
ROZDZIAŁ 1

Równania różniczkowe zwyczajne

1.1 Równania pierwszego rzędu

1.1.1 Równania o rozdzielonych zmiennych lub do takich się sprowadzające

ZADANIE 1.1.1

Wiedząc, że

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

wykazać, że

$$f(y) = \int_0^\infty \exp\left(-x^2 - \frac{y^2}{x^2}\right) dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-2y}, \quad \text{dla } y \geq 0.$$

W tym celu pokazać, że funkcja $f(y)$ spełnia równanie różniczkowe $f'(y) = -2f(y)$. 

ZADANIE 1.1.2

Znaleźć rozwiązanie ogólne równania:

a) $y' = \cos^2 x$, b) $y' = \sin^3 x$, c) $y' = x^2 e^x$, d) $y' = \sqrt{1-x^2}$,

e) $y' = \frac{1}{x^2-1}$, f) $y' = \ln x + 1$, g) $y' = \operatorname{ctg} x$, h) $y' = \sinh x$.

Czy istnieją rozwiązania osobliwe? 

ZADANIE 1.1.3

Znaleźć rozwiązanie ogólne równania:

a) $y' = e^y$, b) $y' = y \ln y$, c) $y' = \sin y$, d) $y' = \cos^2 y$,

e) $y' = 2\sqrt{|y|}$, f) $y' = x + y + 1$, g) $y' = (x+y)^2$, h) $y' = e^{x+y} - 1$.

Czy istnieją rozwiązania osobliwe? 

ZADANIE 1.1.4

Znaleźć rozwiązanie ogólne równania:

a) $\frac{dx}{\sqrt{x}} + \frac{dy}{\sqrt{y}} = 0$, b) $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$, c) $y' - \frac{y-1}{x+1} = 0$, d) $y' = \sqrt{\frac{y}{x}}$,

e) $y' = \frac{2xy}{1-x^2}$, f) $y' = \frac{3x^2}{2y}$, g) $y' = -y \sin x$, h) $y' = 2xy$.

Czy istnieją rozwiązania osobliwe? 

ZADANIE 1.1.5

Znaleźć rozwiązanie ogólne równania:

- a) $(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0$, b) $dx - \sqrt{1 - x^2}dy = 0$, c) $y' = e^y/x$,
 d) $y' = 4x\sqrt{y-1}$, e) $y' = \sqrt{y}/\sqrt{x}$, f) $x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$,
 g) $y' = x\sqrt{1+y^2}$, h) $y' = \sqrt{y-1}/x$, i) $y' = \sqrt{1-y^2}/y$.

Czy istnieją rozwiązania osobliwe? ZADANIE 1.1.6

Znaleźć ogólne rozwiązanie równania różniczkowego pierwszego rzędu o rozdzielonych zmiennych:

- a) $x^3y + y + xy^3 \frac{dy}{dx} - x \frac{dy}{dx} = 0$, b) $(1 + x^2) \frac{dy}{dx} - \sqrt{1 - y^2} = 0$,
 c) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \cdot \frac{1+x}{1+y}$,
 d) $y - x \frac{dy}{dx} = 1 + x^2 \frac{dy}{dx}$, e) $x(1 + e^y) - e^y \frac{dy}{dx} = 0$, f) $x \frac{dy}{dx} = y^3 + y$.

**1.1.2 Równania jednorodne**ZADANIE 1.1.7

Znaleźć rozwiązanie ogólne równania:

- a) $x(x + 2y)dx + (x^2 - y^2)dy = 0$, b) $(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$, c) $y' = e^{y/x} - 1$,
 d) $x dy - y dx = y dy$, e) $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}$, f) $\frac{dx}{y+x} = \frac{dy}{y-x}$,
 g) $y' = \frac{x+2y}{x}$, h) $(py - qx)dx - (px + qy)dy = 0$, i) $y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$.

Czy istnieją rozwiązania osobliwe? ZADANIE 1.1.8

Znaleźć ogólne rozwiązanie równania różniczkowego pierwszego rzędu, sprowadzając je do równania jednorodnego:

- a) $(2x - y - 1) \frac{dy}{dx} = x - 2y + 1$, b) $(2y - x + 1) \frac{dy}{dx} = -2x + y - 1$,
 c) $x + y - 2 + (x - y + 4) \frac{dy}{dx} = 0$, d) $x - 3y + 2 + (3x - y - 2) \frac{dy}{dx} = 0$,
 e) $3y - 7x + 7 + (7y - 3x + 3) \frac{dy}{dx} = 0$, f) $2(x - 2y + 1) + (5x - y - 4) \frac{dy}{dx} = 0$.

**1.1.3 Równania liniowe**ZADANIE 1.1.9

Znaleźć rozwiązanie ogólne równania:

- a) $y' - y \sin x = \sin x \cos x$, b) $y' + ay = e^{mx}$, c) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$,
 d) $xy' = ax + by$, e) $y' - y/x = x$, f) $y' - 2y/x = x^3$,
 g) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$, h) $y' + xy = x^2 + 1$, i) $y' + y = 2e^x$.

ZADANIE 1.1.10

Znaleźć ogólne rozwiązanie równania różniczkowego liniowego niejednorodnego pierwszego rzędu:

- a) $\frac{dy}{dx} + 2xy = xe^{-x^2}$, b) $\frac{dy}{dx} + y \cos x = \frac{1}{2} \sin(2x)$, c) $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$,
 d) $\frac{dy}{dx} + \frac{xy}{1+x^2} = \frac{1}{x(1+x^2)}$, e) $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$, f) $\frac{dy}{dx} + \frac{xy}{1-x^2} = \frac{2x}{1-x^2}$.

**1.1.4 Równania Bernoullie'go**ZADANIE 1.1.11

Znaleźć rozwiązanie ogólne równania:

- a) $y' - y/x = 1/(2y)$, b) $y' - y = xy^2$, c) $xy' + y = y^2 \ln x$, d) $3y^2y' + y^3 + x = 0$,
 e) $y' + 2xy = 2x^3y^3$, f) $xy' - y = y^2$, g) $xy' + y + xy^2$, h) $y dx + (x - x^3y/2)dy = 0$.



1.1.5 Równania Riccati'ego

ZADANIE 1.1.12

Znaleźć rozwiązanie ogólne równania znając jego rozwiązanie szczególne y_0 :

- a) $y' = y^2/2 + 1/(2x^2)$, $y_0 = -1/x$, b) $y' = y^2 - xy - x$, $y_0 = x + 1$,
 c) $xy' = y^2 - (2x + 1)y + x^2 + 2x$, $y_0 = x$, d) $y' + y^2 = -1/(4x^2)$, $y_0 = 1/(2x)$,
 e) $x^2y' = x^2y^2 + xy + 1$, $y_0 = -1/x$, f) $x^2y' + (xy - 2)2 = 0$, $y_0 = 1/x$.



1.1.6 Równania zupełne i czynnik całkujący

ZADANIE 1.1.13

Znaleźć rozwiązanie ogólne równania:

- a) $x dx + y dy = 0$, b) $dy/x - y dx/x^2 = 0$, c) $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$,
 d) $\frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2} = 0$, e) $dx/y - x dy/y^2 = 0$, f) $x dx + y dy + \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2} = 0$.



ZADANIE 1.1.14

Znaleźć ogólne rozwiązanie równania różniczkowego zupełnego pierwszego rzędu:

- a) $\frac{2x}{y^3} + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} \frac{dy}{dx} = 0$, b) $x((x^2 + y^2) - 4) + y((x^2 + y^2) + 4) \frac{dy}{dx} = 0$,
 c) $xy^2 + (2y^3 + 3y^2 - 8y + x^2y - 9) \frac{dy}{dx} = 0$, d) $y^3 + 2xy^2 + (2x^2y + 3xy^2) \frac{dy}{dx} = 0$,
 e) $3x^2 + 6xy^2 + (6x^2y + 4y^3) \frac{dy}{dx} = 0$, f) $x^2 - 4xy - 2y^2 + (y^2 - 4xy - 2x^2) \frac{dy}{dx} = 0$.



ZADANIE 1.1.15

Znaleźć rozwiązanie ogólne równania wiedząc, że czynnik całkujący zależy tylko od jednej ze zmiennych x lub y :

- a) $(x/y + 1)dx + (x/y - 1)dy = 0$, b) $(x^2 + y)dx - xdy = 0$,
 c) $(2xy^2 - y)dx + (y^2 + x + y)dy = 0$, d) $(xy^2 + y)dx - xdy = 0$.



1.2 Liniowe równania wyższych rzędów

1.2.1 Równania liniowe jednorodne

ZADANIE 1.2.1

Znaleźć rozwiązanie ogólne równania:

- a) $y'' - 6y' + 8y = 0$, b) $y'' - y' - 2y = 0$, c) $y'' - 2y' = 0$, d) $y^{(3)} - 2y'' - y' + 2y = 0$,
 e) $y^{(3)} + 8y = 0$, f) $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$, g) $y^{(4)} + y = 0$, h) $y^{(3)} - 13y' - 12y = 0$.



ZADANIE 1.2.2

Znaleźć rozwiązanie ogólne równania:

- a) $x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$, b) $x^2y'' + xy' - y = 0$, c) $x^2y'' + xy' - y/4 = 0$,
 d) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$, e) $x^2y'' + xy' + 4y = 0$, f) $x^2y'' + 5xy' + 13y = 0$,
 g) $x^2y'' + y = 0$, h) $xy'' - y' = 0$ i) $x^2y''' - 2y' = 0$.



1.2.2 Równania liniowe niejednorodne

ZADANIE 1.2.3

Znaleźć rozwiązanie ogólne równania:

- a) $y'' - y = x^2 - x + 1$, b) $y'' - 4y' = -12x^2 + 6x - 4$, c) $y'' + 5y' + 6y = 3$,
 d) $y'' + y' = 3$, e) $y'' + y = 4e^x$, f) $y'' - y = 4e^x$,
 g) $y'' - 2y' + y = 4e^x$, h) $y'' - 2y' - 3y = -4e^x + 3$, i) $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x} + 2x^2$,
 j) $y^{(4)} - y = 4e^x$, k) $y''' - y'' = -3x + 1$, l) $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 3e^{-2x}$.

Do równań drugiego rzędu zastosować metodę uzmienniania stałych, a dla wyższego rzędu zgadnąć szczególne rozwiązanie równania niejednorodnego. 

