Geometria Różniczkowa II

wykład pierwszy

Dystrybucja gładka na rozmaitości. Niech M będzie rozmaitością gładką. *Dystrybucją* na M nazywamy układ podprzestrzeni wektorowych $\mathcal{D}_x \subset \mathsf{T}_x M$ dla każdego punktu $x \in M$ ustalonego wymiaru $k \leqslant n$. Mówimy, że dystrybucja jest *różniczkowalna* jeśli dla każdego $x \in M$ istnieje otoczenie $\mathcal{O} \subset M$ oraz układ k nieznikających gładkich, liniowo niezależnych pól wektorowych określonych na $\mathcal{O}$ takich, że dla $y \in \mathcal{O}$

$$\mathcal{D}_y = \langle X_1(y), X_2(y), \ldots, X_k(y) \rangle.$$

Dystrybucję różniczkowalną można określić także przy pomocy $n-k$ gładkich, nieznikających i liniowo niezależnych form określonych w otoczeniu $\mathcal{O}$. Dla $y \in \mathcal{O}$

$$\mathcal{D}_y = \{ v \in \mathsf{T}_y M : \ \omega_i(v) = 0, \quad i = 1 \ldots n-k \}.$$

Rozważa się także *dystrybucje uogólnione*, które nie są ustalonego wymiaru.

Wiązka wektorowa. Przypomnimy teraz definicję wiązki wektorowej. *Wiązką wektorową* nazywamy układ

$$(E, M, \tau, V, (\mathcal{O}_\alpha)_{\alpha \in A}, \varphi_\alpha)$$

gdzie E jest rozmaitością wymiaru $m+n$, M jest rozmaitością wymiaru m, $\tau : E \to M$ jest gładką, surjektywną submersją, V jest przestrzenią wektorową wymiaru n. Żądamy ponadto aby $(\mathcal{O}_\alpha)$ było pokryciem rozmaitości M a φ_α dyfeomorfizmem

$$\varphi_\alpha : \ \tau^{-1}(\mathcal{O}_\alpha) \longrightarrow \mathcal{O}_\alpha \times V,$$

takim, że jeśli $\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta \neq \emptyset$ to dla każdego $x \in \mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta$ odwzorowanie

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, \cdot) : V \longrightarrow V$$

jest liniowym izomorfizmem. Na razie mamy do dyspozycji niewiele przykładów wiązek wektorowych. Znamy wiązkę styczną, wiązkę kostyczną, wiązkę trywialną $M \times V \to M$. Wprowadźmy współrzędne na rozmaitości E liniowe we włóknach nad M. Niech $\mathcal{O}$ będzie dziedziną układu współrzędnych (x^i) na M. Wybierzemy układ n lokalnych nieznikających cięć $e_a : \mathcal{O} \to E$ takich, że w każdym punkcie x ich wartości $(e_a(x))$ tworzą bazę przestrzeni wektorowej E_x. Współrzędne liniowe w E_x pochodzące od tej bazy wraz ze współrzędnymi na M tworzą układ współrzędnych (x^i, y^a) określony na zbiorze $\tau^{-1}(\mathcal{O})$.

Pomyślmy przez chwilę nad wiązką styczną do wiązki wektorowej. Jest to oczywiście wiązka wektorowa nad E, $\tau_E : \mathsf{T}E \to E$. Wektor styczny do E zapiszemy jako

$$\dot{x}^i(v) \frac{\partial}{\partial x^i} + \dot{y}^a(v) \frac{\partial}{\partial y^a}.$$

Układ współrzędnych w $\mathsf{T}E$ to zestaw funkcji $(x^i, y^a, \dot{x}^j, \dot{y}^b)$ określonych w obszarze $\tau_E^{-1}(\tau^{-1}(\mathcal{O}))$.

