Ćwiczenia z Metod Numerycznych II A
rok akademicki 2001/2002

seria 4

Jakub Narębski Tomasz Pawłowski

10 grudnia 2004 roku

1 Znajdowanie współczynników wielomianu interpolującego

1.1 Metody bezpośrednie

1.1.1 Korzystając ze wzoru Lagrange'a

Wielomian interpolacyjny dany jest wprost za pomocą wzoru Lagrange'a

$$P(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_N)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_N)}y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_N)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_N)}y_2 + \dots + \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{N-1})}{(x_N-x_1)(x_N-x_2)\dots(x_N-x_{N-1})}y_N. \tag{1}$$

Korzystanie z tej postaci do obliczeń nie jest jednak zbyt wygodne.

Współczynniki w postaci naturalnej wielomianu interpolacyjnego można wyznaczyć rozwiązując układ równań liniowych

$$a_0 + a_1 x_i + \dots + a_n x_i^n = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n. \tag{2}$$

Ten układ równań może być źle uwarunkowany (tzw. macierz Vandermonde'a), i trzeba (należy) do jego rozwiązywania stosować specjalne metody.

1.1.2 Metodą ilorazów różnicowych w postaci Newtona

Łatwiej jest znaleźć współczynniki w postaci Newtona wielomianu interpolacyjnego. Korzystamy z zależności rekurencyjnej miedzy wielomianami składowymi we wzorze Legendre'a i obliczamy tzw. ilorazy różnicowe (za pomocą odpowiedniego wzoru rekurencyjnego). Gdy mamy współczynniki wielomianu interpolacyjnego w postaci Newtona, można przejść do postaci naturalnej.

Niech $W_n(x)$ będzie wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a przechodzącym przez punkty $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$:

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)} \tag{3}$$

Zachodzi następująca tożsamość

$$\begin{aligned} W_n(x) = W_0(x) + \big[W_1(x) - W_0(x)\big] + \big[W_2(x) - W_1(x)\big] + \dots + \\ + \big[W_n(x) - W_{n-1}(x)\big] \,. \end{aligned} \tag{4}$$

Różnica $W_k(x) - W_{k-1}(x)$ jest wielomianem, który można przedstawić w postaci

$$W_k(x) - W_{k-1}(x) = A_k\,(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{k-1})\,, \tag{5}$$

gdzie A jest pewną stałą. Aby ją obliczyć, podstawiamy $x = x_k$ i otrzymujemy

$$A_k = \sum_{i=0}^{k} \frac{y_i}{\omega_k(x_i)}\,, \tag{6}$$

gdzie $\omega_k(x)$ oznacza wielomian k–tego stopnia w bazie Newtona,

$$\omega_k(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_k)\,. \tag{7}$$

Można udowodnić (metodą indukcji), że

$$\begin{aligned} f(x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+n}) = &\frac{y_i}{(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2})\dots(x_i - x_{i+n})} + \\ &+ \frac{y_{i+1}}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i+2})\dots(x_{i+1} - x_{i+n})} + \dots + \\ &+ \frac{y_{i+n}}{(x_{i+n} - x_i)(x_{i+n} - x_{i+1})\dots(x_{i+n} - x_{i+n-1})} \\ &= \sum_{k=i}^{i+n} \frac{f(x_k)}{\prod\limits_{\substack{l=i \\ l \neq k}}^{i+n} (x_k - x_l)} \end{aligned} \tag{8}$$

czego szczególnym przypadkiem jest

$$f(x_0; x_1; \dots; x_n) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)}{\prod\limits_{\substack{k=0 \\ l \neq k}}^{n} (x_k - x_l)} = \sum_{j=0}^{n} \frac{y_j}{\omega_n(x_j)}\,, \tag{9}$$

gdzie $f(x_0; x_1; \dots; x_n)$ oznacza *iloraz różnicowy n–tego rzędu* zdefiniowany wzorem rekurencyjnym

$$f(x_i) = f(x_i) = y_i \tag{10a}$$

$$f(x_i; x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}\,, \tag{10b}$$

$$f(x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+n}) = \frac{f(x_{i+1}; x_{i+2}; \dots; x_{i+n}) - f(x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+n-1})}{x_{i+n} - x_i}\,. \tag{10c}$$

Kolejne ilorazy różnicowe możemy wyliczać w analogiczny sposób jak wyniki cząstkowe metody Neville'a. Kolejne współczynniki w bazie Newtona będą zatem równe kolejnym ilorazom różnicowym:

$$A_k = f(x_0; x_1; \dots; x_k) \quad \text{dla } k = 0, 1, \dots, n\,. \tag{11}$$

1.1.3 Algorytm Hornera dla wielomianu w bazie Newtona

Niech dany będzie wielomian w postaci Newtona

$$W(x) = b_0 + \sum_{i=1}^{n} b_i (x - x_0) \dots (x - x_{i-1}) \,. \tag{12}$$

Do obliczania wartości tego wielomianu możemy zastosować uogólniony algorytm Hornera:

$$W(x) = (\dots(b_n(x - x_{n-1}) + b_{n-1})(x - x_{n-2} + \dots + a_1)(x - x_0) + a_0. \tag{13}$$

