

ZADANIA NA ĆWICZENIA Z MATEMATYKI II L

SERIA 4

1 DZIEDZINA I POZIOMICE FUNKCJI WIELU ZMIENNYCH RZECZYWISTYCH

1. Określić dziedzinę i naszkicować poziomice funkcji

$$\text{a) } f(x, y) = (1 + x + y^2)^2, \quad \text{b) } f(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}.$$

2 GRANICA FUNKCJI W PUNKCIE, GRANICE ITEROWANE, CIĄGŁOŚĆ FUNKCJI

1. Obliczyć granice iterowane oraz zbadać zbieżność i obliczyć granicę funkcji w punkcie:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x} \sin(x^2 + |xy|), \quad & \text{b) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \sin(xy)}{x^2 + y^2}, \quad \text{c) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{xy}\right), \\ \text{d) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y} \sin x, \quad & \text{e) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x^2 + y^2} \sin x. \end{aligned}$$

2. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} [x^2 + (y-1)^2] \cos \frac{1}{x} \cos \frac{1}{y-1} & \text{gdy } (x, y) \neq (0, 1), \\ 0 & \text{gdy } (x, y) = (0, 1). \end{cases}$$

Zbadać istnienie granicy podwójnej w punkcie $(0, 1)$ oraz granic iterowanych. Sprawdzić czy f jest ciągła.

3. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0), \\ \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0). \end{cases}$$

Pokazać, że:

- a) f jest funkcją ograniczoną na $\mathbb{R}^2$,
- b) f jest nieciągła w punkcie $(0, 0)$,
- c)* $f|_L$, gdzie L jest dowolną prostą na $\mathbb{R}^2$, jest ciągła na L .

3 POCHODNE CZĄSTKOWE, POCHODNE KIERUNKOWE, RÓŻNICZKOWALNOŚĆ (W SEN- SIE FRÉCHETA), PŁASZCZYZNA STYCZNA DO POWIERZCHNI

1. Obliczyć pochodne cząstkowe $\partial_x z$ i $\partial_y z$ tam gdzie istnieją:

$$\begin{aligned} \text{a) } z(x, y) &= e^{\sin(\frac{y}{x})}, \quad \text{b) } z(x, y) = \ln\left(\frac{x+y}{\sqrt{y}}\right), \quad \text{c) } z(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \\ \text{d) } z(x, y) &= (xy)^{x+y}, \quad \text{e) } z(x, y) = \int_{x^2}^{y\sqrt{x}} \operatorname{arth}(t) dt. \end{aligned}$$

2. Wykazać, że funkcja określona wzorem

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{dla } xyz = 0, \\ 0 & \text{dla } xyz \neq 0, \end{cases}$$

ma pochodne cząstkowe¹ f'_x, f'_y, f'_z w punkcie $P = (0, 0, 0)$, ale nie jest ciągła w P .

3. Dana jest funkcja określona wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{dla } x^2 + y^2 > 0, \\ 0 & \text{dla } x = y = 0. \end{cases}$$

Wykazać, że $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$.

4. Dana jest funkcja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} & \text{gdy } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{gdy } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a) Pokazać, że f'_x oraz f'_y istnieją na $\mathbb{R}^2$.

b) Zbadać ciągłość funkcji f'_x oraz f'_y . W szczególności sprawdzić ich ciągłość w $(0, 0)$.

c) Policzyc f''_{xy} oraz f''_{yx} . Wykazać, że $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$.

5. Dana jest funkcja $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$. Wykazać, że:

a) f'_x oraz f'_y istnieją na $D_f = \mathbb{R}^2$.

b) Funkcje f'_x i f'_y nie są ciągłe w $P = (0, 0)$.

6. Obliczyć pochodne kierunkowe funkcji

a) $f(x, y) = x^4 + y^4 + 2xy + 1$ w punkcie $P = (1, 2)$ w kierunku wektora $v = (3, -1)$,

b) $u(x, y) = xy^2 + z^3 - xyz$ w punkcie $B = (1, 1, 2)$ w kierunku wektora $u = (1, 2, 1)$.

7. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $z(x, y) = \frac{y^2}{x}$ w dowolnym punkcie na elipsie $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 = c^2\}$ wzdłuż wektora prostopadłego do elipsy w tym punkcie.

8. Zbadać istnienie pochodnych kierunkowych (w tym i cząstkowych) w punkcie $(0, 0)$ oraz różniczkowalność (w sensie Frécheta) funkcji:

a) $f(x, y) = \sqrt{|x| \sin^2 y},$

b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2 + 2xy^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$

c) $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^{|xy|^{\frac{3}{2}}} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ 1 & \text{dla } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

9. * Niech V będzie przestrzenią unitarną nad $\mathbb{R}$. Pokazać, że pochodna słaba (Gateaux) funkcji $\mathfrak{F}$

$$V \times V \ni (v_1, v_2) \mapsto \mathfrak{F}(v_1, v_2) = \langle v_1 | v_2 \rangle \in \mathbb{R}$$

zadana jest wzorem

$$V \ni w \mapsto \nabla_w \mathfrak{F}(v_1, v_2) = \langle v_1 + v_2 | w \rangle.$$

10. Znaleźć równanie płaszczyzny stycznej w punkcie (x_0, y_0, z_0) do powierzchni:

$$\text{a) } z(x, y) = \sqrt{2\sqrt{x^2 + y^2} + 1}, \quad \text{b) } z(x, y) = \frac{x}{|y|}, \quad \text{a) } (x^2 + y^2 + z^2)^2 = (x^2 - y^2 + z^2).$$

Przedyskutować punkty osobliwe.

¹Oznaczenia: $\frac{\partial f}{\partial x} = \partial_x f = f'_x, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \partial_{xy} f = \partial_x \partial_y f = f''_{xy}.$

4 WZÓR TAYLORA

1. Podać rozwinięcie Taylora do trzeciego rzędu funkcji $f(x, y)$ wokół punktu P :

a) $f(x, y) = \ln(1 + x \sin y)$, $P = (0, 0)$ b) $f(x, y) = e^{\frac{x}{y}}$, $P = (0, 1)$, c) $f(x, y) = \operatorname{arth} \sqrt{x^2 + y^2}$, $P = (0, 2)$.