Mamy ponadto drugie rzutowanie $\mathsf{T}\tau : \mathsf{T}E \to \mathsf{T}M$. Jądro tego rzutowania jest dystrybucją wymiaru n składającą się z wektorów stycznych do włókiem wiązki τ. Wektory te nazywamy *pionowymi* ze względu na rzutowanie τ. Dystrybucję pionową oznaczamy $\mathsf{V}E$, a przestrzeń wektorów pionowych zaczepionych w punkcie e – $\mathsf{V}_e E$. Ze względu na to, że włókno wiązki τ jest przestrzenią wektorową, wektory do niego styczne mogą być utożsamione z elementami włókna, $\mathsf{V}_e E \simeq E_{\tau(e)}$, a cała dystrybucja pionowa ma strukturę iloczynu kartezjańskiego $\mathsf{V}E \simeq E \times_M E$. Odwzorowanie $\mathsf{T}\tau$ działa następująco

$$\mathsf{T}\tau\left(\dot{x}^i(v)\frac{\partial}{\partial x^i} + \dot{y}^a(v)\frac{\partial}{\partial y^a}\right) = \dot{x}^i(v)\frac{\partial}{\partial x^i},$$

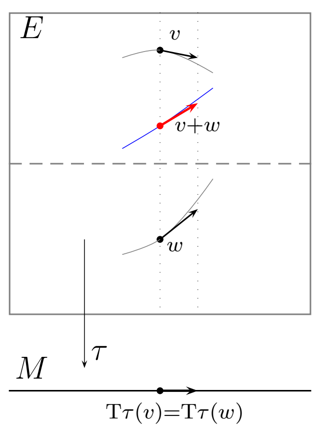
zatem wektor pionowy, to taki, którego współrzędne $\dot{x}^i$ są zerowe.

Struktura iloczynu kartezjańskiego w $\mathsf{V}E \simeq E \times_M E$ umożliwia zdefiniowanie kanonicznego pola wektorowego na E zwanego *polem Eulera*. Wartości tego pola są wektorami pionowymi. Używając utoższamienia wektorów pionowych z elementami włókna napisalibyśmy

$$\nabla_E(e) = e, \quad \text{we współrzędnych zaś} \quad \nabla_E(x^i, y^a) = y^a\frac{\partial}{\partial y^a}.$$

Okazuje się, że pole to ma fundamentalne znaczenie dla struktury wiązki wektorowej. Można powiedzieć, że cała struktura wiązki wektorowej jest w nim zakodowana. Na ten temat powiemy więcej innym razem, gdyby jegnak ktoś musiał wiedzieć natychmiast to polecam pracę *Higher vector bundles and multi-graded symplectic manifolds,* J. Grabowski, M. Rotkiewicz, JGP **59**, (2009), 1285-1305.

Wróćmy teraz do $\mathsf{T}E$. Jako wiązka styczna jest to wiązka wektorowa nad E. Okazuje się jednak, że także $\mathsf{T}\tau$ jest wiązką wektorową. Można dodać do siebie dwa wektory zaczepione w różnych punktach ale mające ten sam rzut styczny. Niezbędny jest obrazek:



Jeśli wektory v i w mają ten sam rzut styczny, to istnieją krzywe γ_v i γ_w reprezentujące te wektory i mające jednakowe rzuty na M, tzn $\tau \circ \gamma_v = \tau \circ \gamma_w$. Dla każdej wartości parametru t punkty $\gamma_v(t)$ i $\gamma_w(t)$ są w tym samym włóknie wiązki τ, można więc je dodać, korzystając z wektorowej struktury włókien, otrzymując nową krzywą

$$t \longmapsto \gamma_v(t) + \gamma_w(t).$$

Wektor styczny do tej nowej krzywej jest sumą wektorów stycznych do E względem drugiej struktury wiązki wektorowej. To „drugie dodawanie” oznaczać będziemy $\dot{+}$. Obejrzyjmy oba dodawania we współrzędnych. W $\mathsf{T}E$ mamy współrzędne pochodzące od współrzędnych w E: $(x^i, y^a, \dot{x}^j, \dot{y}^b)$, czyli wektor styczny napisać możemy jako

$$v = \dot{x}^i(v)\frac{\partial}{\partial x^i} + \dot{y}^a(v)\frac{\partial}{\partial y^a}$$

podobnie

$$w = \dot{x}^i(w)\frac{\partial}{\partial x^i} + \dot{y}^a(w)\frac{\partial}{\partial y^a}.$$