ZADANIE 1.2.4

Znaleźć rozwiązanie ogólne równania:

- a) $x^2 y'' - xy' + y = 6x \ln x$, b) $x^2 y'' - xy' = -x + 3/x$.

Zastosować metodę uzmienniania stałych. 

1.2.3 Równania drugiego rzędu liniowe

ZADANIE 1.2.5

Wykazać, że dwie funkcje $y_1(x)$ i $y_2(x)$, dla których Wronskian jest różny od zera (tj. $W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) \neq 0$), tworzą fundamentalny układ rozwiązań równania liniowego drugiego rzędu

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

gdzie

$$p(x) = \frac{y_2(x)y_1''(x) - y_1(x)y_2''(x)}{W(x)}, \quad q(x) = \frac{y_1'(x)y_2''(x) - y_2'(x)y_1''(x)}{W(x)}.$$



ZADANIE 1.2.6

Znaleźć postać równania różniczkowego liniowego drugiego rzędu, dla którego funkcje $y_1(x)$ i $y_2(x)$ tworzą fundamentalny układ rozwiązań, gdy

- a) $y_1(x) = \frac{\sin x}{x}$ i $y_2(x) = \frac{\cos x}{x}$, b) $y_1(x) = x^2$ i $y_2(x) = x^3$,
 c) $y_1(x) = x$ i $y_2(x) = x \ln x$, d) $y_1(x) = \frac{1}{x}$ i $y_2(x) = x$.



ZADANIE 1.2.7

Znaleźć ogólne rozwiązanie równania szczególnej postaci

$$y'' + p(x)y' + p'(x)y = 0,$$

a następnie rozwiązać szczególne przypadki

- a) $y'' + 2 \operatorname{tg} x y' + \frac{2}{\cos^2 x} y = 0$, b) $y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = 0$,
 c) $y'' - 2xy' - 2y = 0$, d) $\sin^2 x y'' + \sin(2x)y' - 2y = 0$.



ZADANIE 1.2.8

Znaleźć ogólne rozwiązanie równania

$$x(x-1)^2 y'' + x(x-1)y' - y = 0,$$

jeśli wiadomo, że jego rozwiązaniem jest funkcja $x/(x-1)$. 

ZADANIE 1.2.9

Znaleźć ogólne rozwiązanie równania

$$x(x-1)y'' + (x+1)y' - y = 0,$$

jeśli wiadomo, że jego rozwiązaniem jest funkcja $1/(x-1)$.ZADANIE 1.2.10Znaleźć ogólne rozwiązanie tzw. liniowego równania Stokesa (a jest stałą)

$$x^2(x-1)^2y'' + ay = 0,$$

jeśli wiadomo, że jego rozwiązaniem jest funkcja $x^m(x-1)^n$ o pewnych stałych m i n . Wyznaczyć te stałe.ZADANIE 1.2.11Znaleźć rozwiązanie ogólne liniowego równania różniczkowego drugiego rzędu, jeśli znane jest jego rozwiązanie szczególne $y_1(x)$, gdy:

- a) $(\cos x + \sin x)y'' - 2 \cos x y' + (\cos x - \sin x)y = 0$ oraz $y_1(x) = \cos x$,
- b) $y'' + 2xy' - 2y = 0$ oraz $y_1(x) = x$,
- c) $(\sin x - \cos x)y'' - 2 \sin x y' + (\cos x + \sin x)y = 0$ oraz $y_1(x) = e^x$,
- d) $y'' + 2y'/x + y = 0$ oraz $y_1(x) = \sin x/x$,
- e) $(1-x^2)y'' - xy'y/4 = 0$ oraz $y_1(x) = \sqrt{1+x}$,
- f) $(x-1)y'' - (x+1)y' + 2y = 0$ oraz $y_1(x) = x^2 + 1$,
- g) $(x^2-3x)y'' + (6-x^2)y' + (3x-6)y = 0$ oraz $y_1(x) = x^3$,
- h) $x^2(2 \ln x - 1)y'' - x(2 \ln x + 1)y' + 4y = 0$ oraz $y_1(x) = x^2$.



1.3 Układy równań

1.3.1 Układy równań różniczkowych

ZADANIE 1.3.1

Rozwiązać układy równań

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2xy^2, \\ \frac{dz}{dx} = \frac{z-x}{x}, \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \frac{dy}{dx} = e^{x-y}, \\ \frac{dz}{dx} = \frac{2z}{2x-z^2}, \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1+x^2}y, \\ \frac{dz}{dx} = -\frac{z}{x} + y + x, \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x \frac{dy}{dx} = y + \sqrt{y^2 - x^2}, \\ \frac{dz}{dx} = \frac{y+z}{z^2-x}, \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} \frac{dy}{dx} = z, \\ \frac{dz}{dx} = \frac{z^2}{y}, \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} x \frac{dy}{dx} = y + z, \\ \frac{dz}{dx} = -5y - 5z. \end{cases}$$



1.3.2 Układy liniowe równań różniczkowych

ZADANIE 1.3.2

Rozwiązać układy równań metodą wyznaczania wartości i wektorów własnych

$$\text{a)} \quad \begin{cases} \frac{dy}{dt} = y + z, \\ \frac{dz}{dt} = -2y + 4z, \end{cases}$$

$$\text{c)} \quad \begin{cases} \frac{dy}{dt} = y - z, \\ \frac{dz}{dt} = -4y + 4z, \end{cases}$$

$$\text{e)} \quad \begin{cases} \frac{dy}{dt} = 2y - 3z, \\ \frac{dz}{dt} = 3y + 2z, \end{cases}$$

$$\text{g)} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 12y - 4z, \\ \frac{dy}{dt} = -x - 3y + z, \\ \frac{dz}{dt} = -x - 12y + 6z, \end{cases}$$

$$\text{b)} \quad \begin{cases} \frac{dy}{dt} = 3y - z, \\ \frac{dz}{dt} = 10y - 4z, \end{cases}$$

$$\text{d)} \quad \begin{cases} \frac{dy}{dt} = 2y + z, \\ \frac{dz}{dt} = -6y - 3z, \end{cases}$$

$$\text{f)} \quad \begin{cases} \frac{dy}{dt} = y - 2z, \\ \frac{dz}{dt} = -10y - z, \end{cases}$$

$$\text{h)} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y - z, \\ \frac{dy}{dt} = 12x - 4y - 12z, \\ \frac{dz}{dt} = -4x + y + 5z. \end{cases}$$



ROZDZIAŁ 2

Układy współrzędnych i całki wielokrotne

2.1 Układy współrzędnych krzywoliniowych

2.1.1 Krzywa w trójwymiarowej przestrzeni

ZADANIE 2.1.1

Niech $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są stałymi wektorami do siebie prostopadłymi. Określić, jakie krzywe zadane są równaniami

a) $\mathbf{r}(u) = \mathbf{A} \cos u + \mathbf{B} \sin u$, b) $\mathbf{r}(u) = \mathbf{A}u^2 + \mathbf{B}u$, c) $\mathbf{r}(u) = \mathbf{A} \cosh u + \mathbf{B} \sinh u$. 

ZADANIE 2.1.2

Wykazać, że

$$\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = \frac{\mathbf{r}''}{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'} - \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}''}{(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}')^2} \mathbf{r}'$$

gdzie *prim* oznacza różniczkowanie po dowolnym parametrze u . 

ZADANIE 2.1.3

Opierając się na wyniku zadania (2.1.2) i równaniach Serreta-Freneta pokazać, że

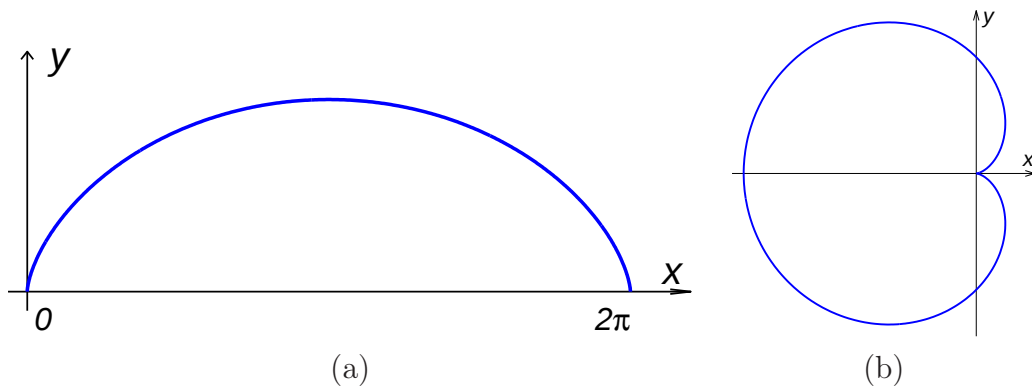
$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{n}} &= \frac{\rho}{(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}')^2} [(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}') \mathbf{r}'' - (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'') \mathbf{r}'], \\ \frac{1}{\rho^2} &= \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'')^2}{(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}')^3}, \\ \hat{\mathbf{b}} &= \rho \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{(\sqrt{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'})^3}.\end{aligned}$$



ZADANIE 2.1.4

Nierelatywistyczne równanie Newtona dla cząstki o ładunku q poruszającej się w polu elektrycznym o natężeniu $\mathbf{E}$ i magnetycznym o indukcji $\mathbf{B}$ ma postać

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}),$$



RYSUNEK 2.1: Wykresy krzywych płaskich: (a) cykloidy $x(t) = R(t - \sin t)$ i $y(t) = R(1 - \cos t)$ dla $0 \leq t \leq 2\pi$ i $R = 1$ oraz (b) kardiody $x(t) = R(1 - \cos t) \cos t$ i $y(t) = R(1 - \cos t) \sin t$ również dla $0 \leq t \leq 2\pi$.

gdzie wektor $\mathbf{r}$ jest wektorem położenia cząstki w chwili t a $\dot{\mathbf{r}} = d\mathbf{r}/dt$. Napisać te równania w układzie kartezjańskim.

