Praca domowa I

Javier de Lucas

Forme różniczkowe: Cofnięcie, zamiana zmiennych, pochodna i iloczyn zewnętrzny

Zadanie 1. Napisz następujące formy różniczkowe we współrzędnych biegunowych

$$\omega := \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}, \qquad \omega := \sqrt{x^2+y^2}dx \wedge dy.$$

Napisz następujące formy różniczkowe we współrzędnych sferycznych

$$\omega := xdy + ydz + zdx, \qquad \omega := xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy,$$
$$\omega := x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy.$$

Zadanie 2. Obliczyć pochodną zewnętrzną następujących form różniczkowych

$$\omega_1 := e^{xy+z^2} dx, \qquad \omega_2 := \sum_{i=1}^{n} x_i^2 dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Zadanie 3. Niech

$$\alpha := xdx - ydy, \quad \beta := zdx \wedge dy + xdy \wedge dz, \quad \gamma := zdy$$

będą formami różniczkowymi na $\mathbb{R}^3$. Obliczyć

- $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$,
- $d\alpha, d\beta, d\gamma$.

Zadanie 4. Niech $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ i $m < n$. Pokaż, że jeżeli $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ i $k > m$ to $\phi^*\omega = 0$.

Zadanie 5. Niech $\phi : (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ i niech $\omega := dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n$. Pokaż, że

$$\phi^*\omega = \det[T\phi] dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

gdzie

$$[T\phi] := \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Zadanie 6. Niech $\phi : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x_1^3 x_2, \log(x_1 + x_2)) \in \mathbb{R}^2$ i niech $\omega := dy_1 \wedge dy_2$. Obliczyć $\phi^*\omega$.

Zadanie 7. Niech $\omega := dx \wedge dy \wedge dz$. Obliczyć $\phi^*\omega$ dla:

$$\phi : (r, \theta, \phi) \in \mathbb{R}_+ \times]0, 2\pi[^2 \mapsto (r \cos\phi \sin\theta, r \sin\phi \sin\theta, r \cos\theta) \in \mathbb{R}^3.$$

$$\phi : (\tau, \phi, \sigma) \in \mathbb{R}_+ \times]0, 2\pi[^2 \mapsto \left(\frac{a \sinh\tau \cos\phi}{\cosh\tau - \cos\sigma}, \frac{a \sin\phi \sinh\tau}{\cosh\tau - \cos\sigma}, \frac{a \sin\sigma}{\cosh\tau - \cos\sigma} \right) \in \mathbb{R}^3.$$

Zadanie 8. Niech $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ będą współrzędnymi na $\mathbb{R}^{2n}$ i niech $\omega := \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$. Obliczyć $\omega \wedge \ldots \wedge \omega$ (n-razy).

Zadanie 9. Niech $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n, z)$ będą współrzędnymi na $\mathbb{R}^{2n+1}$ i niech $\omega := dz + \sum_{i=1}^n x_i dy_i$. Obliczyć

$$\alpha \wedge \overbrace{d\alpha \wedge \ldots \wedge d\alpha}^{n-razy}.$$

Zadanie 10. Zdefinujmy dwu-formę Faradaya jako

$$F = -dt \wedge (E_x dx + E_y dy + E_z dz) - B_x dy \wedge dz - B_y dz \wedge dx - B_z dx \wedge dy.$$

Pokaż, że $dF = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$E = E_x \frac{\partial}{\partial x} + E_y \frac{\partial}{\partial y} + E_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad B = B_x \frac{\partial}{\partial x} + B_y \frac{\partial}{\partial y} + B_z \frac{\partial}{\partial z},$$

spełniają prawo Gaussa i Faradaya–Maxwella.

