

Informacja Kwantowa 1/2

Seria 12

do oddania na 25.01.2017

Rozważmy działanie algorytmu Grovera dla funkcji f określonej na N wartościach rejestru \mathbf{x} , takiej że dla dokładnie jednego (nieznanego) argumentu mamy $f(\mathbf{y}) = 1$, a dla pozostałych $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ zachodzi $f(\mathbf{x}) = 0$. Funkcja f zaimplementowana jest jako transformacja unitarna $\hat{U}_f|\mathbf{x}\rangle = (-1)^{f(\mathbf{x})}|\mathbf{x}\rangle$. Rejestr jest początkowo przygotowany w stanie

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{x}} |\mathbf{x}\rangle.$$

Pojedyncza iteracja algorytmu Grovera zadana jest przez transformację unitarną $\hat{V}\hat{U}_f$, gdzie $\hat{V} = 2|\Psi\rangle\langle\Psi| - \hat{\mathbb{1}}$.

Działanie algorytmu można opisać w podprzestrzeni dwuwymiarowej rozpiętej przez unormowane stany $|\mathbf{y}\rangle$ oraz

$$|\neg\mathbf{y}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sum_{\mathbf{x} \neq \mathbf{y}} |\mathbf{x}\rangle$$

a) W podprzestrzeni $\{|\mathbf{y}\rangle, |\neg\mathbf{y}\rangle\}$ można przedstawić

$$|\Psi\rangle \equiv \begin{pmatrix} \sin \theta_0 \\ \cos \theta_0 \end{pmatrix}, \quad \hat{V}\hat{U}_f \equiv \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Znaleźć (bez przybliżeń!) wyrażenia wiążące θ_0 oraz θ z N .

b) Po k iteracjach algorytmu Grovera stan rejestru dany jest przez

$$(\hat{V}\hat{U}_f)^k |\Psi\rangle \equiv \begin{pmatrix} \sin(k\theta + \theta_0) \\ \cos(k\theta + \theta_0) \end{pmatrix}.$$

Dla optymalnej liczby iteracji k_{opt} argument $k_{\text{opt}}\theta + \theta_0$ powinien być jak najbliższy $\pi/2$. Posiłkując się komputerem, znaleźć k_{opt} i narysować dla $1 \leq N \leq 1000$ prawdopodobieństwo otrzymania w wyniku odczytu rejestru innej wartości niż \mathbf{y} , dane przez $\cos^2(k_{\text{opt}}\theta + \theta_0)$.

c) Kąt, jaki tworzy wektor stanu rejestru po k_{opt} iteracjach z $|\mathbf{y}\rangle$ powinien być mniejszy lub równy $\theta/2$. Zatem oszacowanie górne na błędny wynik algorytmu Grovera jest dane przez $\sin^2(\theta/2)$. Narysować tę wielkość na wykresie w pkt. b). Jak skaluje się ona z N ?