

ZADANIA NA ĆWICZENIA Z MATEMATYKI II L

SERIA 2

1 PRZESTRZENIE WEKTOROWE

- przestrzeń wektorowa, podprzestrzeń
- kombinacja liniowa wektorów, liniowa niezależność
- podprzestrzeń generowana przez zbiór wektorów (powłoka liniowa), redukcja kolumnowa układu wektorów
- baza i wymiar przestrzeni wektorowej, baza kanoniczna

1. Który z poniższych podzbiorów przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^5$ jest jej podprzestrzenią?

a) $A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_2 = 0, x_3 + x_4 = 0, x_3 + 4x_4 - x_5 = 1\}$

b) $B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 - x_2 = 0, x_2 + 3x_3 - x_4 = 0\}$

2. Sprawdzić liniową niezależność wektorów:

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$

3. Sprawdzić czy wektory v_1, v_2, v_3 leżą w jednej płaszczyźnie:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Sprawdzić czy podane wektory $\{e_1, e_2, e_3\}$ stanowią bazę w $\mathbb{R}^3$ i przedstawić wektor v w tej bazie:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

5. Wyznaczyć wymiar przestrzeni wektorowej

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = -2x_2, x_2 = x_3\}.$$

2 PRZESTRZENIE UNITARNE

- rzeczywista przestrzeń wektorowa z iloczynem skalarnym $(\cdot|\cdot)$
- zespolona przestrzeń wektorowa z iloczynem skalarnym $\langle\cdot|\cdot\rangle$
- norma wektora
- kąt między wektorami, ortogonalność
- ortonormalizacja metodą Grama-Schmidta

1. Metodą Grama-Schmidta zortonormalizować bazę $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. Dane są wektory $x = v_1 - 2v_2 + 3v_3$ oraz $y = -4v_1 + v_2 + v_3$, gdzie (v_1, v_2, v_3) jest bazą ortonormalną. Obliczyć kąt między x i y .
3. Dopełnić do bazy ortonormalnej w $\mathbb{R}^4$ układ wektorów $\{e_1, e_2\}$:

$$e_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

4. Podprzestrzeń W w $\mathbb{R}^4$ z kanonicznym iloczynem skalarnym zadana jest równaniami

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Znaleźć bazę ortonormalną w $W^\perp$ tzn. w podprzestrzeni ortogonalnej do W .

5. Metodą Grama-Schmidta znaleźć bazę ortonormalną w przestrzeni wektorowej $V = \langle 1, x, x^2, x^3 \rangle$ wielomianów stopnia nie większego niż 3 na odcinku $[-1, 1]$. Iloczyn skalarny w tej przestrzeni jest zdefiniowany jako

$$(p|q) = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx, \quad p, q \in V$$

6. Pokazać, że w dowolnej przestrzeni unitarnej $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ wektor

$$v_{\parallel} = \frac{\langle w | v \rangle}{\|w\|^2} w = \left\langle \frac{w}{\|w\|} \middle| v \right\rangle \frac{w}{\|w\|}, \quad w \neq 0$$

jest jedynym wektorem posiadającym następujące własności:

- a) $v_{\parallel} \in \langle w \rangle$ tzn. $v_{\parallel} = \lambda w$, gdzie $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$,
- b) $\langle v - v_{\parallel} | w \rangle = 0$ tzn. $v - v_{\parallel}$ jest wektorem ortogonalnym do w .

3 GRUPY I CIAŁA

- grupa
- ciało

1. Pokazać, że w dowolnej grupie $(G, \star)$ równanie $x \star a = d$ ma rozwiązanie $x = d \star a^{-1}$.
2. Pokazać, że z zadania 1 wynika 'prawo skracania': $c \star a = d \star a \iff c = d$.
3. Pokazać, że w dowolnej grupie $(G, \star)$ każdy element $g \in G$ ma dokładnie jeden element odwrotny g^{-1} oraz że istnieje dokładnie jeden element neutralny.
4. Pokazać, że w dowolnym ciełe $(\mathbb{K}, \oplus, \odot)$ zachodzi prawostronna rozdzielność $\odot$ względem $\oplus$ tzn.

$$(g_1 \oplus g_2) \odot g_3 = (g_1 \odot g_3) \oplus (g_2 \odot g_3).$$

5. Pokazać, że w dowolnym ciełe $(\mathbb{K}, \oplus, \odot)$ zachodzi $g \odot 0 = 0$, gdzie 0 jest elementem neutralnym względem $\oplus$.