# Przykłady równań różniczkowych zwyczajnych

Jakub Narębski Tomasz Pawłowski Tomasz Werner

13 maja 2002 roku

## 1 Oscylator Duffinga z wymuszeniem

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x^3 = A\cos\omega t \tag{1.1}$$

Start z $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, dla parametrów $\omega = 1$, $k = 0.05$. Zbadać zachowanie rozwiązania w zależności od wartości parametru $A$ dla $A \in [1, 12]$, wykreślając wykres w przestrzeni fazowej dla $t \in [0, 100\pi]$. Zobaczyć dla jakiego $A$ występują gwałtowne zmiany wyglądu trajektorii.

Można także wziąć ogólniejszą postać równania Duffinga

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon x^3 = A\cos\omega t \tag{1.2}$$

## 2 Oscylator van der Pola z wymuszeniem

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - \alpha x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega^2 A\cos\omega t \tag{2.1}$$

Warto zbadać zarówno zachowanie z, jak i bez siły wymuszającej. Przy braku siły wymuszającej tzn. dla $A = 0$ warto wziąć $\alpha = 1/\varepsilon$ i $\omega_0 = 1$ i zbadać zachowanie układu dla wartości parametru $\varepsilon$ zmieniających się od 0.01 do 4. Zobaczyć, że niezależnie od warunków początkowych dochodzimy do ruchu quasiperiodycznego.

Przy występowaniu wymuszenia, dla małej amplitudy siły wymuszającej $\dfrac{A\omega}{\varepsilon(2/\sqrt{\alpha})} \ll 1$ dostajemy ruch quasiperiodyczny, zmieniający się łagodnie ze zmianą parametrów. Dla dużej amplitudy siły wymuszającej $\dfrac{A\omega}{\varepsilon(2/\sqrt{\alpha})} \gg 1$ dostajemy ruch okresowy. Pojawia się on w sposób nagły przy wzroście $A$.

Jeśli dodamy do równania (2.1) nieliniową sztywność typu Duffinga to otrzymamy równanie van der Pola – Duffinga o postaci

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - \alpha x^2)\dot{x} + \omega_0^2(1 + \gamma x^2)x = \omega^2 A\cos\omega t \tag{2.2}$$

Równanie to przechodzi od zachowania quasiharmonicznego, przez orbity okresowe po zachowanie chaotyczne przy zmianie parametrów.

# 3 Wahadło z napędem

Przez wybór odpowiednich jednostek $t$ oraz $A$ i $B$ można sprowadzić równanie wahadła matematycznego z wymuszeniem do postaci

$$\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + \sin\theta = A\cos\omega t + B \tag{3.1}$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$\Omega = \frac{2\pi}{\omega}\frac{A+B}{\gamma}$$

Dla wartości parametru $A = 1.0$, $\omega = 1.76$ mamy: (a) dla $\gamma = 1.576$, $\Omega = 1.4$ ruch okresowy, (b) dla $\gamma = 1.253$, $\Omega = 1.2$ przejście do chaosu, (c) dla $\gamma = 1.081$, $\Omega = 1.094$ zachowanie chaotyczne. Jeśli położymy $B = 0$, to zachowanie wahadła w funkcji parametrów $A$ i $\omega$ miota się miedzy ewolucja regularną i chaotyczną. Wrażliwośc na warunki początkowe pojawia się, gdy wahadło przechodzi przez punkt szczytowy z bardzo małą prędkością.

# 4 Równanie drapieżnik – ofiara

Równanie

$$\begin{cases} \dot{X} = \alpha X - \beta XY \\ \dot{Y} = \beta XY - \gamma Y \end{cases} \tag{4.1}$$

nazywamy równaniem drapieżnik–ofiara (ang: *prey–predator*); $X$ oznacza (odpowiednią unormowaną) liczbę zajęcy, zaś $Y$ oznacza liczbę lisów. Dla parametrów $\alpha = \beta = \gamma = 1$ równanie to ma punkt stały $X = Y = 1$. Można zobaczyć, że jest to punkt stabilny dla cyklu; dla dowolnych parametrów początkowych (np. $X(0) = Y(0) = \frac{1}{4}$) dostajemy w przestrzeni fazowej krzywą zamkniętą.

