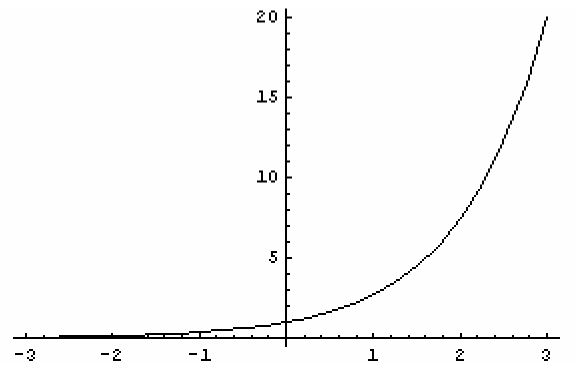
Podstawowe informacje o funkcjach wykładniczej i logarytmicznej

Jakub Zieliński

W opracowaniu zostały przedstawione podstawowe właściwości funkcji wykładniczej i logarytmicznej wraz z przykładami zastosowań w medycynie. Informacje o zastosowaniach oraz przykłady występują bezpośrednio po odpowiednim fragmencie teorii.

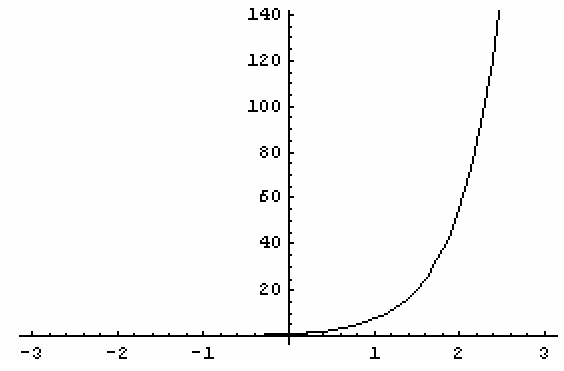
1. Funkcja wykładnicza

Funkcja wykładnicza zmiennej x to dowolna stała dodatnia podniesiona do potęgi x. Najczęściej stałą tą jest liczba e = 2,71… Funkcja wykładnicza przybiera więc postać e^x.

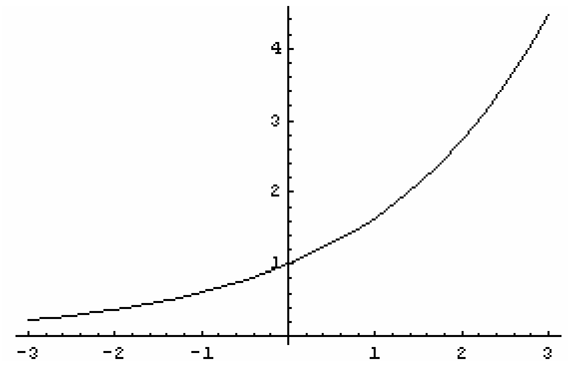


Rys. 1 Wykres funkcji e^x

Prostym uogólnieniem jest funkcja postaci e^{ax} lub e^{-ax}, gdzie a jest stałą dodatnią. Zamiana dowolnej funkcji $f(x)$ na $f(ax)$ powoduje jedynie zmianę skali na osi poziomej.



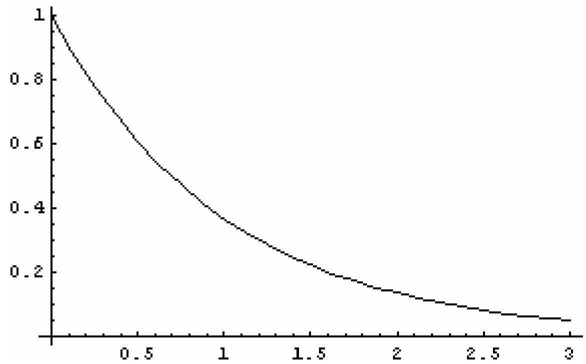
Rys. 2 Wykres funkcji e^{2x}



Rys. 3 Wykres funkcji $e^{0.5x}$

Z powyższych rysunków widać, że im stała a jest większa, tym wykres funkcji e^{ax} jest bardziej stromy. W szczególnym przypadku gdy $a=0$ funkcja e^{ax} jest funkcją stałą, gdyż $e^{0x} = 1$.

Natomiast funkcja e^{-ax} jest malejąca. Jej wykres jest odbiciem zwierciadlanym funkcji e^{ax} wzdłuż osi OY.