Jeśli v i w zaczepione są w tym samym punkcie to możemy znaleźć $v + w$ w zwykłym sensie, co można napisać

$$v + w = (\dot{x}^i(v) + \dot{x}^i(w))\frac{\partial}{\partial x^i} + (\dot{y}^a(v) + \dot{y}^a(w))\frac{\partial}{\partial y^a}.$$

Jeśli zaś v i w zaczepione są w różnych punktach tego samego włókna E_q i mają ten sam rzut na $\mathsf{T}_q M$, czyli $\dot{x}^i(v) = \dot{x}^i(w)$, to można je dodać w drugim sensie otrzymując wektor

$$v \dot{+} w = (\dot{x}^i(v))\frac{\partial}{\partial x^i} + (\dot{y}^a(v) + \dot{y}^a(w))\frac{\partial}{\partial y^a}$$

zaczepiony w punkcie włókna E_x będącego sumą punktów zaczepienia wektorów v i w, czyli

$$y^a(v \dot{+} w) = y^a(v) + y^a(w).$$

Dodawanie zwykłe odbywa się w trzeciej i czwartej współrzędnej, podczas gdy pierwsza i druga muszą być równe:

$$(x^i,\, y^a,\, \dot{x}^i,\, \dot{y}^a),$$

dodawanie w drugim sensie odbywa się w drugiej i czwartej współrzędnej, podczas kiedy pierwsza i trzecia muszą być równe:

$$(x^i,\, y^a,\, \dot{x}^i,\, \dot{y}^a).$$

Koneksja w wiązce wektorowej *Koneksją* w wiązce wektorowej τ nazywamy dystrybucję różniczkowalną $\mathcal{H}$ wymiaru m na E taką, że w każdym punkcie podprzestrzeń $\mathcal{H}_e$ jest dopełniająca do podprzestrzeni $\mathsf{V}_e E$, tzn

$$\mathsf{T}_e E = \mathsf{V}_e E \oplus \mathcal{H}_e. \tag{1}$$

Dystrybucję $\mathcal{H}$ nazywamy także *dystrybucją horyzontalną*. Koneksję w wiązce τ można reprezentować na różne sposoby. Zamiast mówić o dystrybucji horyzontalnej można podać odwzorowanie przyporządkowujące wektorowi część pionową i poziomą w rozkładzie względem sumy prostej (1)

$$\mathsf{T}E \longrightarrow \mathsf{V}E \times_E \mathcal{H}. \tag{2}$$

Korzystając ze struktury iloczynu kartezjańskiego w $\mathsf{V}E$ oraz z faktu, że $\mathcal{H}_e$ jat dla każdego e izomorficzna (odwzorowanie $\mathsf{T}\tau$ obcięte do $\mathcal{H}_e$) z $\mathsf{T}_{\tau(e)}M$ zapiszemy odwzorowanie

$$\Gamma : \mathsf{T}E \longrightarrow E \times_M E \times_M \mathsf{T}M, \quad \Gamma(v) = (\tau_e(v), v^{\mathsf{v}}, \mathsf{T}\tau(v))\,. \tag{3}$$

Środkowy składnik to część pionowa wektora v w rozkładzie danym przez (1). Możemy więc inaczej powiedzieć, że koneksja to odwzorowanie $\Gamma : \mathsf{T}E \longrightarrow E \times_M E \times_M \mathsf{T}M$ mające następujące własności (a) Γ jest liniowym izomorfizmem wiązek τ_E i pr_1 nad identycznością w E, co w szczególności oznacza, że $pr_1 \circ \Gamma = \tau_E$ (b) $pr_3 \circ \Gamma = \mathsf{T}\tau$, (c) Γ jest identycznością na wektorach pionowych. Zapiszmy Γ we współrzędnych:

$$\Gamma(x^i, y^a, \dot{x}^j, \dot{y}^b) = (A^i(x, y, \dot{x}, \dot{y}), B^a(x, y, \dot{x}, \dot{y}), C^b(x, y, \dot{x}, \dot{y}), D^j(x, y, \dot{x}, \dot{y})).$$