Gradient, rotacja i dywergencja

Zadanie 11. Podać postać gradientu, rotacji i dywergencji w następujących współrzędnych

Spherical polar coordinates $(r,\theta,\phi)\in[0,\infty)\times[0,\pi]\times[0,2\pi)$	$x=r\sin\theta\cos\phi$ $y=r\sin\theta\sin\phi$ $z=r\cos\theta$	$h_1=1$ $h_2=r$ $h_3=r\sin\theta$
Cylindrical polar coordinates $(r,\phi,z)\in[0,\infty)\times[0,2\pi)\times(-\infty,\infty)$	$x=r\cos\phi$ $y=r\sin\phi$ $z=z$	$h_1=h_3=1$ $h_2=r$
Parabolic cylindrical coordinates $(u,v,z)\in(-\infty,\infty)\times[0,\infty)\times(-\infty,\infty)$	$x=\frac{1}{2}(u^2-v^2)$ $y=uv$ $z=z$	$h_1=h_2=\sqrt{u^2+v^2}$ $h_3=1$
Parabolic coordinates $(u,v,\phi)\in[0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,2\pi)$	$x=uv\cos\phi$ $y=uv\sin\phi$ $z=\frac{1}{2}(u^2-v^2)$	$h_1=h_2=\sqrt{u^2+v^2}$ $h_3=uv$
Paraboloidal coordinates (λ,μ,ν) $\lambda<b^2<\mu<a^2<\nu$	$\frac{x^2}{q_i-a^2}+\frac{y^2}{q_i-b^2}=2z+q_i$ where $(q_1,q_2,q_3)=(\lambda,\mu,\nu)$	$h_i=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(q_j-q_i)(q_k-q_i)}{(a^2-q_i)(b^2-q_i)}}$

Całkowanie form oraz Twierdzenie Stokesa

Zadanie 12. Niech

$$\omega := \left(\sin x - \frac{y^3}{3}\right) dx + \left(\cos y + \frac{x^3}{3}\right) dy + xyzdz$$

i

$$C := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z^2 \geq x^2+y^2, z=1\}$$

Sprawdzić, że

$$\int_{\partial C}\omega = \int_C d\omega.$$

Zadanie 13. Niech

$$\omega := xdx + xdy + 2ydz$$

i

$$\partial C := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 1 = x^2+y^2, z=x\}$$

Sprawdzić, że

$$\int_{\partial C}\omega = \int_C d\omega.$$

dla odpowiednie wybranego C.

Zadanie 14. Niech
$$\omega := -3xz^2 dy \wedge dz + z^3 dx \wedge dy$$
i
$$C := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 4\}$$
Sprawdzić, że
$$\int_{\partial C} \omega = \int_C d\omega.$$

Zadanie 15. Sprawdzić twierdzenie Stokesa dla
$$\omega := x^3 e^y dy \wedge dz - 3x^2 e^y dz \wedge dx, \qquad C := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Zadanie 16. Niech
$$\omega := \left(\sin x - \frac{y^3}{3}\right) dx + \left(\cos y + \frac{x^3}{3}\right) dy + xyzdz,$$
$$C := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 \geq x^2 + y^2, z = 1\}$$
Sprawdzić, że
$$\int_{\partial C} \omega = \int_C d\omega.$$

Zadanie 17. Niech $\omega := xdx + xdy + 2ydz$ oraz $\partial C := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 = x^2 + y^2, z = x\}$. Sprawdzić, że
$$\int_{\partial C} \omega = \int_C d\omega.$$
dla odpowiednie wybranego C.

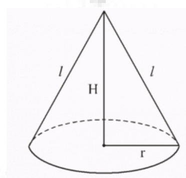
Zadanie 18. Niech
$$\omega := -3xz^2 dy \wedge dz + z^3 dx \wedge dy, \qquad C := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 4\}.$$
Sprawdzić, że
$$\int_{\partial C} \omega = \int_C d\omega.$$

Zadanie 19. Sprawdzić twierdzenie Stokesa dla
$$\omega := x^3 e^y dy \wedge dz - 3x^2 e^y dz \wedge dx, \qquad C := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

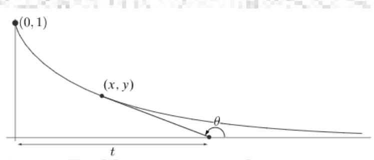
Długość krzywych, pole powierzchni i objęstości brył

Zadanie 20. Oblicz długość kardioidy $r(\varphi) := a(1 - \cos\varphi)$ i pole powierzchni ograniczonej taką krzywą.