Rys. 4 Wykres funkcji e^{-x}

Jak widać z powyższych wykresów, funkcja wykładnicza przybiera jedynie wartości dodatnie.

Przykładem zastosowania w medycynie, jest zanik monochromatycznej wiązki promieniowania Roentgena w materii lub rozpad promieniotwórczy pierwiastków.
W pierwszym przypadku natężenie promieniowania I dane jest wzorem:

$$I(x)=I(0)e^{-kx},$$

gdzie $I(0)$ – to natężenie wychodzące z lampy Rentgenowskiej, k – liniowy współczynnik pochłaniania promieniowania w materii, x – grubość warstwy pochłaniającej.
Jednostką liniowego współczynnika pochłaniania (absorpcji) jest [1/m].

Natomiast w przypadku rozpadu promieniotwórczego, liczba nietrwałych atomów spada wykładniczo z czasem:

$$N(t)=N(0)e^{-\lambda t},$$

gdzie $N(0)$ – to początkowa liczba atomów, λ - stała rozpadu, t – czas.
Jednostką stałej rozpadu jest [1/s]. Łatwo się domyślić, że ma ona ścisły związek z czasem połowicznego rozpadu. Jaki? Na pewno są to wielkości odwrotnie proporcjonalne (wynika to z ich jednostek). Na dokładniejszą odpowiedź musimy jeszcze poczekać – potrzebna nam będzie znajomość logarytmów.

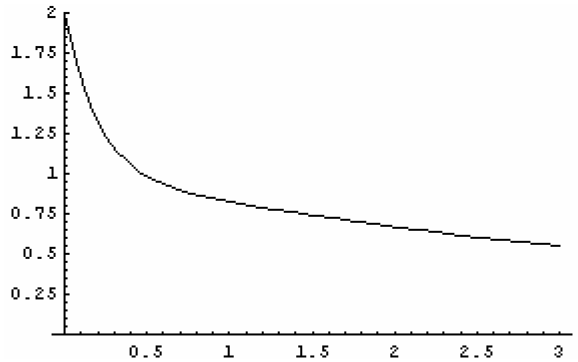
Dzięki temu, że:

$$x^n x^m = x^{n+m},$$

iloczyn dwóch funkcji wykładniczych też jest funkcją wykładniczą:

$$e^{ax}e^{bx}=e^{(a+b)x}.$$

Natomiast suma dwóch funkcji wykładniczych funkcją wykładniczą już nie jest!



Rys. 5 Wykres funkcji $e^{-5x}+e^{-0.2x}$

Dlatego promieniowanie hamowania emitowane przez lampę rentgenowską nie zanika wykładniczo w materii. Jest ono bowiem mieszaniną fal o różnej długości, z których każda jest w różnym stopniu absorbowana przez materię. Zazwyczaj[1] im fala rentgenowska jest krótsza tym lepiej przenika przez ośrodek materialny. Dłuższe dala są więc silniej pochłaniane od krótszych. Zatem, w miarę propagacji w ośrodku zmniejsza się średnia długość fali. W rezultacie, mierzony współczynnik absorpcji spada wraz z grubością absorbentu. Efekt ten nazywa się utwardzaniem promieniowania.
Czy w ten sposób można promieniowanie uczynić dowolnie przenikliwym? Nie. Widmo lampy rentgenowskiej jest bowiem ograniczone (dla danego napięcia lampy istnieje minimalna długość emitowanej przez nią fali). Zatem promieniowanie stanie się z dobrym przybliżeniem monochromatyczne – zaczną dominować najkrótsze fale. Dla monochromatycznego promieniowania, absorpcja jest już wykładnicza.
Zatem obserwowany, wraz ze wzrostem grubości absorbentu, spadek współczynnika pochłaniania przy pewnej grubości ustaje.

Podobnie, wbrew powszechnej opinii, skażenie terenu substancją promieniotwórczą nie zanika wykładniczo.
Po pierwsze, niemal zawsze teren jest skażony wieloma izotopami. Każdy z nich rozpada się z inną szybkością. O zaniku wykładniczym możemy mówić, dopiero gdy zostanie już tylko jeden izotop.
Po drugie, produkty rozpadu promieniotwórczego zazwyczaj nie są trwałe (oczywiście cząstki alfa, beta i gamma są trwałe ale nietrwałe mogą być pozostałe produkty rozpadu). Dlatego liczba niektórych nietrwałych atomów najpierw zwiększa się by następnie zmaleć do zera.

