Numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych cz. I

Metody typu Runge–Kutty

Ćwiczenia z Metod Numerycznych II A
rok akademicki 2001/2002
seria 6

Jakub Narębski   Tomasz Pawłowski

9 maja 2002 roku

1 Wstęp

Rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych można zawsze sprowadzić do rozwiązywania układu równań różniczkowych pierwszego rzędu. Najprościej jest wybrać nowe zmienne tak, by były po prostu pochodnymi tzn. $\mathbf{u} = [u(t), u'(t), u''(t), \ldots]$. Wystarczy zatem rozważać układ równań różniczkowych pierwszego rzędu. Rozpatrywać będziemy *zagadnienia początkowe*, tzn. będziemy chcieli znaleźć rozwiązanie równania różniczkowego dla zadanej wartości $\mathbf{u}_0$ w punkcie początkowym t_0:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{u}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{u}, t) \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Rozważać będziemy *metody różnicowe*, które wyznaczają przybliżenia jedynie wartości rozwiązania $\mathbf{u}(t_i)$ w pewnych punktach t_i. Będziemy się zajmowali przede wszystkim przypadkiem, gdy punkty t_i są rozmieszczone równomiernie co Δt, tzn. $t_i = t_0 + i\,\Delta t$. Wielkość Δt nazywamy *krokiem całkowania*. Metody różnicowe dają nam wzór na wyliczenie wartości funkcji w kroku następnym t_{n+1} na podstawie kroków poprzednich.

Dla uproszczenia wprowadzimy następujące oznaczenia

$$t_i = t_0 + i\,\Delta t \tag{1.2a}$$

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}(t_i) \tag{1.2b}$$

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{f}(\mathbf{u}_i, t_i) \tag{1.2c}$$

Ogólną metodą na wyprowadzenie metod różnicowych rozwiązywania układu równań różniczkowych zwyczajnych jest zapisanie go w postaci całkowej (poprzez odcałkowanie równania różniczkowego po jednym kroku czasowym, od t_n

do t_{n+1}) i zastosowanie przybliżenia na całkę po prawej stronie (całkę z funkcji $\mathbf{f}(\mathbf{u}(t), t)$):

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \mathbf{f}(\mathbf{u}(t), t)\\ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{d\mathbf{u}}{dt}\, dt &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}(\mathbf{u}(t), t)\, dt\\ \mathbf{u}(t_{n+1}) - \mathbf{u}(t_n) &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}(\mathbf{u}(t), t)\, dt\end{aligned}$$

2 Metoda Eulera

Najprostszą metodą różnicową jest *metoda Eulera.* Pochodną $\mathbf{u}'(t)$ przybliżamy ilorazem różnicowym pierwszego rzędu w przód opartym na węzłach t_n i $t_{n+1} = t_n + \Delta t$. Inaczej: przybliżamy całkę za pomocą wartości funkcji w początku przedziału razy jego długość:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}(\mathbf{u}(t), t)\, dt \simeq \Delta t\, \mathbf{u}(t_n)$$

Dostajemy zatem następujący wzór na wartość rozwiązania w kroku następnym

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t\, \mathbf{f}(\mathbf{u}_n, t_n) \tag{2.1}$$

Metoda ta ma prostą interpretację geometryczną. Rozpoczynając od punktu $(t_i, \mathbf{u}_i)$ leżącego na krzywej całkowej będącej rozwiązaniem zagadnienia (1.1) posuwamy się po stycznej do wykresu aż osiągniemy punkt o współrzędnej niezależnej t_{i+1}.

3 Ulepszenia metody Eulera

Metoda Eulera jest rzadko stosowana ze względu na swoją bardzo wolną zbieżność (musimy stosować bardzo mały krok by mieć dobrą dokładność) i niestabilność (w niektórych zagadnieniach dla dowolnie małego kroku nie uzyskamy dobrego przybliżenia). Można ją ulepszyć, biorąc styczną do krzywej nie w punkcie t_i tylko w połowie przedziału, t.j. w $t_{i+1/2}$. Wartość funkcji w połowie przedziału wyliczamy metodą Eulera z dwukrotnie mniejszym krokiem:

$$\mathbf{u}_{n+1/2} = \mathbf{u}_n + \frac{\Delta t}{2}\, \mathbf{f}(\mathbf{u}_n, t_n) \tag{3.1a}$$

$$\mathbf{u}_{n+1} \quad = \mathbf{u}_n + \Delta t\, \mathbf{f}(\mathbf{u}_{n+1/2}, t_{n+1/2}) \tag{3.1b}$$

co można zapisać w skróconej postaci

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t\, \mathbf{f}(\mathbf{u} + \frac{\Delta t}{2}\, \mathbf{f}(\mathbf{u}_n, t_n), t_{n+1/2}) \tag{3.2}$$

