Zadania do Metod Numerycznych II A
Równania różniczkowe zwyczajne (1)

Jakub Narębski

08.03.2001

We wszystkich zadaniach powinna być możliwość zadania przez użytkownika kroku całkowania, czy to przez jawne jego zadanie, czy przez podanie zakresu i liczby kroków.

1 Ruch w polu siły lepkości

Należy rozwiązać metodą Eulera bądź inną zagadnienie

$$\begin{cases} \dfrac{dv(t)}{dt} = -\alpha v(t) \\ v(0) = v_0 \end{cases} \tag{1}$$

Podać po jakim czasie cząstka osiągnie ustaloną prędkość (tzn. jej prędkość v będzie równa v_k). Zamiast tego można podać jaką prędkość będzie miała cząstka po zadanym czasie. Prędkość początkowa oraz współczynnik oporu lepkiego powinny być zadawane przez użytkownika bez potrzeby rekompilowania programu.

Uwaga: ponieważ równanie to jest równaniem liniowym można łatwo zastosować metody niejawne, np. metodę Eulera wstecz $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t\, \mathbf{u}_{n+1}$

2 Wahadło matematyczne

Należy metodą Runge–Kutty rozwiązać równanie wahadła matematycznego (zrobić symulację). Wahadłem matematycznym nazywamy punkt materialny umiesczony na końcu sztywnego, nieważkiego pręta w polu stałej siły (siły grawitacji). Zagadnieniu temu odpowiada następujący układ równań różniczkowych zwyczajnych

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = -k\sin(x) \\ \dfrac{dx}{dt} = v \end{cases} \qquad \text{gdzie } x \in [-\pi, \pi] \tag{2}$$

Należy zbadać zachowanie układu dla $x_0 = 0$, $k = 1$ i różnych wartości początkowych prędkości v_0. Maksymalny krok to 0.1 okresu drgań równoważnego oscylatora harmonicznego (czyli $0.1 \cdot 2\pi$ dla $k = 1$), minimalny czas symulacji to pięć okresów (czyli należy podać wyniki od $t = 0$ do $t = 5 \cdot 2\pi$, przy $k = 1$).

Mile widzany będzie wykres położenia i prędkości od czasu ($x(t)$ vs. t, $v(t)$ vs. t) oraz tzw. wykres fazowy: zależność prędkości od położenia, czyli wykres parametryczny ($v(t)$ vs $x(t)$).

Wymagane jest *przynajmniej* wypisywanie na ekran (bądź do pliku, do dalszej obróbki, np. przez `gnuplota`) wartości $t, x(t), v(t)$. Wypisywanie powinno następować co ileś kroków, bądź co zadany okres czasu. Można również zadać ile wartości ma wypisać (zapisać).

Wykresy w programie `gnuplot` robimy za pomocą polecenia

```
plot "nazwapliku" using 1:2
```

gdzie 1:2 oznacza, że wartości x mają być brane z pierwszej kolumny w pliku o nazwie `nazwapliku`, zaś y z drugiej kolumny. Warto przejrzeć skrypt `wykresik.sh`, dostępny na mojej stronie domowej. W programie tym dostępna jest wbudowany system pomocy, wywoływany za pomoca polecenia `help`, np. `help plot`.

Dla małych wielkości prędkości początkowej układ powinien się zachowywać podobnie jak oscylator harmoniczny: wykresy $x(t)$ i $v(t)$ powinny być odpowiednio sinusoidą i cosinusoidą, zaś na wykresie fazowym powinno być widać okrąg. Przy zbyt dużej wartości kroku (a zatem dużym błędzie numerycznym) okrąg będzie się rozszerzał. Metoda Eulera jest niestabilna już dla oscylatora harmonicznego, więc nie należy jej stosować.

Dla dużych prędkości początkowych prędkość będzie oscylowała, ale nigdy nie będzie zmieniać znaku, zaś kąt będzie rósł; stąd potrzebna jest normalizacja kąta (zmiennej x) do przedziału $[-\pi, \pi]$, np. wzorem $x = \big((x+\pi) \bmod 2\pi\big) - \pi$.