Oczywiście natężenie promieniowania wiąże się z atomami, które właśnie się rozpadły, a nie atomami nietrwałymi, które dopiero „czekają na swoją kolej”. Dlatego, przy tej samej liczbie atomów, jeśli ich czas połowicznego rozpadu jest krótszy to natężenie promieniowania jest większe niż w sytuacji gdy jest on dłuższy.

[1] Dokładna zależność współczynnika pochłaniania od długości fali jest bardzo skomplikowana. Fale rentgenowskie rzeczywiście tym lepiej przenikają przez materię im są krótsze. Ale już fale radiowe (różniące się od rentgenowskich właśnie długością) zazwyczaj tym lepiej się rozchodzą im są dłuższe. Podobnie jest w przypadku ultradźwięków. Im są krótsze tym płycej penetrują ciało pacjenta. Sytuację komplikują jeszcze zjawiska rezonansowe – jeśli foton ma energię zbliżoną do różnic energii poziomów energetycznych (powłok elektronowych, orbitali) w substancji na którą padają to wysoce prawdopodobne jest jego pochłonięcie. Równocześnie cząsteczka (atom) która pochłonęła foton przeskakuje na wyższy dozwolony poziom energetyczny. Jest to sytuacja podobna do generowania promieniowana charakterystycznego w mammografach.

Ze szkoły średniej wiemy, że

$$(x^m)^n = x^{m\,n}.$$

Oznacza to, że kwadrat funkcji wykładniczej nie jest jakimś nowym rodzajem funkcji tylko funkcją wykładniczą o dwa razy większym współczynniku:

$$(e^x)^2 = e^{2x}.$$

Co więcej możemy w ten sposób zamieniać podstawę funkcji wykładniczej:

$$(3^x)^2 = 3^{2x} = (3^2)^x = 9^x.$$

Wiemy więc, jak przejść od funkcji wykładniczej o podstawie 3 do funkcji o podstawie 9. Podobnie, potrafimy zamienić funkcję wykładniczą o podstawie 4 na funkcję wykładniczą o podstawie 2 lub 16. Ale jaki jest związek funkcji wykładniczej o podstawie 2 z funkcją o podstawie 10 lub *e*? Do tego też będziemy potrzebować logarytmów. Czas więc najwyższy się z nimi zapoznać.

2. Funkcja logarytmiczna

Funkcja logarytmiczna o danej podstawie jest odwrotnością odpowiedniej funkcji wykładniczej (tak jak pierwiastek jest odwrotnością funkcji potęgowej).

Czyli $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$.

Zazwyczaj używa się funkcji logarytmicznych o podstawach 10 lub *e*. Stosowane są więc dwa uproszczone oznaczenia logarytmów tych podstawach: $\log_{10}(x)=\log(x)$ oraz $\log_e(x)=\ln(x)$.

Zatem:

$\log_2(2^x)=x,\ \ \ln(e^x)=x,\ \ e^{\ln(x)}=x,\ \ \log(10^x)=x,\ \ 10^{\log(x)}=x,$ itd.

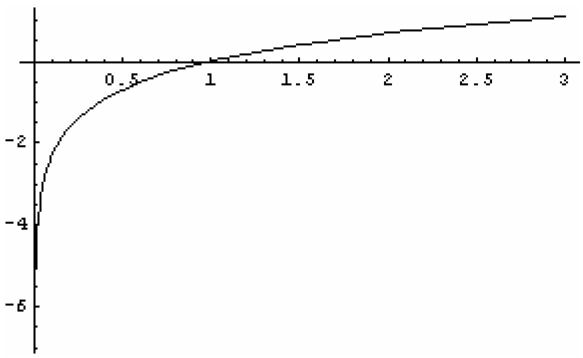
Zatem logarytm naturalny (o podstawie *e*) z *x* odpowiada na pytanie „do jakiej potęgi trzeba podnieść *e* aby otrzymać *x*? Analogiczną interpretację mają wartości pozostałych logarytmów. Zatem:

$\log(100) = 2,\ \ \log(10)=1,\ \log(1)=0,\ \log(1/10)=-1,$ itd.

Dla wprawy podam jeszcze kilka przykładów: $\log_2(16)=4,\ \ln(e)=1,\ \ln(e^2)=2.$

W praktyce, poza logarytmem naturalnym i dziesiętnym, można się spotkać jeszcze z logarytmem o podstawie 2. Są one dość często stosowane w informatyce – komputery używają systemu dwójkowego. Podobnie, dla ludzi wygodny jest logarytm dziesiętny. Dlaczego więc logarytm o niewymiernej podstawie *e* jest nazywany naturalnym? Na odpowiedź musimy jeszcze poczekać.