Rozpatrzeć przypadek, gdy $\mathbf{E} = E \hat{\mathbf{i}}$, $\mathbf{B} = B \hat{\mathbf{j}}$ i przyjąć, że w chwili początkowej $t = 0$ cząstka znajdowała się w początku układu współrzędnych i miała prędkość $\mathbf{v}_0 = v_0 \hat{\mathbf{k}}$. Wykazać, że jeśli $v_0 = E/B$, to ruch jest jednostajny prostoliniowy. Sprawdzić przez podstawienie do równań ruchu, że gdy $v_0 = 0$, to

$$x = \frac{mE}{B^2q}(1 - \cos \xi), \quad y = 0, \quad z = \frac{mE}{B^2q}(\xi - \sin \xi),$$

gdzie parametr ξ jest proporcjonalny do czasu t . Naszkicować tę trajektorię w płaszczyźnie (x, z) (porównać z zadaniem 2.1.5). Określić współczynnik proporcjonalności i pokazać, że droga przebyta przez cząstkę po czasie t dla powyższej trajektorii wynosi

$$\frac{2E}{B} \int_0^t \left| \sin \frac{Bq\tau}{2m} \right| d\tau.$$



ZADANIE 2.1.5

Znaleźć krzywizny krzywych płaskich:

cykloidy (rysunek 2.1(a)) zadanej równaniami

$$x(t) = R(t - \sin t) \quad \text{i} \quad y(t) = R(1 - \cos t), \quad \text{dla} \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

i kardiody (rysunek 2.1(b)) zadanej równaniami

$$x(t) = R(1 - \cos t) \cos t \quad \text{i} \quad y(t) = R(1 - \cos t) \sin t, \quad \text{dla} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

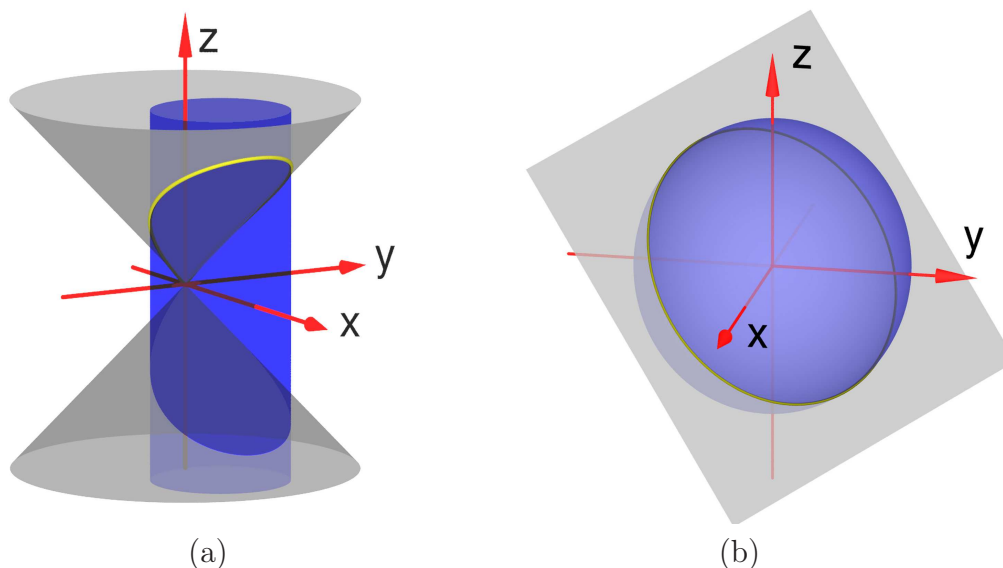
Wyznaczyć unormowane wektory styczny i normalny oraz długość łuku krzywej dla $0 \leq t \leq t_0 \leq 2\pi$.



ZADANIE 2.1.6

Wykazać, że dwie krzywe zamknięte powstałe z przecięcia walca $(x-1)^2 + y^2 = 1$ ze stożkiem $x^2 + y^2 = z^2$ (rysunek 2.2(a)) można parametrycznie opisać równaniami

$$x(u) = 1 + \cos(2u), \quad y(u) = \sin(2u), \quad z(u) = \pm 2 \cos u.$$



RYСУNEK 2.2: (a) Przecięcie walca $(x - R)^2 + y^2 = R^2$ ze stożkiem $x^2 + y^2 = z^2$ (zaznaczono tylko górną część przecięcia). (b) Przecięcie kuli $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ z płaszczyzną $x + y + z = 0$.

Jaką interpretację geometryczną ma parametr u i w jakich granicach się zmienia.

ZADANIE 2.1.7

Jaką postać ma parametryzacja krzywych powstałych z przecięcia walca $(x - R)^2 + y^2 = R^2$ ze stożkiem $a^2(x^2 + y^2) = z^2$?

ZADANIE 2.1.8

Wyznaczyć długość krzywych z zadania 2.1.6 i ich krzywiznę. Czy skrócenie jest różne od zera?

ZADANIE 2.1.9

Wykazać, że okrąg powstały z przecięcia powierzchni kuli $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ z płaszczyzną $x + y + z = 0$ (rysunek 2.2(b)) można parametrycznie opisać równaniami

$$x(u) = \frac{R \cos u}{\sqrt{2 + \sin(2u)}}, \quad y(u) = \frac{R \sin u}{\sqrt{2 + \sin(2u)}}, \quad z(u) = -R \frac{\cos u + \sin u}{\sqrt{2 + \sin(2u)}}.$$

W jakich granicach zmienia się parametr u i jaka jest jego geometryczna interpretacja. Wyznaczyć długość tego okręgu, a następnie jego promień. Sprawdzić poprawność wyniku obliczając jego krzywiznę. Wykazać, że wektor binormalny $\hat{\mathbf{b}}$, z dokładnością do znaku, wynosi $(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}})\sqrt{3}$, czyli rzeczywiście jest prostopadły do płaszczyzny.

ZADANIE 2.1.10

Dla $0 \leq z \leq h$ krzywa zdefiniowana jest równaniem

$$\mathbf{r}(z) = \frac{\sqrt{2}h}{\pi} \ln \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right) \hat{\mathbf{i}} + \frac{\sqrt{2}h}{\pi} \ln \sin\left(\frac{\pi z}{2h}\right) \hat{\mathbf{j}} + z \hat{\mathbf{k}}.$$

Pokazać, że jej krzywizna i skrócenie wynoszą

$$\kappa(z) = \frac{\pi}{2h} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad \text{oraz} \quad \tau(z) = -\kappa(z).$$

ZADANIE 2.1.11

Znaleźć wektory $\hat{t}$, $\hat{n}$, $\hat{b}$, długość łuku liczoną od początku układu współrzędnych oraz krzywiznę i skręcenie dla stożkowej linii śrubowej $\mathbf{r}(u) = Ru \cos u \hat{\mathbf{i}} + Ru \sin u \hat{\mathbf{j}} + Hu \hat{\mathbf{k}}$.

ZADANIE 2.1.12

Punkt materialny porusza się po elipsie $\mathbf{r}(u) = \mathbf{A} \cos u + \mathbf{B} \sin u$, gdzie $u = u(t)$ jest pewną funkcją czasu. Jaką postać ma ta funkcja, jeśli wektor przyspieszenia w każdej chwili czasu jest równoległy do wektora wodzącego?

ZADANIE 2.1.13

Wykazać, że jeśli $d\mathbf{A}/du = \mathbf{C} \times \mathbf{A}$ i $d\mathbf{B}/du = \mathbf{C} \times \mathbf{B}$, to $d(\mathbf{A} \times \mathbf{B})/du = \mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$.

ZADANIE 2.1.14

Znaleźć pierwszą i drugą pochodną względem u iloczynu wektorowego $\mathbf{r} \times (d\mathbf{r}/du)$.

ZADANIE 2.1.15

Napisać równanie stycznej i równanie płaszczyzny normalnej do krzywej:

1. $\mathbf{r} = u \hat{\mathbf{i}} + u^2 \hat{\mathbf{j}}$, dla $u = 0$,
2. $\mathbf{r} = \sqrt{u} \hat{\mathbf{i}} + \sqrt{u - a^2} \hat{\mathbf{j}}$, dla $u = 2a^2$,
3. $\mathbf{r} = a \cos u \hat{\mathbf{i}} + b \sin u \hat{\mathbf{j}} + c \hat{\mathbf{k}}$, dla $u = 0$,
4. $\mathbf{r} = u \hat{\mathbf{i}} + f(u) \hat{\mathbf{j}}$, dla $u = 0$.

ZADANIE 2.1.16

Przyjmując, że wektor wodzący $\mathbf{r}$ jest następującą funkcją długości łuku $\mathbf{r} = \alpha s \mathbf{e} + \mathbf{e} \times \mathbf{A}(s)$, gdzie α jest stałą, a $\mathbf{e}$ jest stałym wektorem, wykazać, że styczna do krzywej tworzy stały kąt z wektorem $\mathbf{e}$, zaś normalna jest do niego prostopadła.

ZADANIE 2.1.17

Jak długi jest łuk krzywej $\mathbf{r} = (2/t) \hat{\mathbf{i}} + 6t \hat{\mathbf{j}} + 3t^3 \hat{\mathbf{k}}$ zawarty między płaszczyznami $x = 2$ i $x = 1$.

ZADANIE 2.1.18

Cząstka porusza się po linii śrubowej $\mathbf{r}(t) = a \cos(\omega t) \hat{\mathbf{i}} + a \sin(\omega t) \hat{\mathbf{j}} + bt \hat{\mathbf{k}}$ ze stałą w czasie wartością prędkości v . Wyznaczyć jej przyspieszenie.

ZADANIE 2.1.19

Dla krzywej $\mathbf{r}(t) = t \hat{\mathbf{i}} + t^2 \hat{\mathbf{j}} + t^3 \hat{\mathbf{k}}$ wyznaczyć wektory styczne i normalne oraz krzywiznę.

ZADANIE 2.1.20

Wykazać, że krzywa $\mathbf{r}(t) = (1 + 3t + 2t^2) \hat{\mathbf{i}} + (2 - 2t + 5t^2) \hat{\mathbf{j}} + (1 - t^2) \hat{\mathbf{k}}$ jest płaska. Określić równanie płaszczyzny, w której się zawiera.



ZADANIE 2.1.21

Linia łańcychową nazywamy krzywą płaską opisaną funkcją

$$y(x) = a \cosh(x/a) = \frac{a}{2} (e^{x/a} + e^{-x/a}), \quad a > 0.$$

Wykazać, że długość łuku liczona od punktu $(0, a)$ do punktu (x, y) wynosi $s = a \sinh(x/a)$, zaś promień krzywizny w punkcie (x, y) równa się $\rho = y^2/a$. 

