

ZADANIA NA ĆWICZENIA Z MATEMATYKI II L

SERIA 5

1 EKSTREMA LOKALNE FUNKCJI WIELU ZMIENNYCH

1. Określić ekstrema lokalne funkcji

a) $f(x, y) = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$,

b) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$ w funkcji parametru a .

2 EKSTREMA GLOBALNE FUNKCJI WIELU ZMIENNYCH

1. Znaleźć ekstrema globalne funkcji

a) $f(x, y) = 2x^2 - 2y^2$ w kole $x^2 + y^2 \leq 4$,

b) $f(x, y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$ w trójkącie ograniczonym prostymi $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 3$.

3 EKSTREMA ZWIĄZANE

1. Określić ekstrema związane funkcji $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy$ przy warunku postaci $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

2. Wśród prostopadłościanów o powierzchni S znaleźć ten o maksymalnej objętości.

4 EKSTREMA FUNKCJI UWIKŁANYCH

1. Znaleźć ekstrema funkcji $y = y(x)$ zadanych w sposób uwikłany przez:

a) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$,

b) $x^5 - \frac{4}{3}y^4 - 5xy^2 = 0$.

5 ANALIZA WEKTOROWA

1. Sprawdzić następujące tożsamości:

a) $\nabla(\phi\psi) = (\nabla\phi)\psi + \phi\nabla\psi$,

b) $\operatorname{div}(\phi\vec{A}) = (\nabla\phi) \cdot \vec{A} + \phi \operatorname{div} \vec{A}$,

c) $\operatorname{rot}(\phi\vec{A}) = (\nabla\phi) \times \vec{A} + \phi \operatorname{rot} \vec{A}$,

d) $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \nabla(\operatorname{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$,

gdzie $\phi(x_1, x_2, x_3)$, $\psi(x_1, x_2, x_3)$ są polami skalarnymi, natomiast $\vec{A}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 A_i(x_1, x_2, x_3)e_i$ jest polem wektorowym trzech zmiennych $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$, a Δ jest laplasjanem $\Delta = \operatorname{div} \nabla$.

6 CAŁKI WIELOKROTNE

1. Obliczyć całki iterowane:

$$\text{a) } \int_0^4 dx \int_4^1 2xy \, dy, \quad \text{b) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{a \cos \theta}^a r^4 \, dr.$$

2. Obliczyć całkę

$$\iint_{\Omega} (x + 2y) \, dx \, dy,$$

gdzie obszarem całkowania Ω jest trójkąt o wierzchołkach $A = (0, 0)$, $B = (2, 2)$ oraz $C = (-1, 1)$.

3. Stosując zamianę zmiennych obliczyć całkę

$$\iint_{\Omega} \frac{dx \, dy}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

gdzie Ω jest wnętrzem okręgu $x^2 + y^2 = 1$.