Z warunku (a) wynika, że $A^i(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = x^i$, $B^a(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = y^a$ natomiast

$$C^b(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = C^b_j(x, y)\dot{x}^j + C^b_a(x, y)\dot{y}^a.$$

Warunek (c) daje $D^j(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \dot{x}^j$. Z warunku (b) wynika dodatkowo, że $C^b_a(x, y) = \delta^b_a$. Odwzorowanie Γ przyjmuje więc postać

$$\Gamma(x^i, y^a, \dot{x}^j, \dot{y}^b) = (x^i,\ y^a,\ C^b_j(x, y)\dot{x}^j + \dot{y}^b,\ \dot{x}^j). \tag{4}$$

Mówimy, że koneksja jest *liniowa* jeśli spełniony jest dodatkowy warunek mówiący, że Γ jest liniowym izomorfizmem wiązek wektorowych $\mathsf{T}\tau$ i pr_3. Mówimy, że jest to warunek zgodności koneksji ze strukturą wiązki wektorowej τ. We współrzędnych oznacza to, że funkcje C^b_j są liniowe ze względu na y^a, tzn są postaci $C^b_j(x, y) = C^b_{ja}(x)y^a$. Z powodów historycznych funkcje C^b_{ja} oznacza się raczej Γ^b_{ja} i nazywa *symbolami Christoffela.* Są to funkcje całkowicie charakteryzujące koneksję liniową Γ.

$$\Gamma(x^i, y^a, \dot{x}^j, \dot{y}^b) = (x^i,\ y^a,\ \Gamma^b_{ja}(x)\dot{x}^j y^a + \dot{y}^b,\ \dot{x}^j). \tag{5}$$

Wspomnieliśmy wcześniej, że struktura wiązki wektorowej τ zakodowana jest w polu Eulera ∇_E. Jeśli jest to prawda powinniśmy być w stanie wyrazić warunek liniowości koneksji za pomocą tego pola. Okazuje się, że jest to możliwe. Potok pola ∇_E zapisać można wzorem

$$\varphi^E_t(e) = \exp(t)e,$$

tzn. wyraża się o przez mnożenie wektorów przez liczby. Warunek liniowości koneksji można zapisać także jako *Koneksja* Γ *jest liniowa, jeśli odpowiadająca jej dystrybucja horyzontalna jest zachowywana przez potok pola Eulera.* Warunkiem koniecznym więc jest aby pochodna Liego lokalnych pól horyzontalnych rozpinających tę dystrybucję znikała. Wiadomo ponadto, że dystrybucja horyzontalna na cięciu zerowym wiązki τ jest równa przestrzeni wektorów stycznych do cięcia zerowego. Ten warunek wynika z badania granicy $\lim_{t\to-\infty} \mathsf{T}\varphi_t(v)$ dla wektorów $v \in \mathcal{H}$. Pora na zadanie domowe:

Zadanie 1 Korzystając z rachunku na współrzędnych sprawdzić, że koneksja w wiązce τ postaci (4) jest liniowa (tzn. jest postaci (5)) jeśli

odpowiadająca jej dystrybucja horyzontalna jest zachowywana przez potok pola Eulera. Użyć warunku

$$\mathcal{L}_{\nabla_E} X = 0, \quad \text{jeśli } X \text{ jest polem horyzontalnym}$$

oraz zbadać

$$\lim_{t\to-\infty} \mathsf{T}\varphi_t(v) \quad \text{dla} \quad v \in \mathcal{H}.$$

