Ćwiczenia z Metod Numerycznych II A
rok akademicki 2001/2002

seria 8

Jakub Narębski Tomasz Pawłowski

14 stycznia 2005 roku

1 Znajdowanie miejsc zerowych

1.1 Wstęp

Chcemy znaleźć rozwiązanie równania danego w postaci

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

(każde równanie jednej zmiennej możemy zapisać w tej postaci).

Algorytmy znajdowania miejsc zerowych możemy podzielić na dwa rodzaje. Metody pierwszego rodzaju zaczynają od *przedziału*, o którym wiadomo że zawiera pierwiastek (rozwiązanie) równania. W kolejnych iteracjach przedział ten jest zmniejszany aż do osiągnięcia pożądanej dokładności. Mamy zatem ścisłe oszacowanie błędu.

Metody drugiego rodzaju *poprawiają* odgadnięte (lub obliczone) przybliżenie rozwiązania równania. Zazwyczaj wymagają one spełnienia dodatkowych warunków (np. bliskości pierwiastka), ale są szybciej zbieżne. Część metod tego typu oprócz $f(x)$ wymaga obliczania wartości pochodnej $f'(x)$.

Definicja 1.1 *Niech $\epsilon_k = |x^* - x_k|$ oznacza błąd danego algorytmu w k–tym kroku ($f(x^*) = 0$). Mówimy, że p jest* ***wykładnikiem zbieżności*** *danej metody, jeżeli*

$$\epsilon_{k+1} <= K\epsilon_k^p. \tag{2}$$

Jeżeli $p = 1$ to mówimy, że metoda jest zbieżna liniowo. *Natomiast gdy $p > 1$ to metoda jest* zbieżna ponadliniowo.

Twierdzenie 1.1 (Bolzano – Cauchy'ego) *Niech funkcja $f(x)$ będzie określona i ciągła na przedziale domkniętym $[a, b]$ i niech na końcach tego przedziału przyjmuje wartości różnych znaków: $f(a)f(b) < 0$. Wówczas istnieje punkt $c \in [a, b]$, w którym funkcja się zeruje: $f(c) = 0$.*

1.2 Metody używające tylko wartości funkcji

1.2.1 Metoda bisekcji

Pomysł jest prosty. Wiemy, że w jakimś przedziale $[a, b]$ funkcja zmienia znak. Dzielimy ten przedział na pół (stąd nazwa) i wybieramy ten z podprzedziałów, w którym znajduje się pierwiastek (na którego końcach funkcja ma przeciwne znaki). Jeśli oznaczymy przez $[x_k^L, x_k^R]$ przedział otrzymany w k–tym kroku, zaś przez $c = (x_k^L + x_k^R)/2$ środek przedziału, to

$$x_{k+1}^L = \begin{cases} x_{k+1}^L & \text{jeżeli } f(x_k^L)f(c) < 0 \\ c & \text{jeżeli } f(x)f(x_k^R) < 0 \end{cases}. \tag{3}$$

Metoda ta jest zbieżna *liniowo*, dla tej metody $\varepsilon_{k+1} = \frac{1}{2}\varepsilon_k$. Metoda ta działa *zawsze*, jeśli mamy przynajmniej jeden pierwiastek w zadanym przedziale.

1.2.2 Metoda fałszywej pozycji (regula falsi)

W metodzie tej zamiast środka przedziału jako przybliżenie pierwiastka bierzemy pierwiastek interpolacji liniowej na krańcach przedziału, czyli punkt przecięcia *siecznej* z osią x.

$$c = x_k^L - \frac{x_k^L - x_k^R}{f(x_k^L) - f(x_k^R)} f(x_k^L) \tag{4}$$

Nastepnie tak jak w metodzie bisekcji bierzemy ten przedział, który zawiera pierwiastek. Można ją także traktować jako metodę Newtona (patrz 1.3.1) z pochodną zamienioną przez iloraz różnicowy oparty o krańce przedziału.

Metoda ta jest zbieżna *liniowo*, ale zazwyczaj jest szybsza od metody bisekcji.

1.2.3 Metoda fałszywej pozycji bez pamięci

W tej modyfikacji metody fałszywej pozycji zawsze przeprowadzamy sieczną przez jeden ustalony punkt

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - a}{f(x_k) - a} f(x_k). \tag{5}$$

Metoda ta jest zbieżna *liniowo* o ile a leży dostatecznie blisko pierwiastka.

1.2.4 Metoda secant

Metoda secant różni się od metody fałszywej pozycji tym, że jako następne przybliżenie bierzemy *zawsze* punkt przecięcia siecznej z osią x.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k). \tag{6}$$

Metoda ta jest zbieżna z wykładnikiem $p = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.618$, ale nie mamy gwarancji zbieżności metody.