Tą metodę (te ulepszenie metody Eulera) nazywa się *metodą midpoint* lub *zmodyfikowaną metodą Eulera.*

Można także wziąć inne ulepszenie, tzn. jako przybliżenie ilorazu różnicowego biorąc średnią arytmetyczną stycznych w punktach t_n i t_{n+1}. Wartość stycznej w punkcie t_{n+1} obliczamy za pomocą zwykłej metody Eulera:

$$\mathbf{k} = \mathbf{u}_n + \Delta t\, \mathbf{f}(\mathbf{u}_n, t_n) \tag{3.3a}$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \frac{1}{2}\Delta t \left(\mathbf{f}(\mathbf{u}_n, t_n) + \mathbf{f}(\mathbf{k}, t_{n+1})\right) \tag{3.3b}$$

co można zapisać w skróconej postaci

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \frac{1}{2}\Delta t \left(\mathbf{f}(\mathbf{u})n, t_n) + \mathbf{f}(\mathbf{u}_n + \Delta t\, \mathbf{f}(\mathbf{u}_n, t_n), t_{n+1})\right) \tag{3.4}$$

Metodę tą nazywamy „ulepszoną metodą Eulera” lub *metodą Heuna*.

4 Metoda Runge–Kutty

Dzięki użyciu wartości funkcji pośrodku przedziału (ogólnie: dzięki uśrednieniu) w ulepszeniach metody Eulera osiągamy szybszą zbieżność metody. Skoro uśrednianie może pomóc, spróbujmy zastosować kilka sposobów wyliczenia wartości funkcji pośrodku przedziału i uśrednijmy je (zastosujmy je wszystkie z odpowiednimi wagami).

$$\frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{f}(\mathbf{u}_n, t) + \mathbf{f}(\mathbf{u}_{n+1}, t)\right] \tag{4.1a}$$

$$\frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\Delta t} = \mathbf{f}\Big(\mathbf{u}_n + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{f}(\mathbf{u}_n, t_n), t_n + \frac{\Delta t}{2}\Big) \tag{4.1b}$$

$$\frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\Delta t} = \mathbf{f}\Big(\frac{\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_{n+1}}{2}, t_n + \frac{\Delta t}{2}\Big) \tag{4.1c}$$

Wprowadźmy następujące oznaczenia (uwaga: k_i są tutaj wektorami):

$$k_1 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_n, t_n) \tag{4.2a}$$

$$k_2 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_{n+1/2}, t_{n+1/2}) \tag{4.2b}$$

$$k_3 = \mathbf{f}\Big(\frac{\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_{n+1}}{2}, t_{n+1/2}\Big) \tag{4.2c}$$

$$k_4 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_{n+1}, t_{n+1}) \tag{4.2d}$$

Aby móc efektywnie wyliczać k_i musimy wyrazić je przez wielkości już wyliczone, t.j. wyrazić k_n przez $k_i, i = 1 \ldots n-1$. Przekształcamy równanie (4.2c) by pozbyć się $\mathbf{u}_{n+1}$ po prawej stronie

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}\Big(\frac{\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_{n+1}}{2}, t_n + \frac{\Delta t}{2}\Big) &= \mathbf{f}\Big(\frac{\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_n + (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n)}{2}, t_n + \frac{\Delta t}{2}\Big) = \\
&= \mathbf{f}\Big(\mathbf{u}_n + \frac{\Delta t}{2}\frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\Delta t}, t_n + \frac{\Delta t}{2}\Big) = \\
&= \mathbf{f}\Big(\mathbf{u}_n + \frac{\Delta t}{2}k_2, t_n + \frac{\Delta t}{2}\Big)
\end{aligned}$$

Skorzystaliśmy tutaj z przybliżenia k_2 na pochodną (iloraz różnicowy).

Analogicznie pozbywamy się zależności od $\mathbf{u}_{n+1}$ po prawej stronie w definicji k_4, tym razem korzystając z przybliżenia k_3 na pochodną (a właściwie na iloraz różnicowy).