$\diamondsuit$

Pochodna kowariantna. W wiązce wektorowej $\tau : E \to M$ z powiązaniem liniowym Γ zdefiniowana jest pochodna kowariantna cięć wiązki τ. Niech $\sigma : M \to E$ będzie cięciem τ. Dla $v \in \mathsf{T}_q M$ definiujemy

$$(\nabla_v \sigma)(q) = pr_2(\Gamma(\mathsf{T}\sigma(v)))$$

Wzór wygląda być może sposób skomplikowany, ale procedurę wyznaczania wartości pochodnej cięcia w punkcie q w kierunku wektora v wypowiedzieć można prosto: wektor v podnosimy do wektora stycznego do E w punkcie $\sigma(q)$ przy pomocy odwzorowania $\mathsf{T}\sigma$ a następnie bierzemy jego część pionową względem powiązania. Część pionowa jako styczna do włókna może być utożsamiona z elementem włókna, tzn wartość pochodnej kowariantnej cięcia w punkcie q jest elementem E_q. Mając pole wektorowe X na M możemy obliczyć pochodną cięcia σ w każdym punkcie otrzymując nowe cięcie

$$\nabla_X \sigma : M \to E.$$

Policzmy pochodną kowariantną używając współrzędnych. Niech σ będzie dane przez funkcje σ^a, tzn

$$\begin{aligned}
\sigma(q) &= \sigma^a(q) e_a \\
v &= \dot{x}^i(v) \frac{\partial}{\partial x^i} \\
\mathsf{T}\sigma(v) &= \dot{x}^i(v) \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial \sigma^a}{\partial x^k} \dot{x}^k(v) \frac{\partial}{\partial y^a}
\end{aligned}$$

i w końcu

$$(\nabla_v \sigma)(q) = \left(\frac{\partial \sigma^a}{\partial x^k} \dot{x}^k(v) + \Gamma^a_{kb} \sigma^b(q) \dot{x}^k(v) \right) e_a$$

Oto podstawowe własności pochodnej kowariantnej:

Fakt 1 **(1)** *Pochodna kowariantna jest liniowa ze względu na v, tzn.*

$$\nabla_{\lambda v} \sigma = \lambda \nabla_v \sigma, \qquad \nabla_{v+v'} \sigma = \nabla_v \sigma + \nabla_{v'} \sigma; \tag{6}$$

(2) *Pochodna kowariantna jest różniczkowaniem, tzn, jeśli f jest funkcją na M a σ cięciem, to*

$$\nabla_v (f\sigma) = f \nabla_v \sigma + (vf)\sigma. \tag{7}$$

Działanie pochodnej kowariantnej na funkcjach zadać możemy wzorem

$$\nabla_v f = vf \tag{8}$$

i wtedy wzór (7) przyjmuje postać

$$\nabla_v (f\sigma) = f \nabla_v \sigma + (\nabla_v f)\sigma.$$

Dowód: Wzory (6) wynikają wprost z definicji pochodnej kowariantnej:

$$\nabla_{v+v'} \sigma = pr_2(\Gamma(\mathsf{T}\sigma(v+v')) =$$

odwzorowanie styczne jest odwzorowaniem liniowym, więc

$$= pr_2(\Gamma(\mathsf{T}\sigma(v) + \mathsf{T}\sigma(v')) =$$

Γ też jest odwzorowaniem liniowym (używamy tu zwykłej liniowości nad E)

$$= pr_2(\Gamma(\mathsf{T}\sigma(v)) + \Gamma(\mathsf{T}\sigma(v')) = pr_2(\Gamma(\mathsf{T}\sigma(v))) + pr_2(\Gamma(\mathsf{T}\sigma(v')) = \nabla_v \sigma + \nabla_{v'} \sigma.$$

Wzoru dotyczącego pochodnej względem λv dowodzimy podobnie. We wzorze (7) podnosimy wektor do cięcia σ pomnożonego przez funkcję f. Potrzebujemy więc informacji na temat odwzorowania $\mathsf{T}(f\sigma)$:

$$\mathsf{T}(f\sigma)(v) = f(q)\mathsf{T}\sigma(v) + (vf)(q)\sigma(q)^{\mathsf{vert}}$$

gdzie $\sigma(q)^{\mathsf{vert}}$ jest pionowym podniesieniem elementu $\sigma(q)$ do wektora stycznego do włókna E_q w punkcie $\sigma(q)$. Ogólniej, jeśli $e \in E_q$ to e^{vert} jest wektorem stycznym do krzywej $t \mapsto e + te$. Jeszcze inaczej można powiedzieć, że e^{vert} jest wartością pola Eulera punkcie e. Teraz możemy policzyć $\nabla_v(f\sigma)$

