Analiza I R

tydzień pierwszy, 1.10.2012 – 7.10.2012

*Na poniższej liście są zadania planowane. Te, które rzeczywiście rozwiązaliśmy, zaznaczyłam *.*

Zadanie 1. * Wyrazić przez teoriomonogościowe ($\cup$, $\cap$, $\setminus$, dopełnienie zbioru) operacje na zbiorach A, B, C zawartych w X następujące zbiory

$$S := \{x \in X |\ x \in A \Rightarrow x \in B\},$$

$$P := \{x \in X |\ x \in A \Leftrightarrow x \in B\}$$

$$R := \{x \in X |\ x \in A \Rightarrow (x \in B \Leftrightarrow x \in C)\}.$$

Zadanie 2. * Wyznaczyć i narysować zbiory

$$P = \bigcup_{t\in[0,1]} A_t, \quad Q = \bigcap_{t\in[0,1]} A_t \qquad \text{dla} \quad A_t = [t, 2t+1] \times [-t, t+1]$$

Zadanie 3. * Dla dowolnego ciągu zbiorów $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiujemy

$$\limsup A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geqslant n} A_k, \qquad \liminf A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geqslant n} A_k.$$

Wykazać, że

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \liminf A_n \subset \limsup A_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Przekonać się o tym dla ciągu

$$A_n = \left[\frac{(-1)^n n}{1+n}, \ \frac{4n-15}{2n-7}\right].$$

Zadanie 4. Wykazać tożsamości

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \cdots \cup (A_{n-1} \setminus A_n) \cup A_n,$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \cdots \cup (A_{n-1} \setminus A_n) \cup (A_n \setminus A_1) \cup (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$$

Zadanie 5. Zbadać injektywność i surjektywność odwzorowania, opisać jego zbiór wartości i poziomice:

$$* \ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \ \ f(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right),$$

$$* \ g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}, \ \ g(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2},$$

$$h : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \ \ h(k) = 2k^2 - 3k + 1.$$

Zadanie 6. * Odwzorowanie $f : X \to X$ spełnia warunek

$$\forall x \in X \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad f^n(x) = x.$$

Udowodnić, że odwzorowanie f jest bijekcją. Symbol f^n oznacza tu $n-$krotne złożenie odwzorowania f ze sobą, tzn $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{\times n}$

Zadanie 7. Podać przykład bijekcji między zbiorami X i Y jeśli

$$X = [0,1[, \quad Y = [0,1]$$

$$X =]0,1[, \quad Y = [-2,2] \setminus \{-1,2\}$$

$$X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad Y = \mathbb{N}$$