny się znaleźć pośrodku tablicy.

  Patrz także rysunek 2 na następnej stronie.

Należy pamiętać, że transformata Fouriera funkcji rzeczywistej jest funkcją *zespoloną* o własności $F(-f) = [F(f)]^*$.

Funkcja odpowiedzi impulsowej powinna być skoncentrowana wokół zera (zgodnie ze wzorem $r_{-k} \equiv r_{N-k}$), tak że niezerowe elementy są na początku i na końcu tablicy. Można stosować dowolną z procedur do obliczania transformaty Fouriera: własną, four1, realft czy twofft. Porównać wynik obliczony z definicji z wynikiem za pomocą transformaty Fouriera.



Rysunek 2: Sygnał nieokresowy, zanikający

Odpleść funkcję odpowiedzi impulsowej z obliczonego splotu (najlepiej z definicji): $\widetilde{S}(f) = C(f)/R(f)$, gdzie $c(t) = r(t) \otimes s(t)$. Porównać wynik odplecenia $\widetilde{s}_k$ z sygnałem oryginalnym. Uwaga na wartości zerowe w transformacie Fouriera funkcji odpowiedzi! Wartośc zerowa R_n oznacza, że przy splataniu utraciliśmy pewne informacje: bezpieczne jest przyjąć $\widetilde{S}_k = 0$ dla $R_k = 0$. *Dla chętnych:* sprawdzić wpływ dodania szumu do wyniku splotu c na błąd odzyskania oryginalnego sygnału za pomocą odplecenia $\widetilde{s}_k - s_k$.

Odpleść funkcję odpowiedzi impulsowej za pomocą procedury iteracyjnej zadanej wzorem

$$q_{\text{nowe}} = q + (c - r \otimes q), \tag{3}$$

gdzie q oznacza wynik w kolejnej iteracji, zaś c jest mierzonym sygnałem (po splocie) od którego chcemy odpleść funkcję odpowiedzi jednostkowej r. Początkowo (w pierwszej iteracji) $q = c$. Splot $r \otimes q$ można wyliczyć dowolnym sposobem, nawet przy użyciu procedury convlv z NRC splatającej dwie funkcje rzeczywiste z NRC.

2 Filtr Wienera (nieobowiązkowe)

Zadanie dodatkowe, nieobowiązkowe. Znaleźć oryginalny sygnał na podstawie pomiaru ze znaną funkcją odpowiedzi jednostkowej, obarczonego szumem. Dany jest sygnał wynikowy $c(t) = r(t) \otimes s(t) + n(t)$ oraz funkcja odpowiedzi jednostkowej $r(t)$ (lub jej dobre przybliżenie). Zastosować w tym celu filtr optymalny Wienera wzorem:

$$\widetilde{S}(f) = \frac{C(f)\Phi(f)}{R(f)}. \tag{4}$$

Funkcja $\Phi(f)$ filtru zadana jest wzorem

$$\Phi(f) = \frac{|H(f)|^2}{|H(f)|^2 + |N(f)|^2}, \tag{5}$$

gdzie $H(f) = R(f)S(f)$ (czyli $h(t) = r(t) \otimes s(t)$). Model $|H(f)|^2$ oraz oszacowanie widma szumu $|N(f)|$ można znaleźć na podstawie widma mocy $P_c(f) = |C(f)|^2$ wynikowego sygnału (patrz rozdział 2.2 w `fft-splot.ps`), lub w jakiś inny sposób (proszę go opisać). Porównać filtrowanie Wienera ze stosowaniem kilku kroków metody iteracyjnej odplatania, danej wzorem (3).

Dodatkowo zamiast badania sygnału jednowymiarowego można badać splatanie i rozplatanie oraz filtr Wienera dla obrazów jednokolorowych. Dwuwymiarową transformatę Fouriera można obliczyć wyliczając jednowymiarową transformatę Fouriera dla kolumn, a następnie dla wierszy (albo odwrotnie). Wartości wykraczające poza zakres mapy kolorów należy obciąć. Podany tutaj iteracyjny sposób odplatania stosowany był pierwotnie do analizy obrazów astronomicznych.

Jakub Narębski