Zadania domowe z Matematyki II L

SERIA 3

1 PRZESTRZENIE UNITARNE

1. Dane są dwa wektory $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ i $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ w przestrzeni unitarnej $\mathbb{R}^3$ z iloczynem skalarnym $\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$, gdzie $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.
   a) Rozłożyć wektor v na składową równoległą i prostopadłą do w.
   b) Rozłożyć wektor w na składową równoległą i prostopadłą do v.

2. Czy w sensie iloczynu skalarnego $\langle f|g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ w przestrzeni wektorowej funkcji ciągłych na odcinku $[0, 1]$
   a) funkcje $\sin 2\pi x$ i $\cos 2\pi x$ są ortogonalne?
   b) funkcje $\sin 2\pi m x$ i $\sin 2\pi n x$ są ortogonalne?
   c) Znaleźć wielomian stopnia 2 ortogonalny do 1 i x.

3. *[1] Niech α i $\beta \neq 0$ będa ustalonymi wektorami w przestrzeni unitarnej $\mathbb{R}^3$ z iloczynem skalarnym jak w zadaniu 1. Znaleźć najkrótszy wektor postaci $\alpha + t\beta$, gdzie $t \in \mathbb{R}$. Czy jest on ortogonalny do β. Zinterpretować wynik geometrycznie.

2 ODWZOROWANIA LINIOWE

1. Podać macierz odwzorowania liniowego $M : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ w bazie kanonicznej polegającego na odbiciu lustrzanym punktów względem płaszczyzny $x + 2y - z = 0$.

2. Wyrazić operator różniczkowania $\frac{d}{dx}$ w bazie $p = (2, 2 - 3x, 2 - 3x + 8x^2)$ w przestrzeni wektorowej $\mathbb{K}_2[x]$. Znaleźć $\mathrm{Ker}\,\frac{d}{dx}$. Jak wyglada macierz operatora $\frac{d}{dx}$ w bazie $c = (1, x, x^2)$.

3. Dane jest odwzorowanie liniowe $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -9 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

   Wyznaczyć $\mathrm{Ker}\,T$, $\mathrm{Im}\,T$, $\dim \mathrm{Ker}\,T$ oraz $\dim \mathrm{Im}\,T$.

4. Znaleźć macierz przekształcenia liniowego F, które wektory v_1, v_2, v_3 przeprowadza odpowiednio w wektory v_1', v_2', v_3', gdzie

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

[1] Zadania oznaczone * nie są obowiązkowe.

5. W przestrzeni wektorowej wielomianów stopnia $\leqslant 3$ znaleźć postać operatora $\frac{d}{dx}$ w bazie kanonicznej (potęgowej) $c = (1, x, x^2, x^3)$, w bazie wielomianów Legendre'a $l = \left(1, x, \frac{1}{2}(3x^2-1), \frac{1}{2}(5x^3-3x)\right)$ oraz w bazie wielomianów Hermite'a $h = (1, 2x, 4x^2-2, 8x^3-12)$. Znaleźć jądro i obraz tego operatora.

6. Przekształcenie liniowe zadane w bazach kanonicznych macierzą
$$S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
jest odbiciem lustrzanym wzgledem pewnej płaszczyzny. Znaleźć wektory rozpinające tą płaszczyznę oraz równanie tej płaszczyzny.

7. Przekształcenie liniowe ma w bazach kanonicznych następującą macierz:
$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} + \frac{2\sqrt{3}}{5} & \frac{2}{5} - \frac{\sqrt{3}}{5} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{5} - \frac{\sqrt{3}}{5} & \frac{4}{5} + \frac{\sqrt{3}}{10} & \frac{1}{2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$
   a) Pokazać, że jest to obrót w $\mathbb{R}^3$, czyli że jest to przekształcenie ortogonalne[2] o wyznaczniku 1.
   b) Znaleźć prostą wokół której wykonywany jest obrót.
   c) Znaleźć kąt obrotu.

8. W przestrzeni wielomianów trygonometrycznych dane jest odwzorowanie liniowe $T\phi(x) = \phi\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Znaleźć macierz tego odwzorowania w bazie
$$b = (1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx).$$

9. Dane jest odwzorowanie liniowe $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, takie że
$$Fv = \begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 + 4x_3 \\ -2x_1 + 5x_2 - x_3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$
   Znaleźć macierz odwzorowania F:
   a) w bazach kanonicznych w $\mathbb{R}^3$ oraz $\mathbb{R}^2$,
   b) w bazie kanonicznej w $\mathbb{R}^3$ i bazie $f = (f_1, f_2)$ w $\mathbb{R}^2$,
   c) w bazie $e = (e_1, e_2, e_3)$ w $\mathbb{R}^3$ i bazie kanonicznej w $\mathbb{R}^2$,
   d) w bazie e w $\mathbb{R}^3$ i w bazie f w $\mathbb{R}^2$,

   gdzie $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 25 \\ 3 \end{pmatrix}$, $f_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

10. Dane jest odwzorowanie F przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$ wielomianów stopnia $\leqslant 2$ w $\mathbb{R}^3$ zadane wzorem:
$$F : w(x) \mapsto \begin{pmatrix} w'(0) \\ w'(1) \\ w'(-1) \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} w(-1) \\ w(0) \\ w(1) \end{pmatrix},$$
gdzie $w(a)$ oraz $w'(a)$ oznacza wartość wielomianu i jego pochodnej w punkcie $a = -1, 0, 1$. Sprawdzić czy jest to odwzorowanie liniowe. Jeśli tak, to podać macierz odwzorowania w bazie $f = (f_1, f_2, f_3)$, gdzie $f_k(x) = x^{3-k}$ w przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$ oraz w bazie kanonicznej w $\mathbb{R}^3$, a następnie wyznaczyć bazy podprzestrzeni $\operatorname{Ker} F$ oraz $\operatorname{Im} F$.

[2]Przekształcenie jest ortogonalne gdy jego macierz w bazach kanonicznych jest macierzą ortogonalną.

11. Dane jest odwzorowanie liniowe F przestrzeni $\mathbb{K}_2[x]$ w przestrzeń macierzy $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K})$, takie że $Fw = w(S)$, gdzie S jest ustaloną macierzą $S = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Znaleźć macierz tego odwzorowania w bazie kanonicznej $(1, x, x^2)$ w $\mathbb{K}_2[x]$ i w bazie $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ w $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{K})$, gdzie

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad f_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad f_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

12. *[3] Sprawdzić, że operator P_v rzutu prostopadłego na v jest hermitowski

$$P_v w = \frac{\langle v|w\rangle}{||v||^2} v.$$

Znaleźć wektory i wartości własne tego operatora.

13. * Znaleźć wartości własne i wektory własne operatora $\frac{d^2}{dx^2}$ działającego na zbiorze funkcji dwukrotnie różniczkowalnych na $[0, 1]$ znikających na krańcach przedziału.

[3]Zadania oznaczone * nie są obowiązkowe.