# 5 Równanie Lorentza

Równanie Lorentza powstało jako obcięcie (uproszczenie) równania ruchu dla rolki konwekcyjnej (w badaniach dynamiki atmosfery). Równanie to ma następująca postać:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma(x_3 - x_1) \\ \dot{x}_2 = rx_1 - x_2 - x_1x_2 \\ \dot{x}_3 = -bx_3 + x_1x_2 \end{cases} \tag{5.1}$$

gdzie $\sigma$ jest liczbą Prandtla i jest proporcjonalne do lepkości, $b$ jest proporcjonalne do rozmiarów komórki konwekcyjej zaś $r$ jest parametrem kontrolnym (proporcjonalnym do przewodnictwa cieplnego). Równanie to ma trzy punkty stałe:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0 \tag{5.2a}$$

$$x_1 = x_2 = \pm\sqrt{b(r-1)}, \quad x_3 = r - 1 \tag{5.2bc}$$

Punkt stały $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ odpowiadający przewodnictwu cieplemy bez konwekcji jest punktem stabilnym dla $0 < r < 1$; dla $r > 1$ punkt ten staje się punktem siodłowym. Drugi i trzeci punkt krytyczny (które istnieją dla $r \geq 1$)

jest stabilny dla $1 < r < r_1$, dla $r_1 < r < r_c$ mamy dwa cykle graniczne, zaś dla $r > r_c$ pojawia się chaos. Krytyczna wartośc parametru kontrolnego dana jest wzorem

$$r_c = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1} \tag{5.3}$$

Dla najczęsciej stosowanych wartości parametrów $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}$ dostajemy $r_1 \simeq 13.54$, zaś $r_c = 24.7368$. Trajektorie chaotyczne istnieją do $r \simeq 27.74$; najczęściej do badania chaotycznego zachowania równania Lorentza bierze się $r = 24.74$.

# 6 Zredukowane zagadnienie trzech ciał

Zredukowane zagadnienie trzech ciał to równania ruchu ciała próbnego (satelity) w polu grawitacyjnym dwu dużo cięższych od niego obiektów; na tyle ciężkich że ruch ciało próbne nie wpływa na ich ruch i te dwa ciała poruszają się po elipsach (w szczególnym przypadku: po okręgach). Jeżeli dwa cięższe ciała poruszają sie po okręgach wokół wspólnego środka masy to ruch satelity można rozważać w nieinercjalnym układzie w którym dwa cięższe ciała spoczywają. Oznaczmy cięższe ciała indeksami 1 i 2. Niech $M_i$ oznacza masę $i$-tego ciała, a $\mu_i$ jego masę zredukowaną

$$\mu_i = \frac{M_i}{M_1 + M_2} \tag{6.1}$$

Wówczas w układzie w którym ciała 1 i 2 spoczywają mają one współrzędne $(-\mu_2, 0)$ i $(\mu_1, 0)$.

Dobierając odpowiednio jednostki dostajemy następujące równanie ruchu dla satelity:

$$\begin{cases} \ddot{x} = x + 2\dot{y} - \dfrac{\mu_2}{r_1^2}\dfrac{(x+\mu_1)}{r_1} - \dfrac{\mu_1}{r_2^2}\dfrac{(x-\mu_2)}{r_2} \\ \ddot{y} = y - 2\dot{x} - \dfrac{\mu_2}{r_1^2}\dfrac{y}{r_1} - \dfrac{\mu_1}{r_2^2}\dfrac{y}{r_2} \end{cases} \tag{6.2}$$

gdzie $r_i$ jest odległością ciała $i$ od położenia satelity.

Dla układu Ziemia–Księżyc $\mu_Z = \dfrac{M_K}{M_K + M_K} \approx \dfrac{1}{82.45}$. Jeśli się zacznie z warunku początkowego $x(0) = 1.2, y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0, \dot{y}(0) = -1.0493570983$ to wychodzi krzywa zamknięta z okresem $T = 6.192169331396$.

Do sprawdzenia dokładności rachunków można zastosować badanie stałości całki Jacobiego

$$J = \frac{1}{2}[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - x^2 - y^2] - \frac{\mu_1}{r_1} - \frac{\mu_2}{r_2} \tag{6.3}$$

Dla powyższych danych początkowych (i wartości parametrów) jest ona równa $J = -1.041589$.

*Uwaga:* do analizy tego zagadnienia należy zastosowac metode ze zmiennym krokiem, gdyż wynik składa się z częsci wolnozmiennej (dla której potrzebna byłaby bardzo duża liczba kroków gdyby krok był mały) i szybkozmiennej (dla której potrzebny jest bardzo mały krok aby nie utracić dokładności).