Pamiętamy, że funkcja wykładnicza przybierała jedynie wartości dodatnie. Oznacza to, że logarytm jest zdefiniowany jedynie dla dodatnich wartości *x*. Nie umiemy np. odpowiedzieć na pytanie „do jakiej potęgi trzeba podnieść 10 aby otrzymać -2?”.



Rys. 6 Wykres funkcji ln(x)

Jaki jest związek pomiędzy logarytmami o różnych podstawach?
Najpierw policzmy logarytmy dla kilku najważniejszych dla nas wartości:

$log_2(2)=1$, $log_2(e)=1.443$, $log_2(10)=3.322$,

$ln(2)=0.693$, $ln(e)=1$, $ln(10)=2.303$,

$log(2)=0.301$, $log(e)=0.434$, $log(10)=1$.

Widać, że $log(2)*log_2(10) = log(e)*ln(10) = ln(2)*log_2(e) = 1$.

Rzeczywiście, prawdziwy jest ogólny wzór:

$$log_a(b)*log_b(a) =1.$$

Po prostu aby jeśli $a^n=b$ to $b^{1/n}=a$. Powyższą równość możemy jeszcze sprawdzić na prostym przykładzie: $log(100) = 2$ oraz $\log_{100}(10)=1/2$.

Dysponujemy więc pierwszym wzorem pozwalającym zamieniać podstawy logarytmów. Jak jednak policzyć logarytm o podstawie 2 korzystając z kalkulatora, na którym dostępne są jedynie logarytmy naturalny i dziesiętny?

Skorzystamy w tym celu ze wzoru:

$$log_a b=(log_c b)/(log_c a).$$

Sprawdźmy na prostym przykładzie ($a=100, b=10000, c=10$):

$$2=log_{100}(10000)=log(10000)/log(100)=4/2=2.$$

Ogólnie $log_{100}(x)=log(x)/log(100)=log(x)/2$. Wynik jest tak naprawdę oczywisty – jako, że $100=10^2$ jasne jest, że 10 trzeba podnieść do dwa razy większej potęgi niż 100, żeby otrzymać tę samą liczbę.
Mamy więc sposób na obliczanie logarytmów o dowolnej podstawie mając do dyspozycji jedynie logarytmy dziesiętne lub naturalne, np. $log_2(x)=log(x)/log(2)=ln(x)/ln(2)$.

Zarówno $log(2)$ jak i $ln(2)$ to stałe. Widzimy więc, że logarytmy o różnych podstawach różnią się tylko czynnikiem multiplikatywnym (czyli stałą przez którą trzeba pomnożyć logarytm o jednej podstawie aby otrzymać inny).

Jako ćwiczenie warto sprawdzić, np. że $log_2(16) = 4$, korzystając z logarytmów naturalnych lub dziesiętnych. Można też sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, że $ln(x) = log(x)/log(e)$ oraz $log(x) = ln(x)/ln(10)$.

Pamiętamy (mam nadzieję), że dla funkcji wykładniczej: $e^x e^y = e^{x+y}$.
Dla logarytmów (jako funkcji odwrotnych) spełnione jest analogiczne prawo:

$$ln(x\,y) = ln(x) + ln(y).$$

Jeżeli przyjmiemy $x = y$ to $ln(x^2) = 2\,ln(x)$. Wzór ten możemy łatwo uogólnić:

$$ln(x^n) = n\,ln(x).$$

Kładąc $n = -1$ dostajemy :

$$ln(1/x) = -\,ln(x).$$

Łącząc powyższe wzory, dostajemy:

$$ln(x/y) = ln(x) - ln(y).$$

Powyższe wzory, zostały podane dla logarytmów naturalnych, ale są słuszne dla logarytmów o dowolnej podstawie. Sprawdźmy:3 = $log(1000) = log(100*10) = log(100) + log(10) = 2+1$.

