

ZADANIA DOMOWE Z MATEMATYKI II L

SERIA 6

1 ANALIZA WEKTOROWA

1. Sprawdzić, że

- (a) $\operatorname{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{B}$,
- (b) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{A}) = 0$,
- (c) $\operatorname{rot}(\nabla \phi) = 0$,
- (d) $\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{A} + \vec{A} \times \operatorname{rot} \vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B}$,

gdzie $(\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} = e_j B_i \partial_i A_j$.

2. Obliczyć

- (a) $\nabla(\ln r)$,
- (b) $\nabla(\vec{A} \cdot \vec{r})$,
- (c) $\nabla(xyz)$,

gdzie $\vec{r} = (x, y, z)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, a $\vec{A}$ jest stałym wektorem.

2 CAŁKI WIELOKROTNE

1. Obliczyć całki

- (a) $\int_{\Omega} \frac{x^2}{1+y^2} dx dy$, gdzie Ω jest kwadratem o wierzchołkach w $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$.
- (b) $\int_{\Omega} \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy$, gdzie $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.
- (c) $\int_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy$, gdzie $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 \leq 1\}$. Skorzystać z symetrii i całkować tylko po pierwszej ćwiartce. Skorzystać z zamiany zmiennych: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$.
- (d) $\int_{\Omega} (x + y)z dx dy dz$, gdzie $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1\}$.

3 ZASTOSOWANIA CAŁEK

- 1. Obliczyć objętość czaszy kulistej o wysokości H tzn. bryły ograniczonej sferą $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ i płaszczyzną $z = R - H$, gdzie $R \geq H$.
- 2. Znaleźć objętość bryły ograniczonej powierzchniami $z = 1 + x + y$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 1$.
- 3. Obliczyć objętość bryły ograniczonej paraboloidą eliptyczną $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ i płaszczyzną $z = c > 0$.
- 4. Obliczyć moment bezwładności jednorodnej kuli względem średnicy.

4 KRZYWE

1. Dla następujących krzywych wyznaczyć wektor styczny $\vec{t}$, wersor styczny $\vec{e}_t$, element krzywej $d\vec{r}$ oraz element długości łuku $dl = |d\vec{r}|$
 - (a) $\vec{r}(\xi) = \xi\vec{e}_x + \xi^2\vec{e}_y$,
 - (b) $\vec{r}(\xi) = \sqrt{\xi}\vec{e}_x + \sqrt{\xi - a^2}\vec{e}_y$,
 - (c) $\vec{r}(t) = (1 + 3t + 2t^2)\vec{e}_x + (2 - 2t + 5t^2)\vec{e}_y + (1 - t^2)\vec{e}_z$,
 - (d) $\vec{r}(\xi) = R\xi \cos \xi \vec{e}_x + R\xi \sin \xi \vec{e}_y + H\xi \vec{e}_z$, $H, R = \text{const.}$,
 - (e) $\vec{r}(\xi) = \ln \cos(\alpha\xi)\vec{e}_x + \ln \sin(\beta\xi)\vec{e}_y + \xi\vec{e}_z$, $\alpha, \beta = \text{const.}$.

W punktach (a) i (b) znaleźć równania uwikłane $F(x, y) = 0$ krzywych.

5 POWIERZCHNIE

1. Dla następujących powierzchni wyznaczyć wektory styczne ∂_u , ∂_v , element powierzchni $d\vec{S} = \partial_u \times \partial_v$, element pola powierzchni $dS = |d\vec{S}|$
 - (a) $\vec{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, cv)$, $c = \text{const.}$
 - (b) $\vec{r}(u, v) = (a \cosh u \cos v, b \cosh u \sin v, \sinh u)$, $a, b = \text{const.}$

Znaleźć równania uwikłane $F(x, y, z)$ tych powierzchni.

6 CAŁKI KRZYWOLINIOWE

1. Obliczyć całkę krzywoliniową

$$\int_{\Gamma} y^2 dx + x^2 dy,$$

gdzie krzywa Γ jest górną częścią elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ skierowaną zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

2. Obliczyć całkę krzywoliniową $\int_{\Gamma} y dx - 2z dy + 3x dz$ po odcinku Γ o początku w punkcie $(0, 0, 0)$ i końcu w $(1, 1, 1)$.
3. Korzystając z twierdzenia Greena obliczyć całkę krzywoliniową z pola wektorowego $\vec{A}(\vec{r}) = (x \ln y, ye^x)$ po krzywej Γ , jeśli Γ zorientowana jest przeciwnie do ruchu wskazówek zegara i otacza obszar $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 2\}$.
4. Obliczyć całkę krzywoliniową nieskierowaną

$$\int_{\Gamma} (x + y) ds,$$

gdzie Γ jest sumą boków trójkąta o wierzchołkach $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$.

5. Obliczyć całkę krzywoliniową

$$\int_{\Gamma} (y - x) ds$$

gdzie krzywa Γ jest łukiem krzywej $y = x^3$ zawartym między punktami $(1, 1)$ i $(2, 8)$.