ZADANIE 2.1.22

Linia wleczoną lub traktrysą nazywamy taką krzywą na płaszczyźnie, dla której odległość punktu (x, y) do przecięcia z osią odciętych stycznej do tej krzywej w tym punkcie jest stała. Oznaczmy tę stałą symbolem $a > 0$. Znaleźć równanie różniczkowe pierwszego rzędu, które spełnia funkcja określająca kształt tej krzywej i pokazać, że jego ogólnym rozwiązaniem jest funkcja zadana w postaci uwikłanej

$$a \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y} + \sqrt{a^2 - y^2} = \pm x + C,$$

gdzie C jest stałą całkowania. Wybierając układ współrzędnych tak, aby $C = 0$, naszkicować tę krzywą i pokazać, że długość łuku liczona od punktu $(0, a)$ do punktu (x, y) wynosi $s = a \ln(a/y)$, zaś promień krzywizny w punkcie (x, y) równa się $\rho = a \operatorname{ctg}(x/y)$. 

ZADANIE 2.1.23

Obliczyć długość łuku krzywej płaskiej $\mathbf{r}(u) = (Ru - a \sin u)\hat{\mathbf{i}} + (R - a \cos u)\hat{\mathbf{j}}$ dla $0 \leq u \leq 2\pi$. Krzywa ta dla $0 < a < R$ nazywa się cykloidą skróconą, a dla $a > R$ cykloidą wydłużoną. Naszkicować te krzywe. 

ZADANIE 2.1.24

Obliczyć długości łuku krzywych płaskich:

- a) $\mathbf{r}(u) = ae^u(\cos u \hat{\mathbf{i}} + \sin u \hat{\mathbf{j}})$, $a > 0$ $\Leftarrow$ spirala logarytmiczna
- b) $\mathbf{r}(u) = au(\cos u \hat{\mathbf{i}} + \sin u \hat{\mathbf{j}})$, $a > 0$ $\Leftarrow$ spirala Archimedesesa
- c) $\mathbf{r}(u) = (a \cos u + b)(\cos u \hat{\mathbf{i}} + \sin u \hat{\mathbf{j}})$, $a < b < 2a$ $\Leftarrow$ ślimak Pascala (ojca tego Pascala)
- d) $\mathbf{r}(u) = a \sin^3 \frac{u}{3} (\cos u \hat{\mathbf{i}} + \sin u \hat{\mathbf{j}})$, $a > 0$

dla $0 \leq u \leq u_0$. Naszkicować te krzywe i wyznaczyć ich promień krzywizny w funkcji parametru u . 

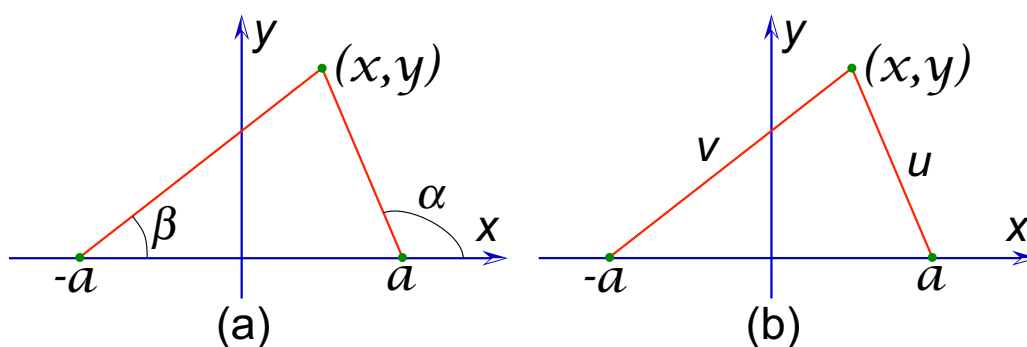
2.1.2 Powierzchnia w trójwymiarowej przestrzeni

ZADANIE 2.1.25

Na płaszczyźnie wprowadźmy układ współrzędnych tak jak na rysunku 2.3(a), gdzie parametrami są kąty α i β liczone od osi odciętych. Pokazać, że

$$x = a \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}, \quad y = 2a \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

Wyznaczyć infinitezymalny element powierzchni w tych współrzędnych krzywoliniowych. Jak wyglądają równania elips i hiperbol, jeśli punkty $-a$ i a są ich ogniskami? 



RYСУNEK 2.3: (a) Krzywoliniowy układ współrzędnych do zadania 2.1.25. (b) Krzywoliniowy układ współrzędnych do zadania 2.1.26.

ZADANIE 2.1.26

Na płaszczyźnie wprowadźmy układ współrzędnych tak jak na rysunku 2.3(a), gdzie parametrami są długości odcinków u i v . Pokazać, że

$$x = \frac{v^2 - u^2}{4}a, \quad y = \pm \frac{\sqrt{((u+v)^2 - 4a^2)(4a^2 - (u-v)^2)}}{4a}.$$

Wyznaczyć infinitesimalny element powierzchni w tych współrzędnych krzywoliniowych. Jak wyglądają równania elips i hiperbol, jeśli punkty $-a$ i a są ich ogniskami? 

ZADANIE 2.1.27

Powierzchnię boczną beczki, których denka leżą na płaszczyznach $z = \pm c$, $c > 0$ (beczka ma wówczas wysokość $2c$) z dobrym przybliżeniem można opisać równaniem

$$x^2 + y^2 + \frac{a^2 - b^2}{c^2}z^2 = a^2,$$

gdzie $a, b > 0$. Jeśli $a > b$, to powierzchnia boczna beczki jest wypukła. W przeciwnym przypadku jest ona w środku zwężona, a dla $a = b$ jest to powierzchnia boczna walca. Naszkicować te powierzchnie.

Powierzchnię tę możemy sparаметryzować na dwa sposoby:

1. Jeśli $a > b$, to

$$\begin{cases} x(u, v) = a \cos u \cos v, \\ y(u, v) = a \cos u \sin v, \\ z(u, v) = ac \sin u / \sqrt{a^2 - b^2}, \end{cases}$$

a gdy $a < b$, to

$$\begin{cases} x(u, v) = a \cosh u \cos v, \\ y(u, v) = a \cosh u \sin v, \\ z(u, v) = ac \sinh u / \sqrt{b^2 - a^2}. \end{cases}$$

2. W obu przypadkach, także wówczas, gdy $a = b$,

$$\begin{cases} x(u, v) = a \cos u \cos v + b \sin u \sin v, \\ y(u, v) = a \cos u \sin v - b \sin u \cos v, \\ z(u, v) = c \sin u. \end{cases}$$

Podać zakres zmienności parametrów u i v w obu przypadkach. Który z tych układów współrzędnych krzywoliniowych jest ortogonalny? 

ZADANIE 2.1.28

Powierzchnia zadana jest parametrycznie równaniem $\mathbf{r} = u \cos v \hat{\mathbf{i}} + u \sin v \hat{\mathbf{j}} + cv \hat{\mathbf{k}}$, gdzie $u > 0$, $0 \leq v \leq 2\pi$, zaś c jest stałą liczbą. Określić kształt tej powierzchni i wyznaczyć krzywe parametryczne. Czy układ współrzędnych (u, v) jest ortogonalny? Wyznaczyć infinitezymalny element powierzchni oraz unormowany wektor normalny. Określić równanie płaszczyzny stycznej i jej odległość od początku układu współrzędnych. 

ZADANIE 2.1.29

Dla powierzchni obrotowej $\mathbf{r} = u \cos v \hat{\mathbf{i}} + u \sin v \hat{\mathbf{j}} + f(u) \hat{\mathbf{k}}$ wyznaczyć infinitezymalny element powierzchni i unormowany wektor normalny. 

ZADANIE 2.1.30

Określić równanie powierzchni powstałej przez obrót linii łańcuchowej $y = a \cosh(x/a)$ dookoła osi x . Wyznaczyć krzywe parametryczne, infinitezymalny element powierzchni i unormowany wektor normalny. 

ZADANIE 2.1.31

Podać parametryzację powierzchni zawartej między walcem $(x-R)^2 + y^2 = R^2$ a stożkiem $a^2(x^2 + y^2) = z^2$ (zadanie 2.1.7). Wyznaczyć infinitezymalny element powierzchni i unormowany wektor normalny. 

ZADANIE 2.1.32

Podać parametryzację koła powstałego z przecięcia kuli $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ z płaszczyzną $x + y + z = 0$ (zadanie 2.1.9). Wyznaczyć infinitezymalny element powierzchni i unormowany wektor normalny. 

ZADANIE 2.1.33

Sparametryzujmy powierzchnię równaniem:

- | | | | |
|----|--|---------------|---------------------------|
| a) | $\mathbf{r}(u) = a \sin u \cos v \hat{\mathbf{i}} + b \sin u \sin v \hat{\mathbf{j}} + c \cos u \hat{\mathbf{k}}$ | $a, b, c > 0$ | $\Leftarrow$ elipsoida |
| b) | $\mathbf{r}(u) = u \hat{\mathbf{i}} + v \hat{\mathbf{j}} + \sqrt{u^2 + v^2} \hat{\mathbf{k}}$ | | $\Leftarrow$ stożek |
| c) | $\mathbf{r}(u) = au \cos v \hat{\mathbf{i}} + bu \sin v \hat{\mathbf{j}} + u \hat{\mathbf{k}}$ | $a, b > 0$ | $\Leftarrow$ stożek |
| d) | $\mathbf{r}(u) = a \cos v \hat{\mathbf{i}} + b \sin v \hat{\mathbf{j}} + u \hat{\mathbf{k}}$ | $a, b > 0$ | $\Leftarrow$ walec |
| e) | $\mathbf{r}(u) = au \cos v \hat{\mathbf{i}} + bu \sin v \hat{\mathbf{j}} + u^2 \hat{\mathbf{k}}$ | $a, b > 0$ | $\Leftarrow$ paraboloida |
| f) | $\mathbf{r}(u) = a \cosh u \cos v \hat{\mathbf{i}} + b \cosh u \sin v \hat{\mathbf{j}} + \sinh u \hat{\mathbf{k}}$ | $a, b > 0$ | $\Leftarrow$ hiperboloida |

Wyznaczyć $\hat{\mathbf{e}}_u$, $\hat{\mathbf{e}}_v$, unormowany wektor normalny $\hat{\mathbf{n}}$ i infinitezymalny element powierzchni. Kiedy parametry u i v tworzą układ współrzędnych ortogonalnych? 