Właściwości logarytmów są podstawą tak zwanej skali logarytmicznej. W przeciwieństwie do skali liniowej, w równych odstępach są umieszczane nie wartości interesującej nas wielkości ale ich logarytmy. Przykładowo: *1/100, 1/10, 1, 10, 100, 1000…*
Dzięki twemu można umieścić na jednej osi zarówno wielkości bardzo małe jak i bardzo duże. Innym niezwykle ważnym zastosowaniem skali logarytmicznej jest możliwość „wyprostowywania” funkcji. Jak wiemy monochromatyczne promieniowanie rentgenowskie zanika wykładniczo w materii: $I(x) = I(0)\,e^{-kx}$. Jeśli więc będziemy mierzyć, jak spada natężenie $I(x)$ wraz z grubością warstwy pochłaniającej x, powinniśmy móc wyznaczyć wartość współczynnika pochłaniania k, gdyż jest on jedyną niewiadomą. Problem w tym, że trudno „na oko” ocenić czy nasza funkcja wykładnicza to powiedzmy $e^{-2.3\,x}$ czy może $e^{-2.5\,x}$.
W tym celu musimy przekształcić równanie opisujące zanik promieniowania. Policzmy logarytm naturalny z obu stron: $ln(I(x)) = ln(I(0)e^{-kx}) = ln(I(0)) + ln\,(e^{-kx}) = ln(I(0)) - kx$.
Widzimy więc, że logarytm naturalny z natężenia jest liniową funkcją grubości absorbentu, a w współczynnik pochłaniania k jest współczynnikiem proporcjonalności tej zależności. Jego wartość możemy już łatwo odczytać z wykresu lub obliczyć stosując wzory na regresję liniową.
W podobny sposób można rozwiązać następujący problem: wiemy, że pewna wielkość y, rośnie wraz ze wzrostem innej wielkości x, szybciej niż liniowo. Nie wiemy jednak czy y zależy od drugiej czy może trzeciej potęgi x. Zapiszmy więc: $y = A\,x^n$, gdzie stałe A oraz n są nieznane. Po obustronnym zlogarytmowaniu dostajemy: $ln(y) = ln(A\,x^n) = ln(A) + n\,ln(x)$.
Zatem jeśli zarówno na obu osiach (*OX* i *OY*) umieścimy logarytmy odpowiednich wartości, funkcje liniowa, kwadratowa, sześcienna, pierwiastek (n nie musi być przecież całkowite) staną się prostymi. Wartości $ln(A)$ oraz n możemy odczytać z wykresu. W powyższym problemie zamiast logarytmów naturalnych, moglibyśmy użyć logarytmów dziesiętnych.

Funkcja logarytmiczna występuje we wzorze Nersta określającym potencjał powstający pomiędzy dwoma stronami błony:

$$V^N=RT/F\ ln(c_2/c_1),$$

gdzie *R* – stała gazowa, *F* – stała Faradaya (ładunek jednego mola jonów), *T* – temperatura w Kelvinach, c_1 i c_2 – stężenia jonów po obu stronach błony.
Widać, że potencjał Nersta zależy tylko od ilorazu stężeń. Dla równych stężeń wynosi zero, bo $ln(1)=0$. Jeśli iloraz stężeń wzrośnie *e*-krotnie, potencjał Nersta wzrasta o stałą wartość RT/F. Zatem, dla $c_2/c_1=e$ potencjał wynosi $V^N=RT/F$, dla dla $c_2/c_1=e^2$ potencjał wynosi $V^N=2RT/F$ itd.
To bardzo specyficzna właściwość: potencjał nie jest proporcjonalny do różnicy stężeń. Dzięki temu nawet niewielkie różnice stężeń jonów po obu stronach błony, powodują powstanie istotnego potencjału. Natomiast zwiększanie (nawet znaczne) różnicy stężeń nie spowoduje powstania dużego napięcia pomiędzy obiema stronami błony (różnica potencjałów oczywiście będzie rosła ale coraz wolniej).
Co się stanie jeśli zamienimy miejscami stężenia po obu stronach błony, czyli c_2 zamienimy z c_1? Dzięki temu, że $ln(1/x) = - ln(x)$: $ln(c_2/c_1)= - ln(c_1/c_2)$. Zatem zmieni się jedynie znak potencjału. Jest to oczywiście zgodne ze zdrowym rozsądkiem.

Wzór Nersta dotyczy sytuacji, gdy w roztworze po obu stronach błony występuje tylko jeden rodzaj jonów. Jeśli tak nie jest, musimy korzystać z nieco bardziej skomplikowanych wzorów Hendersona i Goldmana – jednak i one zawierają funkcję logarytmiczną.