$$\begin{aligned}\nabla_v(f\sigma) &= pr_2(\Gamma(\mathsf{T}(f\sigma)(v))) \\ &= pr_2(\Gamma(f(q)\mathsf{T}\sigma(v) + (vf)(q)\sigma(q)^{\mathsf{vert}})) \\ &= f(q)pr_2(\Gamma(\mathsf{T}\sigma(v)) + (vf)(q)pr_2(\Gamma(\sigma(q)^{\mathsf{vert}}))\end{aligned}$$

Γ na wektorach pionowych jest identycznością, więc

$$= f(q)pr_2(\Gamma(\mathsf{T}\sigma(v)) + (vf)(q)\sigma(q) = f(q)\nabla_\sigma + (vf)(q)\sigma(q)$$

Jeśli założymy, że pochodna kowariantna spełnia regułę Leibniza, możemy rozszerzyć ją na cięcia dowolnych wiązek tensorowych związanych z E. W szczególności na cięcia wiązki dualnej $E^* \to M$. Wzór na pochodną kowariantną cięcia α wiązki dualnej wyprowadzimy używając współrzędnych. Niech

$$\sigma = \sigma^a e_a, \qquad \alpha = \alpha_a \epsilon^a, \qquad v = \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

gdzie ϵ^a to cięcia wiązki $E^* \to M$ tworzące w każdym punkcie bazę dualną do (e_a). Ewaluacja cięcia α na cięciu σ jest funkcją na M

$$\langle \alpha, \sigma \rangle = \alpha_a \sigma^a,$$

Zgodnie z zasadami powinno więc być:

$$v\langle \alpha, \sigma \rangle = \langle \nabla_v \alpha, \sigma(q) \rangle + \langle \alpha(q), \nabla_v \sigma \rangle.$$

Liczymy używając współrzędnych

$$v\langle \alpha, \sigma \rangle = \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i}(\alpha_a \sigma^a) = \dot{x}^i \left(\frac{\partial \alpha_a}{\partial x^i}\sigma^a\right) + \dot{x}^i \left(\alpha_a \frac{\partial \sigma^a}{\partial x^i}\right) \tag{9}$$

$$\langle \nabla_v \alpha, \sigma(q) \rangle = (\nabla_v \alpha)_b \, \sigma^b \tag{10}$$

$$\langle \alpha(q), \nabla_v \sigma \rangle = \alpha_a \left(\frac{\partial \sigma^b}{\partial x^i}\dot{x}^i + \Gamma^b_{kc}\sigma^c \dot{x}^k\right) \tag{11}$$

Dodajemy (10) do (11) i porównujemy z (9)

$$\dot{x}^i \left(\frac{\partial \alpha_b}{\partial x^i}\sigma^b\right) + \dot{x}^i \left(\alpha_b \frac{\partial \sigma^b}{\partial x^i}\right) = (\nabla_v \alpha)_b \, \sigma^b + \alpha_b \left(\frac{\partial \sigma^b}{\partial x^i}\dot{x}^i + \Gamma^b_{kc}\sigma^c \dot{x}^k\right),$$

wyznaczamy szukaną wielkość

$$(\nabla_v \alpha)_b \, \sigma^b = \dot{x}^i \left(\frac{\partial \alpha_b}{\partial x^i}\sigma^b\right) - \Gamma^b_{kc}\sigma^c \dot{x}^k \alpha_b$$

i korzystamy z dowolności σ

$$(\nabla_v \alpha)_b = \frac{\partial \alpha_b}{\partial x^i} \dot{x}^i - \Gamma^a_{kb} \dot{x}^k \alpha_a$$