1.3 Metody używające funkcji i jej pochodnej

1.3.1 Metoda Newtona

Kolejne przybliżenie miejsca zerowego otrzymujemy jako punkt przecięcia *stycznej* do funkcji w poprzednim punkcie z osią x.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \tag{7}$$

Metoda ta jest zbieżna *kwadratowo*, tzn. wykładnik zbieżności $p = 2$. Metodę tę można uczynic pewną, łącząc ją z metodą bisekcji (podobnie jak w metodzie Brendta 1.4.2).

Zwana czasami metodą Newtona–Rhapsona.

1.4 Metody interpolacyjne

1.4.1 Metoda Riddersa

Jest to jeden z wariantów metody fałszywej pozycji. Niech miejsce zerowe znajduje się pomiędzy punktami x_1 i x_2. Metoda Riddersa najpierw oblicza wartość funkcji pośrodku przedziału $x_3 = (x_1 + x_2)/2$. Nastepnie szukamy czynnika e^Q spełniającego równanie

$$f(x_1) - 2f(x_3)e^Q + f(x_2)e^{2Q} = 0. \tag{8}$$

Jest to równanie kwadratowe. Jego rozwiązanie można zapisać w postaci

$$e^Q = \frac{f(x_3) + \mathrm{sign}[f(x_2)]\sqrt{f(x_3)^2 - f(x_1)f(x_2)}}{f(x_2)}. \tag{9}$$

Stosujemy nastepnie metodę fałszywej pozycji do punktów $f(x_1), f(x_3)e^Q, f(x_2)e^{2Q}$ (zamiast do $f(x_1), f(x_3), f(x_2)$). Pełne rozwiązanie dane jest wzorem

$$x_4 = x_3 + (x_3 - x_1)\frac{\mathrm{sign}[f(x_1) - f(x_2)]f(x_3)}{\sqrt{f(x_3)^2 - f(x_1)f(x_2)}}. \tag{10}$$

Metoda ta jest zbieżna *kwadratowo*, a biorąc pod uwagę fakt potrzeby dwukrotnego obliczania wartości funkcji z rzędem $p = \sqrt{2}$. x_4 zawsze należy do przedziału $[x_1, x_2]$, a więc metoda ta jest pewna. Metoda ta „intepoluje” funkcję za pomocą czynników wykładniczych.

1.4.2 Metoda Brenta–Dekkera

Metoda ta łączy w sobie odwrotną interpolację kwadratową z algorytmem bisekcji. W każdej iteracji metoda Brendta przybliża funkcję za pomocą krzywej interpolacyjnej. W pierwszym kroku jest to liniowa interpolacja oparta o krańce przedziału. W następnych krokach używamy odwrotnej (tzn. na wielomian jako funkcję od y) interpolacji kwadratowej opartej na ostatnich trzech punktach. Jeżeli punkt przecięcia krzywej interpolacyjnej z osią x leży wewnątrz przedziału zawierającego na pewno pierwiastek, to jest używany do zmniejszenia przedziału zawierającego na pewno pierwiastek. W przeciwnym przypadku stosujemy jeden krok metody bisekcji.

Metoda ta jest pewna, w większości przypadków zbieżna *kwadratowo*.

1.5 Szacowanie błędu rozwiązania

Niech *epsabs* oznacza błąd bezwzględny, a *epsrel* błąd względny. Jeżeli $0 \notin [a, b]$ to jako warunek zatrzymania dla metod *zmniejszających przedział* możemy wziąść

$$|a - b| < \mathit{epsabs} + \mathit{epsrel} \min(|a|, |b|). \tag{11}$$

Dla metod *iteracyjnych* jako warunek zakończenia możemy wziąść

$$|x_k - x_{k-1}| < epsabs + epsrel|x_k|. \tag{12}$$

Możemy też sprawdzać, czy wartość w znalezionym punkcie (dla metod ograniczających przedział bierzemy jako wynik środek przedziału) jest mniejsza niż ograniczenie błędu, t.j. czy $|f| < epsabs$. Możemy także sprawdzać, czy

$$\left| f\left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2}\right) \frac{x_k + x_{k-1}}{f(x_k) + f(x_{k-1})} \right| < eps, \tag{13}$$

dla metod ograniczających przedział.

2 Zadanie domowe

Napisać funkcję znajdujący zera zadanej (jako parametr) funkcji jednej zmiennej metodą **bisekcji**. Funkcja jako parametry powinna przyjmować *przynajmniej* początkowe przybliżenie na przedział zawierający pierwiastek, [wskaźnik na] funkcję, dokładność jaką chcemy osiągnąć oraz maksymalną ilość iteracji. Funkcja powinna sprawdzać, czy funkcja ma na końcach podanego przedziału różne znaki.

Jako funkcję do testowania można wziąść jakąś funkcję z problemu fizycznego. Można też użyć jednej z poniższych funkcji:

funkcja	pierwiastki
$x^{20} - 1$	$1, -1$
$x \exp(-x)$	0
$\sin(x)$	$0, \pi, 2\pi, \ldots$

Przygotował: Jakub Narębski