Zwróćmy uwagę, że zamiast logarytmu naturalnego, we wzorze na potencjał Nersta możemy użyć np. logarytmu dziesiętnego: $V^N=RT/F\ ln(c_2/c_1)= RT/F\ log(c_2/c_1)/log(e)$ $=2.303\ RT/F\ log(c_2/c_1)$.
Jak widać, wzór stał się nieco bardziej skomplikowany. Jest to istotne uzasadnienie przedrostka „naturalny" dla logarytmu o podstawie *e*. Zazwyczaj, gdy staramy się powiązać wielkości występujące w przyrodzie (naturze) i musimy użyć logarytmu to jest to logarytm naturalny.

Funkcja logarytmiczna występuje również w prawie Webera-Fechnera: „wielkość wrażenia zmysłowego jest proporcjonalna do logarytmu z natężenia bodźca".
W powyższym prawie nie sprecyzowano o jakie logarytmy chodzi. Nie jest to jednak niedopatrzenie. Jak wiemy, zamiana podstawy logarytmu powoduje tylko przemnożenie wyniku o stałą. Zmienia się więc jedynie współczynnik proporcjonalności, a nie postać prawa.

Przykładowo, poziom natężenia dźwięku (mierzony w belach) jest zdefiniowany jako:

$$L = log(I/I_0)\ [B],$$

gdzie $I_o = 10^{-12} [W/m^2]$ – przyjmuje się, że jest to najmniejsze natężenie dźwięku jaki może być usłyszany przez człowieka.
Zazwyczaj jednak poziom natężenia dźwięku nie jest podawany w belach, a w jednostkach *10* razy mniejszych: decybelach. Zatem:

$$L = 10*log(I/I_0)\ [dB].$$

Zatem natężeniu $10^{-12} [W/m^2]$ odpowiada poziom natężenia *0[db]*. Gdy natężenie jest *10* razy większe, poziom natężenia wynosi *10[dB]*, dla natężenia *100* razy większego niż I_0, poziom natężenia wynosi *20[db]*, itd.
Podobnie, poziom nateżenia *-10[dB]* oznacza dźwięk, o natężeniu *10* razy mniejszym niż I_0, *-20[dB]* natężenie *100* razy mniejsze od wzorcowego itp. Warto też zwrócić uwagę, że ciszy absolutnej odpowiada poziom natężenia $-\infty [dB]$.

Zaletą stosowania *dB* jest to, że wyrażony w nich poziom natężenia jest w przybliżeniu proporcjonalny do intensywności wrażenia słuchowego. To że nasze zmysły „logarytmują" jest bardzo pożyteczne. Dzięki temu możemy odbierać zarówno dźwięki ciche jak i bardzo głośne. Próg bólu występuje typowo przy poziomie natężenia *110[dB]*. Jakie jest wtedy natężenie dźwięku?
$110 = 10 \log(I/I_0)$, czyli $\log(I/I_0) = 11$. Skorzystamy teraz z faktu, że logarytm dziesiętny jest funkcją odwrotną do funkcji 10^x. Zatem: $I/I_0 = 10^{11}$.
Czyli ostatecznie: $I = I_0 * 10^{11} = 0.1\ [W/m^2]$.
Widzimy więc, że największe natężenie jakie jesteśmy w stanie zarejestrować jest około 10^{11} (sto miliardów) razy większe od najmniejszego.

Niestety przez to, że wrażenie słuchowe nie jest proporcjonalne do natężenia nie jesteśmy w stanie precyzyjnie oceniać poziomu natężenia dźwięku. Podobnie, poziom natężenia dwu źródeł mierzony w decybelach nie jest sumą poziomów natężenia składników. Weźmy dwa źródła o poziomie natężenia *10 [dB]* każde. Ich natężenia to: $10 = 10 \log(I/I_0)$.
Zatem $\log(I/I_0) = 1$, więc $I/I_0 = 10$. Czyli każde ze źródeł emituje dźwięk o natężeniu $10^{-11} [W/m^2]$. Sumaryczne natężenie wynosi więc $2*10^{-11} [W/m^2]$. Poziom natężenia od obu źródeł wynosi więc: $L = 10 \log(2*10^{-11}/10^{-12}) = 10 \log(20) = 10 \log(2*10) =$
$10 (\log(2)+\log(10)) = 10(\log(2) +1) = 13.010$.