2.1.3 Krzywoliniowe układy współrzędnych

ZADANIE 2.1.34

Wyznaczyć wektor położenia przez współrzędne krzywoliniowe u , v i w wyznaczone przez następujące powierzchnie: $y^2 - z^2 = u$, $y^2 + z^2 = vx$, $y + z = w$. Czy jest to układ współrzędnych ortogonalnych? Wyznaczyć infinitezymalny element objętości. 

ZADANIE 2.1.35

Wyznaczyć wektor położenia przez współrzędne krzywoliniowe u, v i w wyznaczone przez następujące powierzchnie: $x^2 + y^2 + (z - u)^2 = u^2$, $z = v$, $x = y \operatorname{tg} w$. Czy jest to układ współrzędnych ortogonalnych? Wyznaczyć infinitezymalny element objętości. 

ZADANIE 2.1.36

Wyznaczyć wektor położenia przez współrzędne krzywoliniowe u, v i w wyznaczone przez następujące powierzchnie: $x^2 + y^2 = u^2$, $y = x \operatorname{tg} v$, $y = x \operatorname{tg}(z - w)$. Czy jest to układ współrzędnych ortogonalnych? Wyznaczyć infinitezymalny element objętości. 

ZADANIE 2.1.37

Wyznaczyć wektor położenia przez współrzędne krzywoliniowe u, v i w wyznaczone przez następujące powierzchnie: $x^2 + y^2 = v^2 z^2$, $y = xu$, $y = x \operatorname{tg}(z - w)$. Czy jest to układ współrzędnych ortogonalnych? Wyznaczyć infinitezymalny element objętości. 

2.1.4 Gradient, dywergencja, rotacja i laplasjanZADANIE 2.1.38

Obliczyć

- a) $\nabla(\ln r)$, b) $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{r})$, c) $\nabla(|\mathbf{A} \times \mathbf{r}|)$, d) $\nabla(r^n)$,
e) $\nabla(xyz)$, f) $\nabla(z - \arctg(y/x))$, g) $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}/r^n)$, h) $\nabla(\mathbf{r} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{r}))$,
gdzie $\mathbf{A}$ jest wektorem stałym. 

ZADANIE 2.1.39

Znaleźć równanie płaszczyzny stycznej i normalną do powierzchni $\Phi(\mathbf{r}) = C$, gdy funkcja $\Phi(\mathbf{r})$ ma postać

- a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4}$, b) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} - \frac{z^2}{4}$, c) $x^2 - xy + yz$, d) $x^3 + yz^2 - y^2$. 

ZADANIE 2.1.40

Wykazać, że jeśli $\Phi_1(\mathbf{r}) = f_1(x + y)$ i $\Phi_2(\mathbf{r}) = f_2(x + y)$, to $\nabla\Phi_1 \times \nabla\Phi_2 = 0$. 

ZADANIE 2.1.41

Wykazać, że jeśli $\Phi_1(\mathbf{r}) = f_1(x, y)$, $\Phi_2(\mathbf{r}) = f_2(x, y)$ i $\Phi_3(\mathbf{r}) = f_3(x, y)$, to $\nabla\Phi_1 \cdot (\nabla\Phi_2 \times \nabla\Phi_3) = 0$. 

ZADANIE 2.1.42

Obliczyć

- a) $\nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{r})$, b) $\nabla \cdot (r\mathbf{B})$, c) $\nabla \cdot ((\mathbf{r} \cdot \mathbf{A})\mathbf{B})$, d) $\nabla \cdot (\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{r}))$,
e) $\nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{r})$, f) $\nabla \times (r\mathbf{B})$, g) $\nabla \times ((\mathbf{r} \cdot \mathbf{A})\mathbf{B})$, h) $\nabla \times (\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{r}))$,
gdzie $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są wektorami stałymi. 

ZADANIE 2.1.43

Znaleźć dywergencję i rotację pola wektorowego $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ postaci

- a) $(x^2 + yz)\hat{\mathbf{i}} + (y^2 + zx)\hat{\mathbf{j}} + (z^2 + xy)\hat{\mathbf{k}}$, b) $(x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}})/(x^2 + y^2)$,
c) $x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$, d) $(x/r)\hat{\mathbf{i}} + (y/r)\hat{\mathbf{j}} + (z/r)\hat{\mathbf{k}}$,
e) $\phi(r)\mathbf{r}$, f) $(\mathbf{e} \times \mathbf{r})/r^n$,
g) $(xy/r^3)\hat{\mathbf{i}} + (yz/r^3)\hat{\mathbf{j}} + (z^2/r^2 + 1/r)\hat{\mathbf{k}}$, h) $(x/(yz))\hat{\mathbf{i}} + (y/(xz))\hat{\mathbf{j}} + (z/(xy))\hat{\mathbf{k}}$,
gdzie $\mathbf{e}$ jest wektorem stałym. 

ZADANIE 2.1.44

Niech $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ jest polem wektorowym o stałym kierunku. Udowodnić, że rotacja z tego pola jest prostopadła do niego, tj. $\mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$. 

ZADANIE 2.1.45

Sprawdzić ortogonalność układu współrzędnych krzywoliniowych:

a) r, θ i φ , gdzie

$$x = ar \sin \theta \cos \varphi, \quad y = br \sin \theta \sin \varphi, \quad z = cr \cos \theta,$$

zaś $a, b, c > 0$ są różnymi od siebie stałymi,

b) α, β, z , gdzie

$$x = \cosh \alpha \cos \beta, \quad y = \sinh \alpha \sin \beta, \quad z = z,$$

c) ξ, η, φ , gdzie

$$x = \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \cos \varphi, \quad y = \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \sin \varphi, \quad z = \xi \eta,$$

d) r, θ, φ , gdzie

$$x = r \sin \theta, \quad y = r \cos \theta \cos \varphi, \quad z = r \sin \theta \sin \varphi,$$

Dla układów ortogonalnych wyznaczyć współczynniki skalujące i laplasjan. 

ZADANIE 2.1.46

Wykazać, że pole wektorowe $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = f(r)\mathbf{r}$ jest polem bezźródłowym (tj. takim, dla którego dywergencja znika), gdy funkcja $f(r)$ spełnia równanie

$$r \frac{df(r)}{dr} + 3f(r) = 0.$$

Wyznaczyć najogólniejszą postać funkcji $f(r)$. 

2.2 Całki wielokrotne

2.2.1 Całki wielokrotne we współrzędnych kartezjańskich

ZADANIE 2.2.1

Obliczyć całki wielokrotne:

a)

$$\int_{\mathcal{S}} \frac{x^2}{1+y^2} dx dy,$$

gdzie $\mathcal{S}$ jest kwadratem o wierzchołkach w $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$.

b)

$$\int_{\mathcal{S}} \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy,$$

gdzie $\mathcal{S}$ jest częścią koła o środku w $(0,0)$ i promieniu 1 z pierwszej ćwiartki.

ZADANIE 2.2.2

Wyznaczyć na płaszczyźnie obszar całkowania i zamienić kolejność w całce iteracyjnej. Obliczyć pole tego obszaru korzystając z obu całek iteracyjnych.

a)

$$\int_{-6}^2 dy \int_{y^2/4-1}^{2-y} dx f(x, y).$$

b)

$$\int_{-1}^2 dy \int_{x^2}^{x+2} dx f(x, y).$$

c)

$$\int_1^3 dx \int_{x/3}^{2x} dy f(x, y).$$

ZADANIE 2.2.3

Zapisać jako całki iteracyjne:

a)

$$\int_{\mathcal{S}} f(x, y) dx dy,$$

gdzie $\mathcal{S}$ jest trójkątem o wierzchołkach $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$.

b)

$$\int_{\mathcal{S}} f(x, y) dx dy,$$

gdzie $\mathcal{S}$ jest kołem $x^2 + y^2 \leq x$.

ZADANIE 2.2.4

Wykazać, że

$$\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} dy f(x, y) = \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} dx f(x, y) - \int_{-1}^0 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{2\pi + \arcsin y} dx f(x, y)$$

i narysować obszar całkowania.

ZADANIE 2.2.5

Obliczając całki iteracyjne dla całki podwójnej po trójkącie o wierzchołkach w punktach $(0,0)$, $(2,1)$ i $(-2,1)$ wykazać równość

$$\int_0^1 dy \int_{-2y}^{2y} dx f(x, y) = \int_{-2}^0 dx \int_{-x/2}^1 dy f(x, y) + \int_0^2 dx \int_{x/2}^1 dy f(x, y).$$



ZADANIE 2.2.6

Obliczając całki iteracyjne dla całki podwójnej po obszarze otoczonym okręgiem $x^2 + y^2 = y$ wykazać równość

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} dx f(x, y) = \int_{-1/2}^{1/2} dx \int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} dy f(x, y).$$

ZADANIE 2.2.7

Rozpatrzmy całkę dwuwymiarową z funkcji $f(x, y)$ po trójkącie o wierzchołkach w punktach $(0, 0)$, $(1, 0)$ i $(1, 1)$. Wykazać, że

$$\int_0^1 dx \int_0^x dy f(x, y) = \int_0^1 dy \int_y^1 dx f(x, y).$$

ZADANIE 2.2.8

Wykazać, że

$$\int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 f(x_2) = \int_a^x (x-t)f(t)dt,$$

a następnie, korzystając z indukcji matematycznej udowodnić, że

$$\int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} dx_n f(x_n) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt.$$

ZADANIE 2.2.9

Znaleźć objętość bryłu ograniczoną powierzchniami $z = 1 + x + y$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 1$. 

ZADANIE 2.2.10

Znaleźć objętość bryły ograniczoną płaszczyznami układu współrzędnych i powierzchniami $z = 4x^2 + 2y^2 + 1$ i $x + y - 3 = 0$. 

ZADANIE 2.2.11

Znaleźć objętość bryły ograniczoną powierzchniami $z = a^2 - x^2$, $y = 2x$, $x + y = a$, $z = 0$ i $y = 0$, gdzie $a > 0$. 