Algorytm dany jest wzorem

$$w_n(x) = b_n, \tag{14a}$$

$$w_i(x) = w_{n+1}(x)(x - x_i) + b_i, \quad \text{dla } i = n-1, n-2, \dots, 0 \tag{14b}$$

$$\dots$$

Wynikiem jest

$$W(x) = w_0(x) \tag{14c}$$

1.1.4 Zamiana współczynników w bazie Newtona na naturalne (w bazie jednomianów)

Każdy z wielomianów pomocniczych $w_i(x)$ w metodzie Hornera zapiszmy w postaci naturalnej:

$$w_i(x) = \sum_{k=i}^{n} a_k^{(i)} x^{k-i}, \quad i = n, n-1, \dots, 0 \tag{15}$$

gdzie dostajemy na współczynniki $a_k^{(i)}$ następujący układ równań rekurencyjnych

$$a_n^{(i)} = a_n^{(i+1)} = \dots = a_n^{(n)} = b_n, \tag{16a}$$

$$a_i^{(i)} = b_i - a_{i+1}^{(i+1)} x_i, \tag{16b}$$

$$a_k^{(i)} = a_k^{(i+1)} - a_{k+1}^{(i+1)} x_i, \quad \text{dla } k = i+1, i+2, \dots, n-1. \tag{16c}$$

Szukane współczynniki postaci naturalnej wielomianu $W(x)$ to oczywiście $a_k^{(0)}$

$i = n$	$i = n-1$	$\dots$	$i = 0$
$a_n^{(n)}$	$a_{n-1}^{(n-1)}$		$a_0^{(0)}$
	$a_n^{(n-1)}$		$a_1^{(0)}$
	$\dots$		
			a_n^0

Tabela 1: Przejście z bazy Newtona do bazy jednomianów

$(k = 0, 1, \dots, n)$.

Zapis tego algorytmu ma następującą postać

```
a[n] := b[n];
for i := n-1 step -1 until 0 do
begin
  xi := x[i];
  a[i] := b[i];
  for k := i step 1 until n-1 do
    a[k] := a[k] - xi × a[k+1];
end;
```

Koszt tego algorytmu to $n(n+1)/2$ mnożeń i odejmowań. Jest on numerycznie stabilny.

1.2 Zastosowanie algorytmu Neville'a

Inną metodą jest użycie algorytmu Neville'a wyznaczania wartości wielomianu intepolującego w punkcie. Niech wielomian interpolujący będzie dany wzorem

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m. \tag{17}$$

Jeśli dokonamy interpolacji (ekstrapolacji) wielomianowej w punkcie $x = 0$, to otrzymana wartość będzie oczywiście równa zerowemu współczynnikowi wielomianu, czyli a_0. Jeśli teraz odejmiemy od wielomianu otrzymane a_0 i podzielimy go przez x zmniejszając jego stopień, to w ten sam sposób możemy obliczyć następny współczynnik itd.

Na język algorytmu Neville'a tłumaczy się to w następujący sposób. Najpierw znajdujemy za pomocą algorytmu Neville'a wartość w $x = 0$ (oznaczmy ją przez a_k). Od każdej stabelaryzowanej wartości y_i odejmujemy otrzymana wartość w zerze [przesunięcie]. Następnie każdą stabelaryzowaną wartość y_i dzielimy przez odpowiadające jej x_i, i odrzucamy jeden z punktów (np. o najmniejszej wartości bezwzględnej x_i) [zmniejszenie stopnia wielomianu].

$$y_i := \frac{y_i - c_k}{x_i}. \tag{18}$$

Czynność powtarzamy dopóki nie uzyskamy pełnej postaci wielomianu.

Jeżeli $x = 0$ leży daleko poza zakresem stabelaryzowanych wartości, x_i, bądź jedno z x_i jest równe lub bardzo bliskie 0, należy rozważyć przesunięcie zagadnienia (obliczanie $P(x-a)$). Współczynniki wielomianu po przesunięciu możemy wyliczyć np. używając algorytmu Hornera do wyliczania znormalizowanych pochodnych $w^{(j)}(x)/j!$ dzieląc wielomian przez $(x - a)$.

2 Zadanie domowe

Napisać program znajdujący współczynniki wielomianu interpolacyjnego, albo w bazie jednomianów przy zastosowaniu (napisanego wcześniej) algorytmu Neville'a, albo w bazie Newtona obliczając rekurencyjnie odpowiednie ilorazy różnicowe. Można założyć, że nie ma potrzeby przesuwania wielomianu, tzn. 0 leży niezbyt daleko od wartości x_i, a jednocześnie żadne z x_i nie jest niebezpiecznie bliskie 0.

Sprawdzić, czy algorytm ten zastosowany do wielomianu (odpowiednio zadanego w postaci naturalnej lub w bazie Newtona) odtwarza jego współczynniki (także dla ilości punktów większej od ilości współczynników wielomianu); warto sprawdzić, czy algorytm Neville'a odtwarza wartości wielomianu (czy pierwszy krok daje poprawne wyniki).

Zastosować algorytm do wybranych funkcji. (W przeciwieństwie do zadania z algorytmem Neville'a nie potrzeba dokonywać interpolacji na większej ilości punktów niż stopień wielomianu plus jeden). Wartość interpolacji w punkcie należy znajdować obliczając znaleziony wielomian interpolacyjny w zadanym punkcie np. za pomocą odpowiedniego do postaci wielomianu algorytmu Hornera. Narysować (np. zapisując wyniki do plików tekstowych i używając programu `gnuplot`: polecenia dla niego też można zapisywać do pliku w naszym programie) wykres funkcji, wykres wielomianu interpolacyjnego oraz zaznaczyć (narysować za pomocą punktów) punkty na których oparta jest interpolacja.

Ogólnie: należy przetestować algorytm znajdowania współczynników wielomianu interpolacyjnego. Powyższe zagadnienia to plan optymalny; można zrobić mniej, można zrobić więcej.

Przygotował: Jakub Narębski