Zadanie 21. Oblicz objętość i powierzchnię boczną następującego stożka:



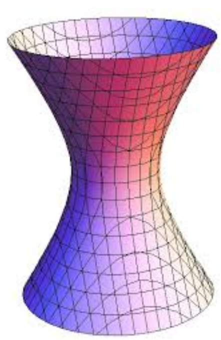
Zadanie 22. Chłopiec spaceruje wdłuż osi OX w kierunku $+X$ z jego psem. Odległość między chłopcem i psem wynosi maksimalnie 1 (długość smyczy). Pies schował kość w punkcie $(0, 1)$ i stara się zostać blisko tego punktu. Trajektoria psa podczas spaceru wygląda następująco



Obliczyć długość *traktrysy*, tj. krzywej opisującej ruch psa spacerującego z właścicielem, jako funkcję θ. We współrzędnach kartesjańskich trajektoria psa ma postać

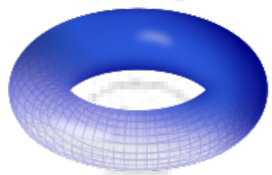
$$(\cos\theta + \ln[\tan(\theta/2)], \sin\theta), \qquad \pi/2 \le \theta \le \pi.$$

Zadanie 23. Oblicz pole powierzchni hiperboloidy jednopowołokowej opisanej równaniem $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ zawartej wewnątrz kuli $x^2 + y^2 + z^2 \le 2$.

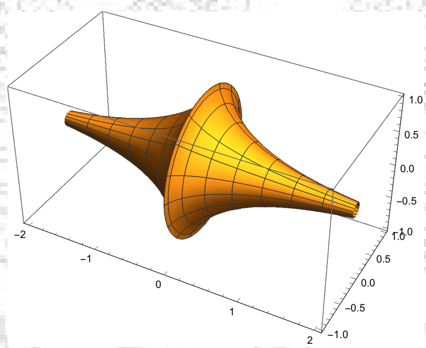


Zadanie 24. Oblicz pole powierzchni oraz objętość torusa, którego powierzchnia jest zadana równaniem

$$(\sqrt{x^2+y^2}-R)^2+z^2=r^2, \qquad R>r>0.$$



Zadanie 25. Oblicz pole powierzchni i objętość pseudosfery, tj. regionu w $\mathbb{R}^3$ postaci



ograniczonego powierzchnią

$$[-\infty,\infty]\times[0,2\pi]\ni(t,\varphi)\mapsto(t-\operatorname{th}t,\cos\varphi\operatorname{sech}t,\sin\varphi\operatorname{sech}t)\in\mathbb{R}^3.$$

Lemat Poincarégo, formy zamknięte i zupełne

Zadanie 26. Pokaż, że jeżeli α i β są formami zamkniętymi, to $\alpha\wedge\beta$ jest zamknięta.

Zadanie 27. Pokaż, że forma $\omega=e^{x^2+y^2}(\sinh(2xy)dx+\cosh(2xy)dy)$ jest zamknięta.

Zadanie 28. Znajdź formę $\Theta\in\Omega^1(\mathcal{O})$ taką, że $d\Theta=\omega$ dla

$$\omega:=\frac{1}{z^3}(xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy)\in\Omega^2(\mathcal{O}),$$

gdzie $\mathcal{O}:=\{(x,y,z):z>0\}$ oraz $\phi:\mathcal{O}\times[0,1]\to\mathcal{O}$ jest dane wzorami

$$(a)\ \phi(x,y,z,t)=(tx,ty,1-t+tz), \qquad (b)\ \phi(t,x,y,z):=(tx,ty,z^t).$$

Zadanie 29. Znajdź formę $\Theta\in\Omega(\mathcal{O})$ taką, że $d\Theta=\omega$ dla

$$\omega:=(3y^2-2z)dy\wedge dz+(1-3x^2)dz\wedge dx+(2x-1)dx\wedge dy, \qquad \omega:=2(x+y+z)dx\wedge dy\wedge dz.$$

$$\omega:=2xydx+(x^2+2y+z)dy+(y-3z^2)dz,$$

$$\omega:=(SV^4+S^3+N)dS+(4V^3S+V^4+V^2+N)dV+(S+V)dN.$$