ZADANIE 2.2.12

Znaleźć objętość bryły ograniczoną powierzchniami $y = x^2$, $z = x^2 + y^2$, $y = 1$ i $z = 0$. 

ZADANIE 2.2.13

Znaleźć objętość bryły ograniczoną powierzchniami $z^2 = xy$, $x + y = 4$ i $x + y = 6$. 

ZADANIE 2.2.14

Obliczyć pole powierzchni ograniczonej osią Ox oraz pierwszym łukiem cycloidy $x = R(t - \sin t)$, $y = R(1 - \cos t)$ dla $0 \leq t \leq 2\pi$. 

2.2.2 Całki wielokrotne we współrzędnych krzywoliniowych

ZADANIE 2.2.15

Obliczyć całki podwójne:

a)

$$\int_{\mathcal{S}} e^{x/y} dx dy,$$

gdzie $\mathcal{S}$ jest obszarem ograniczonym parabolą $y = \sqrt{x}$ i prostymi $x = 0$ oraz $y = 1$.

Uwaga: jedną z całek iteracyjnych liczy się łatwo, druga jest trudna. Wybrać metodę łatwą.

b)

$$\int_{\mathcal{S}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy,$$

gdzie $\mathcal{S}$ jest wnętrzem elipsy $(x/a)^2 + (y/b)^2 \leq 1$. Wykorzystać zamianę zmiennych $x = ar \cos \varphi$ i $y = br \sin \varphi$.



ZADANIE 2.2.16

Obliczyć

$$\int_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2) dx dy,$$

gdzie $\mathcal{S}$ jest obszarem $x^4 + y^4 \leq 1$. Skorzystać z symetrii i całkować tylko po pierwszej ćwiartce.

Rachunki wykonać korzystając z ortogonalnych współrzędnych

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

oraz nieortogonalnych współrzędnych

$$x = \sqrt{r \cos \varphi}, \quad y = \sqrt{r \sin \varphi}.$$

W obu przypadkach otrzymujemy $\pi/\sqrt{2}$.



ZADANIE 2.2.17

Obliczyć powierzchnię ograniczoną krzywymi

$$r = a(1 + \cos \varphi) \quad \text{ i } \quad r = a \cos \varphi, \quad a > 0,$$



ZADANIE 2.2.18

Obliczyć powierzchnię ograniczoną krzywą

$$\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)^2 = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$$



ZADANIE 2.2.19

Znaleźć pole ograniczone parabolami $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $y^2 = \alpha x$ i $y^2 = \beta x$, gdzie $0 < a < b$ i $0 < \alpha < \beta$. Skorzystać z zamiany zmiennych $x^2 = uy$ i $y^2 = vx$.



ZADANIE 2.2.20

Znaleźć pole części powierzchni paraboloidy $y^2 + z^2 = 2ax$ znajdującej się pomiędzy powierzchnią $y^2 = ax$ a płaszczyzną $x = a$. 

ZADANIE 2.2.21

Znaleźć pole części powierzchni walca $x^2 + y^2 = 2ax$ znajdującej się pomiędzy stożkiem $x^2 + y^2 = z^2$ a płaszczyzną Oxy . 

ZADANIE 2.2.22

Obliczyć

$$\int_{\mathcal{V}} z^2 dx dy dz$$

gdzie $\mathcal{V}$ jest wspólną częścią kul $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ i $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rx$. 

ZADANIE 2.2.23

Macierz Jackobiego pomiędzy współzrzednymi (x, y) a (u, v) definiujemy wzorem

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Wykazać, że z reguł różniczkowania funkcji złożonych wynika

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix},$$

gdzie $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $u = u(\xi, \zeta)$ i $v = v(\xi, \zeta)$. 

ZADANIE 2.2.24

Wykazać, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2} = \pi(b - a).$$

W tym celu skorzystać ze wzorów

$$\int_a^b dy \sin(yx) = \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x}$$

oraz

$$\int_0^{\infty} du \frac{\sin u}{u} = \frac{\pi}{2}.$$

Ten ostatni wynik wyprowadzimy w części poświęconej analizie zmiennej zespolonej. 

ZADANIE 2.2.25

Rozpatrując we współzrzednych biegunowych całkę podwójną po okręgu

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1$$

z funkcji $f(x, y)$, wykazać równość

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} d\rho \rho f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = \int_0^1 d\rho \int_{-\arccos \rho}^{\arccos \rho} d\varphi \rho f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi).$$



ZADANIE 2.2.26

Rozpatrując we współrzędnych biegunowych całkę podwójną po prawym listku lemniskaty Bernoulli'ego

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$

z funkcji $f(x, y)$, wykazać równość

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\sqrt{\cos(2\varphi)}} d\rho \rho f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = \int_0^1 d\rho \int_{-\frac{1}{2} \arccos \rho^2}^{\frac{1}{2} \arccos \rho^2} d\varphi \rho f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi).$$

ZADANIE 2.2.27

Znaleźć objętość bryły ograniczoną płaszczyznami $y = 0$, $x = r$ i $y = x$ oraz walcem $x^2 + z^2 = r^2$ ($r > 0$).

ZADANIE 2.2.28

Znaleźć pole ograniczone elipsą $(x - 2y + 3)^2 + (3x + 4y - 1)^2 = 100$.



2.3 Całki krzywoliniowe i powierzchniowe

2.3.1 Całki krzywoliniowe

ZADANIE 2.3.1

Wykazać, że jeśli obszar płaski otoczony jest krzywą zamkniętą $\hat{C}$ zadaną we współrzędnych biegunowych równaniem $\rho = \rho(\varphi)$, to jego pole wyraża się wzorem

$$P = \frac{1}{2} \oint_{\hat{C}} (\rho(\varphi))^2 d\varphi.$$

Pokazać, że pole otoczone krzywą zwaną kardioidą (rysunek 2.1(b)) o równaniu $\rho = R(1 - \cos \varphi)$ wynosi $3\pi R^2/2$.

ZADANIE 2.3.2

Korzystając z twierdzenia Green obliczyć całkę krzywoliniową z pola wektorowego $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, jeśli krzywa zorientowana jest przeciwnie do ruchu wskazówek zegara i otacza obszar $\mathcal{S}$, gdy:

- a) $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = y \hat{\mathbf{i}} + 4x \hat{\mathbf{j}}$, a $\mathcal{S}$ jest kwadratem $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$,
- b) $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = x \ln y \hat{\mathbf{i}} + ye^x \hat{\mathbf{j}}$, a $\mathcal{S}$ jest prostokątem $0 \leq x \leq 3$, $1 \leq y \leq 2$,
- c) $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (2x - y) \hat{\mathbf{i}} + (x + 3y) \hat{\mathbf{j}}$, a $\mathcal{S}$ jest ograniczony elipsą $x^2 + 4y^2 = 4$.

ZADANIE 2.3.3

Obliczyć całkę krzywoliniową

$$\int_{\hat{C}} y^2 dx + x^2 dy,$$

gdzie krzywa $\hat{C}$ jest górną częścią elipsy $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ skierowaną zgodnie z ruchem wskazówek zegara.



ZADANIE 2.3.4

Obliczyć

$$\int_{\hat{C}} \frac{xy}{x^2 + y^2} (y dx - x dy),$$

gdzie krzywa $\hat{C}$ jest prawym listkiem lemniskaty $\rho^2 = a^2 \cos(2\varphi)$. ZADANIE 2.3.5

Obliczyć

$$\int_{\hat{C}} -x^2 y dx + x y^2 dy,$$

gdzie krzywa $\hat{C}$ jest okręgiem $x^2 + y^2 = R^2$ o orientacji przeciwnej do ruchu wskazówek zegara. Obliczyć ją jako całkę konturową i jako całkę powierzchniową po skorzystaniu z tw. Greena. ZADANIE 2.3.6

Korzystając z tw. Greena obliczyć

$$\int_{\hat{C}} e^x [(1 + \cos y) dy + (y - \sin y) dx]$$

gdzie $\hat{C}$ jest krzywą zorientowaną przeciwnie do ruchu wskazówek zegara i składającą się z odcinka $0 \leq x \leq \pi$ i wykresu $y = \sin x$. ZADANIE 2.3.7

Obliczyć całkę krzywoliniową płaską nieskierowaną

$$\int_C (x + y) ds,$$

gdzie kontur C jest obwodem trójkąta o wierzchołkach $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. ZADANIE 2.3.8

Obliczyć całkę krzywoliniową płaską nieskierowaną

$$\int_C (x^2 + y^2) ds,$$

gdzie kontur C jest krzywą o równaniach $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$, $0 \leq t < 2\pi$. ZADANIE 2.3.9

Obliczyć całkę krzywoliniową płaską nieskierowaną

$$\int_C x^2 y ds,$$

gdzie kontur C jest częścią elipsy $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ leżącą w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych. ZADANIE 2.3.10

Obliczyć całkę krzywoliniową płaską nieskierowaną

$$\int_C (x + y) ds,$$

gdzie kontur C jest obwodem kwadratu $|x| + |y| = a$, $a > 0$. 

ZADANIE 2.3.11

Obliczyć całkę krzywoliniową płaską nieskierowaną

$$\int_C (y - x) ds,$$

gdzie kontur C jest łukiem krzywej $y = x^3$ zawartym między punktami $(1,1)$ i $(2,8)$. 

ZADANIE 2.3.12

Obliczyć całkę krzywoliniową płaską nieskierowaną

$$\int_C (x + y) ds,$$

gdzie kontur C jest pierwszym łukiem cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $a > 0$. 

ZADANIE 2.3.13

Obliczyć całkę krzywoliniową

$$\int_C (|x|^{4/3} + |y|^{4/3}) ds$$

gdzie C jest krzywą zadaną równaniem $|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = a^{2/3}$, $a > 0$. 

2.3.2 Całki powierzchniowe w trójwymiarowej przestrzeniZADANIE 2.3.14

Obliczyć

$$\int_{\hat{\mathcal{S}}} x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy,$$

gdzie $\hat{\mathcal{S}}$ jest zewnętrzną częścią półsfery $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$. 

ZADANIE 2.3.15

Obliczyć powierzchnię części walca $x^2 + y^2 = ax$ znajdującą się wewnątrz kuli $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. 

ZADANIE 2.3.16

Znaleźć pole powierzchni odciętej przez walec $x^2 + y^2 = 1$ z kuli $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. 