Jeszcze mniej intuicyjny wynik otrzymujemy, gdy wyznaczamy sumaryczny poziom natężenia dźwięków o skrajnie różnym natężeniu. Jakie więc będzie poziom natężenia dźwięku jeśli obok siebie stoją dwa źródła generujące dźwięki o poziomach natężenia *100[dB]* i *10[dB]?*
Najpierw wyznaczmy natężenia poszczególnych dźwięków.
$100 [dB] = 10 \log(I_1/I_0)$, więc $I_1/I_0 = 10^{10}$. Zatem $I_1 = 10^{-2} [W/m^2]$. W analogiczny sposób otrzymujemy natężenie drugiego źródła: $I_2 = 10^{-11} [W/m^2]$ (warto samemu to przeliczyć).
Sumaryczne natężenie wynosi więc $I = I_1 + I_2 = 10^{-2} + 10^{-11} [W/m^2]$. Całkowity poziom natężenia dźwięku będzie więc równy: $L = 10 \log((10^{-2} + 10^{-11})/10^{-12}) [dB] =$
$10 \log (10^{10} + 10) [dB] = 10 \log(10^{10}(1 + 10^{-9})) [dB] = 10(\log(10^{10}) + \log(1 + 10^{-9})) [dB] =$
$100 + 10 \log(1 + 10^{-9}) [dB]= 100 + 4.343*10^{-9} [dB]$.
Wynik nie powinien tak naprawdę zaskakiwać. Jeśli obok siebie stoją źródła dźwięków o natężeniach różniących się miliard razy, wpływ słabszego źródła musi być znikomy. Dziwić może fakt iż poziom natężenia *100 [dB]* odpowiada natężeniu miliard razy większemu niż poziom natężenia *10 [dB]*. Skala logarytmiczna z pewnością nie jest intuicyjna – rzecz w tym, że tak właśnie funkcjonują nasze zmysły – nawet osoby obdarzone słuchem muzycznym są wstanie precyzyjnie rozpoznawać wysokość (częstotliwość), a nie natężenie dźwięku.

W definicji decybeli użyto logarytmów dziesiętnych, a nie naturalnych gdyż poziom natężenia dźwięku nie jest obiektywnie mierzalną wielkością fizyczną – jest nią natężenie mierzone w $[W/m^2]$. Można więc było użyć logarytmów o dowolnej podstawie – to tylko kwestia konwencji.

W decybelach można wyrazić nie tylko poziom natężenia dźwięku ale w zasadzie dowolną wielkość dodatnio określoną (nie istnieją logarytmy z liczb ujemnych). Trzeba tylko przyjąć jakiś poziom odniesienia – dla dźwięku jest to umowny próg słyszalności: 10^{-12} $[W/m^2]$. Bardzo często w decybelach jest wyrażany stosunek szumu do sygnału – jako odniesienie przyjmowane jest natężenie szumu. Jeśli więc stosunek sygnału do szumu wynosi *20 [dB]* to oznacza to, że natężenie sygnału jest *100* razy większe od natężenia szumu. Dość często w decybelach właśnie podawane jest wzmocnienie sygnału uzyskiwane we wzmacniaczach. Analogicznie, stukrotnie osłabienie sygnału będzie zapisane jako *-20[dB]*.

Słuch nie jest jedynym „logarytmującym" zmysłem. Podobnie jest ze wzrokiem. Sytuację komplikuje zmienna – w zależności od natężenia światła – średnica źrenicy. Dlatego w przypadku światła nie używamy decybeli do określenia poziomu natężenia. Wrażenie „jasności" jest proporcjonalne do logarytmu natężenia tylko przy założeniu stałej średnicy źrenicy. Dlatego tak trudno robić zdjęcia aparatem fotograficznym starego typu – bez wbudowanego światłomierza.

3. Funkcja wykładnicza raz jeszcze

Dzięki znajomości logarytmów będziemy mogli powiązać różne funkcje wykładnicze. Wróćmy do funkcji przedstawiającej pochłanianie promieniowania w materii.
Po przejściu przez warstwę o grubości x, natężenie spada e^{-kx} razy. Czy można zapisać to prawo za pomocą funkcji wykładniczej o podstawie *10*? Jeśli tak to: $e^{-kx} = 10^{-K10\,x}$.
Poza podstawą zmienił się jeszcze współczynnik: zamiast k jest $K10$. Nie powinno to zaskakiwać – wiemy przecież, że $4^x = 2^{2x}$, podobnie $1000^x = 10^{3x}$. Pozostaje tylko ustalić jaki jest związek pomiędzy współczynnikami k i $K10$. Obustronnie logarytmujemy równanie $e^{-kx} = 10^{-K10\,x}$.
$ln(e^{-kx}) = -kx = ln(10^{-K10\,x}) = log(10^{-K10\,x})/log(e) = -(K10\,x)/log(e)$. Dzieląc obustronnie przez x dostajemy $k = K10/log(e) = K10/0.434 = 2.303*K10$.
Rachunek powyższy można wykonać działając na obie strony równania logarytmem dziesiętnym, a nie naturalnym. Otrzymamy wtedy (polecam jako szybkie ćwiczenie!)
$K10 = k/ln(10) = k/2.303$. Czyli dokładnie ten sam wynik.
W podobny sposób można zamieniać funkcje wykładnicze o dowolnej podstawie. Zatem:

