Metody Numeryczne II A

Zadanie dodatkowe (nieobowiązkowe).
Ruch planet w polu sił grawitacyjnych.

Należy napisać program przeprowadzający symulację ruchu ciał (planet) oddziałujących grawitacyjnie ze sobą. Symulację należy przeprowadzić rozwiązując numerycznie odpowiedni układ równań różniczkowych. Program powinien wyświetlać symulowany ruch planet.

Dokładność metody różnicowej można sprawdzać badając zmiany wielkości fizycznych które dla ścisłego rozwiązania są stałe; są całkami ruchu. Są to: całkowita energia, moment pędu oraz pęd (który będzie zachowany w tym zagadnieniu dla każdej metody różnicowej).

Ponieważ w zagadnieniu ruchu grawitacyjnego występują siły zależne *wyłacznie* od położeń możemy zastosować metodę **LeapFrog** (żabiego skoku), zadaną wzorami:

$$
\begin{aligned}
v_{n+\frac{1}{2}} &= v_{n-\frac{1}{2}} + \Delta t\, a(x_n) \\
x_{n+1} &= x_n \qquad + \Delta t\, v_{n+\frac{1}{2}},
\end{aligned}
$$

gdzie a jest przyspieszeniem grawitacyjnym.

Dokładną postać zagadnienia można wymyślić samemu (do uzgodnienia z osobą prowadzącą ćwiczenia). Poniżej podane są przykłady zagadnień.

Przykład 1: katapulta grawitacyjna

Mamy układ planetarny, dla uproszczenia w dwóch wymiarach, złożony z gwiazdy centralnej (Słońca), planety z której wystrzeliwujemy bezmasowy (czyli nie generujący oddziaływania grawitacyjnego, a tylko podlegający oddziaływaniu ze strony innych ciał) próbnik (Ziemi), oraz ciężkiej planety krążącej w dużej odległości od gwiazdy centralnej. Należy wycelować próbnik (sondę) w stronę drugiej planety tak, by przeleciawszy obok niej zyskała prędkość do wylecenia poza układ planetarny (uwolnienia się z oddziaływania grawitacyjnego gwiazdy centralnej). Dane dotyczące Układu Słonecnego (masy Słońca, masy i orbity Ziemi oraz Jowisza) można wziąć z dowolnych tabel astronomiczno–fizycznych. Masy i odległości należy wyrazić w wygodnych jednostkach (zapisując w tych samych jednostkach stałą grawitacji), np. w jednostach masy Ziemi M_Z i jednostki astronomicznej a.u.. Program powinien (co najmniej) wykreślać tor ruchu próbnika.

Przykład 2: układ podwójny

Mamy układ podwójny z planetą. Zobaczyć dla różnych przypadków stabilność tego układu. Układ powinien być stabilny w przynajmniej dwu przypadkach:

1. Ciasny układ podwójny (dwie gwiazdy o porównywalnej masie krążące blisko siebie), planeta w dużej odległości wokół środka masy dwu gwiazd.
2. Luźny układ podwójny, z planetą krążącą blisko jednej z gwiazd. Układ planetarny z gwiazdą „towarzyszącą".

Potrzebna będzie w miarę dokładna i stabilna metoda numeryczna.

Przykład 3. ruch trójwymiarowy

Przeprowadzić symulację ruchu układu planetarnego dla nietrywialnej konfiguracji trójwymiarowej; np. planety o różnych płaszczyznach ruchu, czy planeta z księżycem o płaszczyźnie ruchu prostopadłej do ekliptyki. Należy umożliwić użytkownikowi obracanie układu współrzędnych. Przydatna też byłaby możliwość centrowania widoku na jednym z ciał.

Służę pomocą przy obrazowaniu obiektów trójwymiarowych na ekranie.

Przykład 4. zredukowane zagadnienie trzech ciał

Przeprowadzić symulację ruchu ciała o pomijalnej masie w polu grawitacyjnym pochodzącym od dwu ciał o dużej masie (np. ruch planetoidy pod wpływem siły grawitacyjnej Słońca i Jowisza). Ruch należy przedstawić w układzie, w którym dwa masywne ciała (poruszające się zgodnie z prawami Keplera po orbitach kołowych względem wspólnego środka masy) pozostają w spoczynku. Wykreślić tor ruchu trzeciego ciała w tym układzie. Wybór układu odniesienia w którym przeprowadzamy symulację należy do twórcy programu. Prostsza jest symulacja w układzie inercjalnym i tylko odpowiednie przedstawianie wyników. *Uwaga:* układ równań różniczkowych dla tego zagadnienia jest źle uwarunkowany: należy stosować jak najdokładniejszą metodę.

Rozwiązanie powyższego zadania jest nieobowiązkowe. Zrobienie takiego zadania (lub innego z zadań dodatkowych które się pojawią) jest podstawą do wystawienia oczeny *celującej*. Termin oddania: dowolny.

Jakub Narębski, Paweł Jankowski