ZADANIE 2.3.17

Znaleźć pole tej części powierzchni $2z = xy$, która jest zawarta wewnątrz walca $x^2 + y^2 = 4$. 

ZADANIE 2.3.18

Znaleźć pole tej części powierzchni $z = \sqrt{x^2 - y^2}$, która jest zawarta wewnątrz walca $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$. 

ZADANIE 2.3.19

Znaleźć pole tej części powierzchni $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, która jest zawarta wewnątrz walca $x^2 + y^2 = 2x$. 

ZADANIE 2.3.20

Znaleźć pole tej części powierzchni $x^2 + y^2 = 2z$, która jest zawarta wewnątrz walca $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$. 

ZADANIE 2.3.21

Znaleźć pole powierzchni kuli $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, która jest zawarta wewnątrz walca $\frac{1}{25}x^2 + \frac{1}{9}y^2 = 1$.

**2.3.3 Twierdzenia Gaussa i Stokesa**ZADANIE 2.3.22

Sprawdzić poprawność wzoru Gaussa na przykładzie pola wektorowego postaci

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{(r^2 + a^2)^{3/2}},$$

wybierając jako objętość kulę o środku w początku układu współrzędnych i o promieniu $\sqrt{3}a$.

ZADANIE 2.3.23

Obliczyć, korzystając z zadania 2.1.9, całkę krzywoliniową

$$\int_{\widehat{C}} ydx + zdy + xdz$$

gdzie $\widehat{C}$ jest okręgiem $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$ zorientowanym przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, jeśli patrzymy z dodatnich wartości x (rysunek 2.2(b)). Skorzystać z twierdzenia Stokesa i obliczyć tę całkę jako całkę powierzchniową po powierzchni koła. Porównać wyniki.

ZADANIE 2.3.24

Korzystając z tw. Stokesa obliczyć całkę

$$\int_{\widehat{C}} ydx + zdy + xdz$$

gdzie $\widehat{C}$ jest okręgiem $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$ zorientowanym przeciwnie do ruchu wskazówek zegara jeśli patrzymy z dodatnich wartości x .

ZADANIE 2.3.25

Obliczyć całkę

$$\int_{\widehat{S}} x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy$$

gdzie $\widehat{S}$ jest zewnętrzną częścią stożka $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ograniczoną płaszczyzną $z = h$ (tj. $0 \leq z \leq h$).

Wsk. Zamknąć od góry tę powierzchnię kołem i zastosować tw. Gaussa. Wkład od koła obliczyć osobno i odjąć.

ZADANIE 2.3.26

(Można pominąć) Korzystając z tw. Greena obliczyć

$$\int_{\widehat{C}} e^x [(1 - \cos y)dx + (y - \sin y)dy]$$

gdzie $\widehat{C}$ jest konturem zorientowanym przeciwnie do ruchu wskazówek zegara składającym się z odcinka $0 \leq x \leq \pi$ i wykresu $y = \sin x$.



ZADANIE 2.3.27

Obliczyć całkę

$$\int_{\widehat{S}} x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy$$

gdzie $\widehat{S}$ jest zewnętrzną częścią sześcianu $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$, wykonując całkę powierzchniową i korzystając z tw. Gaussa. 

ZADANIE 2.3.28

Obliczyć całkę

$$\int_{\widehat{S}} x^3 dy \wedge dz + y^3 dz \wedge dx + z^3 dx \wedge dy$$

gdzie $\widehat{S}$ jest zewnętrzną częścią sfery $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, wykonując całkę powierzchniową i korzystając z tw. Gaussa. 

ZADANIE 2.3.29

Obliczyć całkę

$$\int_{\widehat{S}} x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$$

gdzie $\widehat{S}$ jest zewnętrzną częścią sfery $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, wykonując całkę powierzchniową i korzystając z tw. Gaussa. 

ROZDZIAŁ 3

Analiza zmiennej zespolonej

3.1 Funkcje i pochodne

3.1.1 Funkcje i odwzorowania

ZADANIE 3.1.1

Podać równania określające kontury będące elipsą $(x - x_0)^2/a^2 + (y - y_0)^2/b^2 = 1$ o przeciwnych orientacjach. 

ZADANIE 3.1.2

Narysować kontury określone równaniami $z_{\pm}(t) = t \pm i(1 - |t|)$ dla $-1 \leq t \leq 1$. Czy są to kontury zamknięte i gładkie? 

ZADANIE 3.1.3

Określić obrazy prostych $x = C$ lub $y = C$ dla przekształcenia $w = z^2$. Osobno rozpatrzyć przypadek $C = 0$. Naszkicować te krzywe na płaszczyźnie zespolonego w . 

ZADANIE 3.1.4

Znaleźć obraz prostokąta $-\pi < x, \pi, 1/2 < y < 1$ przy przekształceniu funkcją $\sin z$. 

ZADANIE 3.1.5

Liczbę zespoloną $a + ib$ możemy reprezentować macierzą,

$$a + ib \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Wykazać poprawność takiego przedstawienia dla dodawania i mnożenia liczb zespolonych. Znaleźć reprezentację macierzową liczby $1/(a + ib)$. 

ZADANIE 3.1.6

Wyznaczyć zbiory określone równaniami: $\operatorname{Im} \frac{1}{z} = \frac{1}{4}$, $|z| = \operatorname{Re} z + 1$. 

ZADANIE 3.1.7

Znaleźć na płaszczyźnie zespolonej obraz linii $y = x$ po przekształceniu funkcją $1/z$, wyłączając punkt $(0, 0)$. 

ZADANIE 3.1.8

Znaleźć na płaszczyźnie zespolonej obraz linii $|z| = R$, $R \neq 1$, po przekształceniu funkcją $z + 1/z$. 

3.1.2 PochodneZADANIE 3.1.9

Czy istnieją pochodne funkcji $f_1(z) = 3x + 2yi$ i $f_2(z) = x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i$? 

ZADANIE 3.1.10

Wykazać, że funkcja $f(z) = |z|^2 = zz^*$ jest różniczkowalna tylko w punkcie $z = 0$, zatem nie jest analityczna. 

ZADANIE 3.1.11

Wykazać, że funkcje $e^{\pm z}$ i $e^{\pm iz}$ są analityczne na całej płaszczyźnie zespolonej. 

ZADANIE 3.1.12

Sprawdzić, czy istnieją funkcje analityczne $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, dla których

- a) $u(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$, b) $v(x, y) = 3 + x^2 - y^2 - \frac{y}{2(x^2 + y^2)}$, c) $u(x, y) = \sin x \cosh y$
 d) $u(x, y) = \exp(y/x)$, e) $v(x, y) = \ln(x^2 + y^2) - x^2 + y^2$, f) $v(x, y) = e^x \cos(2y)$.

Jeśli tak, to wyznaczyć je z dokładnością do stałej. 

ZADANIE 3.1.13

Znaleźć funkcję analityczną $f(z) = u + iv$, spełniającą warunki $v = \frac{y}{x^2 + y^2}$, $f(2) = 0$. 

ZADANIE 3.1.14

Znaleźć funkcję analityczną $f(z) = u + iv$, spełniającą warunki $u = x^2 - y^2 + xy$, $f(0) = 0$. 

3.2 Całki konturowe i wzory Cauchy'ego**3.2.1 Całki konturowe**ZADANIE 3.2.1

Obliczyć całki konturowe z funkcji $f(z)$ po konturze łączącym punkty z_1 i z_2 , gdy

- a) $f(z) = z^2$, $z_1 = 0$ i $z_2 = 1 + i$, b) $f(z) = \cos z$, $z_1 = -i\pi$ i $z_2 = i\pi$,
 c) $f(z) = e^{z/2}$, $z_1 = 8 + i\pi$ i $z_2 = 8 - 3i\pi$, d) $f(z) = 1/z$, $z_1 = -i$ i $z_2 = i$.

W przypadku d) kontur nie przecina ujemnej osi rzeczywistej. 

ZADANIE 3.2.2

Obliczyć całkę konturową

$$\int_{\widehat{C}} f(z) dz$$

jeśli

- a) $f(z) = 1/\sqrt{z}$, a kontur $\widehat{C}$ jest dolną połówką półokręgu $|z| = 4$ skierowanym od punktu $z_1 = -4$ do

punktu $z_2 = 4$,

b) $f(z) = 1 + i - 2z^*$, a kontur $\widehat{C}$ jest odcinkiem prostej od punktu $z_1 = 0$ do $z_2 = 1 + i$,

c) $f(z) = 1 + i - 2z^*$, a kontur $\widehat{C}$ jest łukiem paraboli $y = x^2$ od punktu $z_1 = 0$ do $z_2 = 1 + i$,

d) $f(z) = i - |z|^2$, a kontur $\widehat{C}$ jest odcinkiem prostej od punktu $z_1 = 2$ do $z_2 = i$,

e) $f(z) = i - |z|^2$, a kontur $\widehat{C}$ jest łukiem paraboli $x = y^2$ od punktu $z_1 = 1 + i$ do $z_2 = 4 + 2i$,

f) $f(z) = |z|z^*$, a kontur $\widehat{C}$ jest górnym półokręgiem $x^2 + y^2 = 1$ skierowanym od punktu $z_1 = -1$ do $z_2 = 1$,

g) $f(z) = |z|z^*$, a kontur $\widehat{C}$ jest dolnym półokręgiem $x^2 + y^2 = 1$ skierowanym od punktu $z_1 = -1$ do $z_2 = 1$. 

3.2.2 Wzory Cauchy'ego

ZADANIE 3.2.3

Obliczyć całkę

$$\oint_{\widehat{C}} g(z) dz,$$

gdzie $\widehat{C}$ jest pewnym konturem na płaszczyźnie zespolonej, a funkcja $g(z)$ równa się

a) $\frac{z^3-6}{2z-1}$, b) $\frac{\cos z}{2z}$, c) $\frac{\sin z}{z}$, d) $\frac{\cosh z}{z-i\pi}$, e) $\frac{\sin z}{z^2}$, f) $\frac{\cos(3z)-1}{z^3}$.

Rozważyć różne kształty konturu. 