$$e^{-k\,x} = 10^{-k/ln(10)\,x} = 2^{-k/ln(2)\,x}.$$

Pozostaje jednak pytanie: dlaczego współczynnik przy e jest „właściwy"? Dlaczego to k jest współczynnikiem absorpcji, a nie np. $K10 = k/ln(10)$?
Argumentem funkcji wykładniczej (ale również np. trygonometrycznej) musi być zawsze wielkość bezwymiarowa (nie posiadająca jednostek). Nie ma bowiem sensu wyrażenie typu „sinus z jednego metra". Skoro grubość x mierzymy w metrach to jednostką współczynnika absorpcji k musi być *[1/m]*. Odwrotność tego współczynnika ma więc sens pewnej grubości. Jakiej? Jeśli $x=1/k$ to $e^{-kx} = e^{-1} = 1/e$. Zatem odwrotność współczynnika absorpcji k to odległość po przebyciu , której natężenie promieniowania spada e-krotnie. Natomiast odwrotność współczynnika $K10$ to droga po przebyciu której natężenie spada dziesięciokrotnie. Przy jego użyciu prawo absorpcji przybiera postać: $I(x) = I(0)\, 10^{-K10\,x}$. Taka postać była powszechnie stosowana jeszcze kilkanaście lat temu – gdy nie było powszechnie dostępnych kalkulatorów była to postać zdecydowanie najwygodniejsza. Obecnie niekiedy stosuje się spotyka się prawo absorpcji w postaci:

$$I(x) = I(0)\, 2^{-K2\,x} = I(0)\, 2^{-x/D}.$$

Występujący w powyższym wzorze $K2 = k/ln(2)$, a D to po prostu jego odwrotność. Grubość D nazywa się grubością połowiącą – po jej przebyciu natężenie spada bowiem o połowę. Tylko pozornie jest ona jakoś szczególnie wyróżniona. „Prawo połowicznego zaniku" równie dobrze mogło by się nazywać „prawem poczwórnego zaniku" z grubością dwa razy większą lub „prawem decymacji" z grubością charakterystyczną równą $1/K10$. Jedynie z psychologicznych powodów grubość absorbentu, po przebyciu której natężenie spada o połowę wydaje nam się ważna.
Dlaczego więc wybrano liczbę e jako podstawę funkcji wykładniczej? Czy grubość po której natężenie spada e krotnie jest jakoś wyróżniona? Tak! Grubość $1/k$ to średnia droga przebyta przez promieniowanie. Wykazanie tego faktu jest bardzo proste ale wymaga znajomości całek – dlatego nie zostało tu umieszczone.

Niestety, wykazywana przez ludzi, chęć ułatwienia sobie życia wprowadziła pewne komplikacje – w różnych książkach stosowane są różne oznaczenia – obecnie niemal zawsze stosowana jest funkcja o podstawie e, w starszych książkach można spotkać funkcje o podstawie *10* lub *2.* Jeśli korzystamy z kilku źródeł, trzeba upewnić się, że termin „współczynnik absorpcji" oznacza dokładnie to samo. Jeśli nie, musimy dokonać odpowiednich przeliczeń – na szczęście wiemy już jak.

Skrypt ten napisałem, gdyż w ostatnich latach z programu nauczania w liceach usunięto sporą porcję materiału z matematyki. Podczas studiów medycznych nie ma specjalnych zajęć z matematyki. W rezultacie, od studentów wymagana jest umiejętność posługiwania się aparatem matematycznym, którego nie poznali. Niniejszy skrypt ma temu przynajmniej częściowo zaradzić. Nie wiem niestety czy „trafia w potrzeby" zainteresowanych – będę więc wdzięczny za wszelkie uwagi, które można nadsyłać na adres jziel@fuw.edu.pl lub przekazać osobiście.
Skrypt można pobrać ze strony http://www.fuw.edu.pl/~jziel/dydaktyka.html