Geometria Różniczkowa II

zadania domowe

Zadanie 1 Tożsamości Bianchi wynikają, jak się okazało z naszych rachunków, z tożsamości Jacobiego dla pól wektorowych. Tożsamość ta związana jest z faktem znikania drugiej różniczki. Zadanie polega na wyprowadzeniu tożsamości Bianchi z faktu $\mathsf{d}^2 = 0$. Punkt startowy rozważań powinien być następujący: Według jednego z podejść koneksja w wiązce wektorowej τ definiowana jest poprzez wybór dystrybucji horyzontalnej $\mathcal{H}$. Jak wiadomo, dystrybucję zadać można na przykład przy pomocy układu form różniczkowych znikających na tej dystrybucji. Zamiast układu form można także mówić o jednej formie na E o wartościach w E, tzn liniowym odwzorowaniu $\mathsf{T}E \to E$ zachowującym rzut na M, którego jądrem jest dystrybucja horyzontalna. W różniczce tej formy tkwi informacja o krzywiźnie, a znikanie drugiej różniczki powinno prowadzić do tożsamości Bianchi.

Zadanie 2 Dla $a > b > 0$ definiujemy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ wzorem

$$f(\varphi, \vartheta) = ((a + b\cos\vartheta)\cos\varphi, (a + b\cos\vartheta)\sin\varphi, b\sin\vartheta).$$

Obrazem f jest dwuwymiarowy torus $\mathbb{T}$ w $\mathbb{R}^3$. Na $\mathbb{R}^3$ rozważamy kanoniczny tensor metryczny

$$g = \mathsf{d}x \otimes \mathsf{d}x + \mathsf{d}y \otimes \mathsf{d}y + \mathsf{d}z \otimes \mathsf{d}z$$

(1) Znaleźć $g_{|\mathbb{T}}$, (2) Wyznaczyć symbole Christoffela dla $g_{|\mathbb{T}}$, (3) Znaleźć krzywiznę skalarną (4) Zapisać równania geodezyjnych, (5) Obliczyć $\int_{\mathbb{T}} R\omega$ gdzie R jest krzywizną skalarną a ω formą objętości na $\mathbb{T}$.

Zadanie 3 Niech $D = \{(x, y) : \ 0 < x^2 + y^2 < 1\}$, oraz niech $g = \frac{4}{1-r^2}(\mathsf{d}r \otimes \mathsf{d}r + r^2 \mathsf{d}\varphi \otimes \mathsf{d}\varphi)$ we współrzędnych biegunowych. Na D dana jest koneksja taka, że we współrzędnych (r, φ) mamy: $\Gamma^{\varphi}_{rr} = \Gamma^{\varphi}_{\varphi\varphi} = \Gamma^{r}_{r\varphi} = \Gamma^{r}_{\varphi r} = 0$, $\Gamma^{r}_{rr} = -\Gamma^{r}_{\varphi\varphi} = \frac{r}{1-r^2}$, $\Gamma^{\varphi}_{r\varphi} = \Gamma^{\varphi}_{\varphi r} = \frac{1}{r(1-r^2)}$,

1. Znaleźć torsję tej koneksji;
2. Obliczyć ∇g;
3. Niech γ będzie geodezyjną na dowolnej rozmaitości z koneksją. Sprawdzić, że jeśli $\eta = \gamma \circ \varphi$, gdzie φ jest reparametryzacją, tzn $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ i $\varphi'(t) \neq 0$, to η spełnia równanie

   $$\nabla_{\dot\eta}\dot\eta = f\dot\eta$$

   gdzie f jest funkcją parametru krzywej.