ZADANIE 3.2.4

Obliczyć całki

a) $\oint_{|z|=4} \frac{\cos z}{(z-1)(z+3)} dz$, b) $\oint_{|z|=3} \frac{\sin z}{z^2-7z+10} dz$, c) $\oint_{|z|=1} \frac{\sinh^2 z}{z^3} dz$,
d) $\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z+i)^3} dz$, e) $\oint_{|z|=2} \frac{z+1}{z(z-1)^2(z-3)} dz$, f) $\oint_{|z|=3} \frac{\cos z}{(z+1)^2(z-2)} dz$,
g) $\oint_{x^2+(y+1)^2=1} \frac{z dz}{(z+1)(z^2+1)}$, h) $\oint_{x^2+y^2=9} \frac{dz}{z(z^2+4)}$, i) $\oint_{|z|=2} \frac{(z-1) dz}{z^2+2z-3}$.



ZADANIE 3.2.5

Obliczyć całki:

$$\oint_C \frac{\sin z dz}{2z - \pi}, \oint_C \frac{\sin z dz}{(2z - \pi)^2}, \oint_C \frac{e^{3z} dz}{z - \ln 2},$$

$$\oint_C \frac{\cosh z dz}{2 \ln 2 - z}, \oint_C \frac{\sin 2z dz}{(6z - \pi)^3}, \oint_C \frac{\cosh z dz}{(2 \ln 2 - z)^5},$$

gdzie kontur C jest okręgiem $|z| = 1$ lub $|z| = 2$ lub $|z| = 3$ lub $|z - \pi| = \pi$ lub kwadratem o wierzchołkach $\pm 1, \pm i$. 

ZADANIE 3.2.6

Obliczyć całki metodą reziduum,

$$\oint_{|z|=2} \frac{1 - z^2}{1 + z^2} \frac{dz}{z}, \quad \oint_{|z|=5} \frac{z^2 dz}{(2z + 1)(z^2 + 9)},$$

a następnie porównać wynik otrzymany metodą liczenia reziduum w nieskończoności. 

3.3 Szeregi Taylora i Laurenta, residua

3.3.1 Szereg Taylora

ZADANIE 3.3.1

Znaleźć rozwinięcie w szereg Taylora wokół punktu $z_0 = 0$ i określić jego promień zbieżności dla następujących funkcji:

- a) $\sin^2 z$, b) $\cos^3 z$, c) $\sin^4 z + \cos^4 z$,
 d) $\cos^2 z + \cosh^2 z$, e) $e^z \sin z$, f) $\cos z \cosh z$,
 g) $\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$, h) $\frac{1-z}{z} \ln(1-2z)$, i) $\ln\left(\frac{1+z^2}{1+2z}\right)$.



ZADANIE 3.3.2

Znaleźć pierwsze trzy wyrazy rozwinięcia funkcji $z/\sin z$ w szereg Taylora, gdy $z_0 = 0$ lub $z_0 = \pi/2$. Jakie są promienie zbieżności tych szeregów?



3.3.2 Szereg Laurenta

ZADANIE 3.3.3

Znaleźć rozwinięcia w szereg Taylora lub szereg Laurenta funkcji $f(z)$ wokół punktu z_0 i określić obszar zbieżności, jeśli:

- a) $f(z) = \frac{1}{1-z^3}$, $z_0 = 0$, b) $f(z) = \frac{2}{1-z^2}$, $z_0 = 1$, c) $f(z) = \frac{z^2}{1-z^4}$, $z_0 = 0$,
 d) $f(z) = \frac{1}{z^2}$, $z_0 = i$, e) $f(z) = \frac{1}{z}$, $z_0 = 1$, f) $f(z) = \frac{\sinh z}{(z-1)^2}$, $z_0 = 1$,
 g) $f(z) = \frac{\sin z}{z+\pi/2}$, $z_0 = -\pi/2$, h) $f(z) = \frac{z^3-2iz^2}{(z-i)^2}$, $z_0 = i$, i) $f(z) = \frac{4z-1}{z^4-1}$, $z_0 = 0$.



3.3.3 Residua

ZADANIE 3.3.4

Wykazać, że

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\lambda + ik \cos \varphi} = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda^2 + k^2}},$$

gdzie λ i k są liczbami rzeczywistymi. Stosując różniczkowanie po parametrze pokazać, że

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\lambda + ik \cos \varphi)^2} = \frac{2\pi\lambda}{(\lambda^2 + k^2)^{3/2}}.$$

Sprawdzić poprawność tej równości wykonując całkę stojącą po lewej stronie.



ZADANIE 3.3.5

Obliczając całkę konturową z funkcji $(e^{2iz} - 1)/z^2$ (zauważyć, że dla $z = 0$ jest to biegun pierwszego rzędu) wykazać, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \pi.$$



ZADANIE 3.3.6

Obliczając całkę konturową z funkcji $(e^{3iz} - 3e^{iz} + 2)/z^3$ (zauważyć, że dla $z = 0$ jest to biegun pierwszego rzędu) wykazać, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx = \frac{3}{4}\pi.$$

ZADANIE 3.3.7

Wykazać, że dla funkcji $f(z)$ analitycznej na obszarze zawierającym w sobie koło $|z| \leq 1$ spełniony jest tzw. wzór Poissona

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\varphi-t)+r^2} f(e^{it}) dt,$$

gdzie $r < 1$ i $z = re^{i\varphi}$. Wzór ten określa tzw. transformatę Poissona.

ZADANIE 3.3.8

Znaleźć bieguny i obliczyć odpowiednie residua dla funkcji:

$$\frac{z^3 + 2z^2 - z + 2}{z^3 - 1}, \frac{1}{1 - z^8}, \frac{1}{z + z^3}, \frac{1}{z(1 - z^2)}, \frac{z^2}{(1 + z)^3}, \tanh z,$$

$$\frac{z}{1 - z^4}, \frac{e^{2z}}{1 + e^z}, \frac{\cosh z - 1}{z^7}, \frac{e^{iz}}{(z^2 + 4)^2}, \frac{e^{2z} - 1}{z^2}, \frac{e^{3z} - 3z - 1}{z^4}, \frac{1 - \cos z}{(\pi - z)^3}.$$

ZADANIE 3.3.9

Wyznaczyć:

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{z(z+3)}, \operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{z^2(z-1)}, \operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{\sin z}, \operatorname{Res}_{z=0} \frac{\sin z}{z^2}, \operatorname{Res}_{z=0} \frac{1-z}{1-\cos z}, \operatorname{Res}_{z=\infty} e^{\frac{1}{z}}, \operatorname{Res}_{z=1} \frac{e^z}{(z-1)^2}, \operatorname{Res}_{z=\infty} (z^2 \sin \frac{\pi}{z}).$$

ZADANIE 3.3.10

Obliczyć metodą residuów całki:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2}, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{(a^2+x^2)^2} \quad \text{dla } \alpha, a > 0,$$

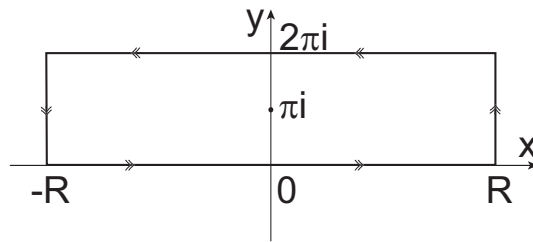
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+x^2+1}, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+25)(9x^2+1)}, \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(3+2\cos x)^2}, \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a+b\cos^2 x)}.$$

ZADANIE 3.3.11

Wykazać, że:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{3}{8}\pi, \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2a} e^{-a}, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)(x+2)}{(x^2+1)(x^2+2)} dx = \pi.$$





RYSUNEK 3.1: Kontur całkowania

ZADANIE 3.3.12

Obliczyć całki:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta \, d\theta}{5 + 4 \cos \theta}, \int_0^\infty \frac{dx}{4x^2 + 1}, \int_{-\infty}^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)} \\ & \int_0^\infty \frac{\cos 2x dx}{9x^2 + 4}, \int_0^\infty \frac{x \sin x dx}{x^4 + 4x^2 + 5}, \int_0^\infty \frac{\cos 2x dx}{(4x^2 + 9)^2} \\ & \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}, \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{x^4 + 16}, \int_0^\infty \frac{\cos x dx}{x^4 + 4x^2 + 5} \\ & \int_0^\infty \frac{x \sin x dx}{9x^2 + 4}, \int_0^\infty \frac{\cos \pi x dx}{x^4 + x^2 + 1}, \int_0^\infty \frac{\cos x dx}{(9x^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

ZADANIE 3.3.13

Wykazać, że

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{px}}{1 + e^x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi p}$$

dla $0 < p < 1$. Całkować po konturze z Rysunku 3.1, a następnie przejść z R do nieskończoności. ZADANIE 3.3.14

Obliczyć

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{px}}{1 - e^x} dx$$

dla $0 < p < 1$. Użyć podobnego konturu całkowania do tego z Rysunku 3.1 zauważając, że osobliwości znajdują się na konturze. ZADANIE 3.3.15

Obliczyć

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{2\pi x/3}}{\cosh \pi x} dx.$$

Użyć podobnego konturu całkowania do tego z Rysunku 3.1. ZADANIE 3.3.16

Obliczyć

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{\sinh x}.$$

Użyć podobnego konturu całkowania do tego z Rysunku 3.1. 

ZADANIE 3.3.17

Korzystając z lematu Jordana obliczyć całki:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 2x + 10} dx, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 + 4x + 20} dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 4x + 20} dx, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x + i\pi)^2} dx, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(x - i\pi)^2} dx.$$

ZADANIE 3.3.18

Korzystając z lematu Jordana obliczyć wartość główną następujących całek:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 5x + 6} dx, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(x^2 + 1)(x - 1)} dx, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^3 + 1} dx, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4 - 1} dx.$$

ZADANIE 3.3.19

Obliczyć całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{(e^x + 1)(e^x + 2)} dx, \quad 0 < a < 2,$$

wybierając jako kontur całkowania prostokąt o wierzchołkach $\pm R$ i $\pm R + 2\pi i$ i przechodząc następnie do granicy $R \rightarrow \infty$.

ZADANIE 3.3.20

Stosując podobną metodę jak w poprzednim zadaniu obliczyć całki:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(ax)}{\sinh x} dx, \int_0^{\infty} \frac{\cos(ax)}{\cosh x} dx,$$

w których a jest dowolną liczbą rzeczywistą. Uwaga! Punkty 0 i $2\pi i$ należy obejść małym łukiem, tak jak przy obliczaniu wartości głównej.

