Informacja Kwantowa 1/2

Seria 3

do oddania na 26.10.2016

Rozważmy operator qubitowy $\hat{\sigma}_{\mathbf{n}} = \mathbf{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}$, gdzie

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_1 \\ \hat{\sigma}_2 \\ \hat{\sigma}_3 \end{pmatrix},$$

przy czym wektor $\mathbf{n}$ ma składowe rzeczywiste i długość jednostkową, $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$.

a) Pokazać, że wartości własne operatora $\hat{\sigma}_{\mathbf{n}}$ wynoszą $\nu_1 = 1$ oraz $\nu_2 = -1$ i znaleźć odpowiadające im wektory własne $|\nu_1\rangle$ i $|\nu_2\rangle$.

b) Zweryfikować, że rzuty na stany własne można zapisać jako

$$|\nu_1\rangle\langle\nu_1| = \frac{1}{2}(\hat{\mathbb{1}} + \mathbf{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}), \qquad |\nu_2\rangle\langle\nu_2| = \frac{1}{2}(\hat{\mathbb{1}} - \mathbf{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}).$$

c) Rozważmy operator unitarny

$$\hat{U} = \exp(i\alpha\hat{\sigma}_{\mathbf{n}}/2) = e^{i\alpha/2}|\nu_1\rangle\langle\nu_1| + e^{-i\alpha/2}|\nu_2\rangle\langle\nu_2|,$$

gdzie druga postać wynika z rozkładu spektralnego operatora $\hat{\sigma}_{\mathbf{n}}$. Zapisać ten operator jako kombinację liniową $\hat{\mathbb{1}}$ oraz macierzy Pauliego, a następnie obliczyć elementy macierzy $\mathbf{O}$ odpowiadającej tej transformacji na sferze Blocha dane wzorem

$$O_{lk} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\hat{U}^\dagger \hat{\sigma}_l \hat{U} \hat{\sigma}_k).$$

Zweryfikować, że jest to obrót właściwy, co jest równoważne sprawdzeniu warunków $\det\mathbf{O} = 1$ i $\mathbf{O}^T\mathbf{O} = \mathbf{I}$, oraz, że oś obrotu jest zadana przez wektor $\mathbf{n}$, czyli $\mathbf{O}\mathbf{n} = \mathbf{n}$.