Co i z czym powiązanie wiąże? Badanie tego, jak zmienia się pole tensorowe od punktu do punktu na rozmaitiości bez żadnej dodatkowej struktury, napotyka na problemy z porównywaniem wartości tych pól w różnych punktach. Włókno ustalonej wiązki tensorowej nad punktem $x \in M$ jest oczywiście izomorficzne z tym nad punktem y, ale żaden z mnóstwa izomorfizmów nie jest wyróżniony. Koneksja umożliwia różniczkowanie, co oznacza, że pozwala jakoś porównywać wartości pola w różnych (przynajmniej wystarczająco bliskich) punktach. Koneksja nie wyróżnia jednak zazwyczaj żadnego izomorfizmu między włóknami, tzn nie powoduje, że wiązka staje się trywialna. Zastanówmy się co z czym i w jaki sposób jest związane w wiązce wektorowej wyposażonej w koneksję liniową. Niech $\gamma : I \to M$ będzie krzywą gładką w rozmaitości M. I oznacza odcinek otwarty zawierający $[t_0, t_1]$. Oznaczmy także $x_0 = \gamma(t_0)$ i $x_1 = \gamma(t_1)$. Koneksja pozwala podnosić horyzontalnie wektory styczne do M do wektorów stycznych do E. Wektory styczne do krzywej γ w każdym punkcie tej krzywej można podnieść horyzontalnie do punktów rozmaitości E we włóknach nad obrazem γ. W ten sposób dostajemy coś w rodzaju pola wektorowego na E. Coś w rodzaju jedynie, ponieważ pole to określone jest jedynie na zbiorze $\tau^{-1}(\gamma(I))$. Posłużmy się współrzędnymi (x^i, y^a) w E. Krzywa γ dana jest poprzez m funkcji

$$t \longmapsto (x^i(t)).$$

Wektor styczny do tej krzywej zaczepiony w punkcie odpowiadającym wartości parametru t może być zapisany jako

$$\dot{x}^i(t) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

a jego podniesienie horyzontalne do punktu o współrzędnych $(x^i(t), y^a)$ to wektor

$$\dot{x}^i(t) \frac{\partial}{\partial x_i} - \Gamma^b_{ja}(x(t)) \dot{x}^j(t) y^a \frac{\partial}{\partial y^b}.$$

Jak wyglądają krzywe w rozmaitości E leżące nad krzywą Γ i takie, że podniesione wektory są do nich styczne? Trzeba rozwiązać układ równań różniczkowych zwyczajnych. Krzywa w E opisana jest przez układ funkcji

$$t \longmapsto (x^i(t), y^a(t)),$$

gdzie $x^i(t)$ są dane, bo pochodzą od krzywej γ. Układ równań na funkcje $t \mapsto y^a(t)$ przyjmuje postać

$$\dot{y}^b = -\Gamma^b_{ja}(x(t)) \dot{x}^j(t) y^a. \tag{12}$$

Jest to układ równań liniowych ze współczynnikami zależnymi od czasu. Fakt, że równania są liniowe gwarantowany jest przez liniowość koneksji – liniowa jest zależność prawej strony od y^a. Nawet jeśli nie zawsze potrafimy taki układ równań szybko rozwiązać, to z całą pewnością dużo wiemy o własnościach rozwiązań. Rozwiązanie równania (12) z warunkiem początkowym y^a_0 w $t = t_0$ nazywamy *podniesieniem horyzontalnym* krzywej γ do punktu $e_0 = (x^i_0, y^a_0)$. Rozwiązanie zależy w sposób liniowy od warunków początkowych, zatem przyporządkowanie elementom włókna nad x_0 wartości stosownego rozwiązania w $t = t_1$ we włóknie nad x_1 jest odwzorowaniem liniowym. Odwzorowanie to oczywiście zależy od bazowej krzywej γ. Przy pomocy podniesień horyzontalnych potrafimy więc powiązać ze sobą włókna w różnych punktach, jednak w sposób zależny od krzywej po której poruszamy się na bazie. Naturalne jest w tym przypadku postawienie następującego pytania: Czy jeśli krzywa bazowa jest zamknięta, to jej podniesienie horyzontalne także będzie zamknięte? Na ten temat (między innymi) porozmawiamy za tydzień.