Ćwiczenia z Metod Numerycznych I A
rok akademicki 2001/2001

seria 2

Tomasz Masłowski   Jakub Narębski   Tomasz Pawłowski
Przemysław Olbratowski

26 października 2001 roku

1 Postacie wielomianów, obliczanie wartości wielomianu w punkcie, konwersje między różnymi postaciami

1.1 Postać potęgowa (naturalna) wielomianu

Najczęściej spotykanym sposobem zapisu wielomianów jest ich zapis w bazie jednomianów $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$, czyli tzw. **postać potęgowa**. Nie jest on zawsze najwygodniejszy: drobne błędy we współczynnikach (w tej bazie) mogą powodować znaczne zmiany własności wielomianu (np. położenie miejsc zerowych). Wielomian $W(x)$ dany jest w tej postaci wzorem:

$$W(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \tag{1}$$

Klasyczny algorytm obliczania wartości wielomianu w punkcie:

$$\begin{aligned} w_0 &= a_0, \\ w_i &= w_{i-1} + a_i x x^{i-1}, \quad \text{dla } i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

wymaga $2n$ mnożeń i n dodawań.

Aby policzyć wartość wielomianu możemy zastosować szybszy **algorytm Hornera**. Korzystamy ze wzoru

$$W(x) = (\dots(a_n x + a_{n-1})x + \dots + a_1)x + a_0. \tag{2}$$

Algorytm dany jest wzorem

$$w_n = a_n, \tag{3a}$$
$$w_i = w_{n+1}x + a_i, \quad \text{dla } i = n-1, n-2, \dots, 0. \tag{3b}$$

Wymaga on n mnożeń i n dodawań.

Zadanie 1. Napisać procedurę (program), obliczającą wartość wielomianu (zadanego za pomocą tablicy współczynników w bazie naturalnej $1, x, x^2, x^3, \dots$) w danym punkcie metodą *Hornera*.

1.2 Postać Newtona wielomianu

W zagadnieniach związanych z interpolacją funkcji użyteczna będzie **postać Newtona** wielomianu, czyli użycie bazy $\{1, x - x_0, (x - x_0)(x - x_1), \ldots, (x - x_0)\ldots(x - x_n), \ldots\}$, gdzie $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ są danymi liczbami. Wielomian $W(x)$ dany jest w tej postaci wzorem:

$$W(x) = b_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i P_i(x) = b_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i (x - x_0)\ldots(x - x_{i-1}) \tag{4}$$

Ponownie od analogu klasycznej metody obliczania wartości wielomianu w postaci Newtona (o koszcie $2n$ mnożeń i $2n$ dodawań) szybszy jest **uogólniony algorytm Hornera**. Korzystamy ze wzoru

$$W(x) = (\ldots(b_n(x - x_{n-1}) + b_{n-1})(x - x_{n-2} + \cdots + a_1)(x - x_0) + a_0. \tag{5}$$

Algorytm dany jest wzorem

$$w_n = b_n, \tag{6a}$$

$$w_i = w_{n+1}(x - x_i) + b_i, \quad \text{dla } i = n-1, n-2, \ldots, 0. \tag{6b}$$

Wymaga on n mnożeń i $2n$ dodawań.

1.3 Przejście od postaci Newtona do postaci naturalnej

Znając współczynniki wielomianu w postaci Newtona można wyznaczyć współczynniki jego postaci naturalnej. W tym celu każdy z wielomianów pomocniczych w_i zdefiniowanych wzorami (6) zapiszmy w postaci naturalnej:

$$w_i(x) = \sum_{k=i}^{n} a_k^{(i)} x^{k-i}, \quad \text{dla } i = n, n-1, \ldots, 0. \tag{7}$$

Ze wzoru (6) otrzymujemy zależności rekurencyjne na $a_i^{(j)}$:

$$a_n^{(i)} = a_n^{(i+1)} = \cdots = a_n^{(n)} = b_n, \tag{8a}$$

$$a_i^{(i)} = b_i - a_{i+1}^{(i+1)} x_i, \tag{8b}$$

$$a_k^{(i)} = a_k^{(i+1)} - a_{k+1}^{(i+1)} x_i, \quad \text{dla } k = i+1, i+2, \ldots, n-1. \tag{8c}$$

Przygotował: Jakub Narębski