



## Analiza I R

tydzień drugi, 8.10.2012 – 14.10.2012

**Zadanie 1.** Znaleźć najmniejszą relację równoważności w  $\{a, b, c, d\}$  zawierającą  $(a, c)$  oraz  $(a, d)$ .

**Zadanie 2.** W  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  wprowadzamy relację

$$(n, m) \sim (m', n') \iff m + n' = m' + n.$$

Sprawdzić, że jest to relacja równoważności. W przestrzeni  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim$  klas abstrakcji wprowadzić działania dodawania i mnożenia tak, aby zbiór ten był izomorficzny z  $\mathbb{Z}$ .

**Zadanie 3.** Podobnie skonstruować można  $\mathbb{Q}$ , wprowadzając stosowną relację w  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ . Zdefiniować tę relację.

**Zadanie 4.** W zbiorze  $\mathbb{Q}$  definiujemy relację

$$R = \{(x, y) : \exists n \in \mathbb{N} \quad 10^n(x - y) \in \mathbb{Z}\}.$$

Sprawdzić, że jest to relacja równoważności. Opisać klasy równoważności.

**Zadanie 5.** Zbadać ograniczoność i ewentualnie wyznaczyć kresy zbiorów

$$X = \left\{ \frac{m}{(n+m)n}, \quad m, n \in \mathbb{N} \right\}, \quad Y = \{ \sqrt{n} - E(\sqrt{n-1}), \quad n \in \mathbb{N} \},$$

gdzie  $E(x)$  oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od  $x$ .

**Zadanie 6.** Ilustracja do twierdzenia Cantora-Bernsteina-Schroedera: Niech

$$X = Y = \{(x_n)_{n=0}^{\infty}, \quad x_i \in \{0, 1\}\}.$$

Niech także

$$\varphi : X \rightarrow Y, \quad \phi(x_n) = (0, x_1, x_2, \dots).$$

Przyjmując  $\psi = \varphi$  skonstruować bijekcję jak w dowodzie twierdzenia CBS.

**Zadanie 7.** Udowodnić nierówność Bernoulliego

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \geq -1 \quad (1+x)^n \geq 1+nx.$$

**Zadanie 8.** Dla  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$  definiujemy

$$A(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n},$$

$$G(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n},$$

$$H(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}.$$

Udowodnić nierówności

$$A(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq G(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq H(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

**Zadanie 9.** Wykazać, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

**Zadanie 10.** Funkcję  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  nazywamy wypukłą na  $I$ , jeśli dla dowolnych  $a, b \in I$  oraz  $q \in [0, 1]$  zachodzi  $f(qa + (1 - q)b) \leq qf(a) + (1 - q)f(b)$ . Udowodnić, że jeśli  $f$  jest wypukła, to dla  $a_1, a_2, \dots, a_n \in I$  oraz  $q_1, q_2, \dots, q_n \in [0, 1]$  takich, że  $q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1$  zachodzi nierówność (Jensena)

$$f(q_1 a_1 + q_2 a_2 + \dots + q_n a_n) \leq q_1 f(a_1) + q_2 f(a_2) + \dots + q_n f(a_n).$$