

# Zadania z Analizy III

## seria 2

1. Niech  $f(z) = (z + i)/(z - i)$ . Znaleźć obraz zbioru  $S$  przy tejże homografii, gdy
  - (a)  $S = \{z \in \mathbb{C} : \Im z \geq 0\}$ ,
  - (b)  $S = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x, y \geq 1\}$ .
2. Znaleźć przeciwobraz zbioru  $S = K(ir, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - ir| \leq r\}$  względem odwzorowania  $f(z) = z/(1 - z)$ .
3. Znaleźć homografię przekształcającą okrąg  $C(2) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$  w siebie, punkt  $z = 4$  w punkt  $w = 0$  oraz okrąg  $C(1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  w linię prostą równoległą do osi urojonej.
4. Sprawdzić, czy podane pary funkcji  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  spełniają równania Cauchy–Riemanna. Jeżeli tak, to znaleźć funkcję holomorficzną  $f(z)$  taką, że  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ .
  - (a)  $u(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$ ,  $v(x, y) = 4x^3y - 4xy^3$ ,
  - (b)  $u(x, y) = \frac{\sin(x) \cos(x)}{(\cos(x))^2 + (\sinh(y))^2}$ ,  $v(x, y) = \frac{\sinh(y) \cosh(y)}{(\cos(x))^2 + (\sinh(y))^2}$ ,
  - (c)  $u(x, y) = e^{-2xy} \cos(x^2 - y^2)$ ,  $v(x, y) = e^{-2xy} \sin(x^2 - y^2)$ ,
  - (d)  $u(x, y) = \cos(x^3 - 3xy^2) \cosh(3x^2y - y^3)$ ,  $v(x, y) = -\sin(x^3 - 3xy^2) \sinh(3x^2y - y^3)$ .
5. Wyprowadzić równania Cauchy–Riemanna w zmiennych biegunowych, to jest dla funkcji  $f(z) = U(r, \theta) + iV(r, \theta)$ , gdzie  $r = |z|$  i  $\theta = \arg z$ . Wyrzucić pochodną  $f'(z)$  za pomocą pochodnych cząstkowych funkcji  $U$  i  $V$ .
6. Rozwinąć funkcję  $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$  w szereg Laurenta wokół  $z = 0$  w obszarach:
  - (a)  $|z| < 1$ ,
  - (b)  $1 < |z| < 2$ ,
  - (c)  $|z| > 2$ .
7. Znaleźć szereg Laurenta funkcji  $f(z) = \frac{z^2}{(z-2)^2(z+2)}$  we wszystkich pierścieniach wokół punktu  $z_0 = 2$ .
8. Obliczyć  $\int_{\gamma} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z-4} dz$ , gdzie  $\gamma$  jest brzegiem koła o środku w 0 i promieniu 1.
9. Obliczyć całkę  $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(t)}{3 + \cos^2(t)} dt$ .
10. Dla  $|a| > 1$  obliczyć całkę  $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta}$ .
11. Wykazać, że dla  $|a| < 1$  zachodzi

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta d\theta}{1 + a^2 - 2a \cos 2\theta} = \pi \frac{1 + a^2 - a}{1 - a}.$$

12. Wykazać, że dla  $|a| < 1$  zachodzi

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + a \cos \theta)^2} = \frac{2\pi}{(\sqrt{1 - a^2})^3}.$$

13. Wykazać, że:

(a)  $\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^3} = \frac{\pi}{16a^3}, \quad (a > 0),$

(b)  $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)^2} = \frac{\pi(a + 2b)}{2ab^3(a + b)^2}, \quad (a, b > 0),$

(c)  $\int_0^\infty \frac{x^6 dx}{(x^4 + a^4)^2} = \frac{3\sqrt{2}\pi}{16a}, \quad (a > 0).$

(d)  $\int_0^\infty \frac{\cos x dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \frac{\pi}{(b^2 - a^2)} \left( \frac{e^{-a}}{a} - \frac{e^{-b}}{b} \right), \quad (a, b > 0).$

14. Dla  $a, b > 0$  obliczyć całkę:  $\int_0^\infty dx \frac{x \ln x}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}.$

15. Dla  $a > 0$  obliczyć całkę:  $\int_0^\infty dx \frac{\ln x}{(x^2 + a^2)^2}.$

16. Obliczyć całkę  $\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx.$

17. Niech  $0 < a < b$ . obliczyć  $\int_a^b \frac{dr}{r} \sqrt{(r - a)(b - r)}.$