Dostajemy zatem

$$k_1 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_n, t_n) \tag{4.3a}$$

$$k_2 = \mathbf{f}\Big(\mathbf{u}_n + \frac{\Delta t}{2} k_1, t_n + \frac{\Delta t}{2}\Big) \tag{4.3b}$$

$$k_3 = \mathbf{f}\Big(\mathbf{u}_n + \frac{\Delta t}{2} k_2, t_n + \frac{\Delta t}{2}\Big) \tag{4.3c}$$

$$k_4 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_n + \Delta t\, k_3, t_n + \Delta t) \tag{4.3d}$$

Aby wyliczyć dobre przybliżenie na pochodną (na iloraz różnicowy) uśredniamy wzory (4.1a…4.1c) (biorąc je z równymi wagami).

$$\frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\Delta t} = \frac{1}{3}\big((4.1\text{a}) + (4.1\text{b}) + (4.1\text{c})\big) = \frac{1}{6}\big(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\big) \tag{4.4}$$

Ostatecznie dostajemy następującą metodę (klasyczną metodę Runge–Kutty czwartego rzędu)

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \frac{\Delta t}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{4.5}$$

Warto zwrócić uwagę, że w metodzie Runge–Kutty musimy wielokrotnie obliczać wartość funkcji. Jeśli zatem obliczanie wartości funkcji zajmuje dużo czasu, to lepiej stosować inne metody. Z kolei w metodzie tej korzystamy tylko z poprzedniego kroku, tak więc w łatwy sposób można za pomocą ekstrapolacji Richardsona zrobić z niej metodę o zmiennym kroku.

Istnieją także inne wersje metody Rungego–Kutty czwartego rzędu, gdzie bierze się wartości w innych punktach i składa je z innymi wagami. Wzór klasyczny wykorzystuje się najczęściej ze względu na jego prostotę. Wzór Ralstona daje najlepsze oszacowanie błędu. Przy stosowaniu wzoru Gilla obliczenia można dokonywać tak, by wyrównywać powstające błędy zaokrągleń. Wzór „trzech ósmych" jest niemal równie prosty jak klasyczny; każdy z k_i wyznacza wartość w innym punkcie: $t_n, t_{n+1/3}, t_{n+2/3}, t_{n+1}$. Istnieje także wzór zamknięty na metodę Runge–Kutty piątego rzędu, który wykorzystuje się przy konstrukcji metody ze zmiennym krokiem.

5 Podsumowanie

Zmodyfikowana metoda Eulera

$$k_1 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_n, t_n) \tag{5.1a}$$

$$k_2 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_n + \frac{\Delta t}{2}\, k_1, t_n + \frac{\Delta t}{2}) \tag{5.1b}$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t\, k_2 \tag{5.1c}$$

Metoda Heuna (ulepszona metoda Eulera)

$$k_1 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_n, t_n) \tag{5.2a}$$

$$k_2 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_n + \Delta t\, k_1, t_n + \Delta t) \tag{5.2b}$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \frac{\Delta t}{2}(k_1 + k_2) \tag{5.2c}$$

Wzór klasyczny

$$k_1 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_n, t_n) \tag{5.3a}$$

$$k_2 = \mathbf{f}\Big(\mathbf{u}_n + \frac{\Delta t}{2} k_1, t_n + \frac{\Delta t}{2}\Big) \tag{5.3b}$$

$$k_3 = \mathbf{f}\Big(\mathbf{u}_n + \frac{\Delta t}{2} k_2, t_n + \frac{\Delta t}{2}\Big) \tag{5.3c}$$

$$k_4 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_n + \Delta t\, k_3, t_n + \Delta t) \tag{5.3d}$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \frac{\Delta t}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{5.3e}$$

Wzór „trzech ósmych”

$$k_1 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_n, t_n) \tag{5.4a}$$

$$k_2 = \mathbf{f}\Big(\mathbf{u}_n + \frac{1}{3}\Delta t\, k_1, t_n + \frac{1}{2}\Delta t\Big) \tag{5.4b}$$

$$k_3 = \mathbf{f}\Big(\mathbf{u}_n - \frac{1}{3}\Delta t\, k_1 + \Delta t\, k_2, t_n + \frac{2}{3}\Delta t\Big) \tag{5.4c}$$

$$k_4 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_n + \Delta t\, k_1 - \Delta t\, k_2 + \Delta t\, k_3, t_n + \Delta t) \tag{5.4d}$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \frac{\Delta t}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4) \tag{5.4e}$$

Przygotował: Jakub Narębski