Geometria Różniczkowa II

wykład drugi

Krzywizna koneksji. W trakcie poprzedniego wykładu pojawiło się pytanie czy krzywa zamknięta w rozmaitości bazowej M będzie nadal zamknięta po podniesieniu horyzontalnym do wiązki E. Spróbujemy teraz zastanowić się nad tym problemem. Będziemy używać krzywych, które kawałkami są krzywymi całkowymi pól wektorowych. Niech więc X i Y będą polami wektorowymi na rozmaitości M, niech także φ_t i ψ_t oznaczają potoki tych pól. W poprzednim semestrze ustatliliśmy, że przeszkodą do tego, aby krzywa składająca się z czterech odcinków: wzdłuż pola X od q_0 do $q_1 = \varphi_t(q_0)$, dalej wzdłuż pola Y od q_1 do $q_2 = \psi_t(q_1)$ a potem znowu wzdłuż X o $-t$ i wzdłuż Y o $-t$ była zamknięta jest nieznikający komutator pól $[X, Y]$. Myśląc więc o problemie horyzontalnego podnoszenia zamkniętych krzywych do wiązki E warto przyjrzeć się komutatorowi podniesień horyzontalnych pól wektorowych. Załóżmy, że X i Y komutują i sprawdźmy, jak wygląda $[X^h, Y^h]$. Pracować będziemy we współrzędnych

$$\begin{aligned} &X = X^i(x)\partial_i, \qquad X^h = X^i(x)\partial_i - \Gamma^a_{jb}(x)X^j y^b \partial_a \\ &Y = Y^i(x)\partial_i, \qquad Y^h = Y^i(x)\partial_i - \Gamma^a_{jb}(x)Y^j y^b \partial_a \\ &[X, Y] = \Big(X^i(\partial_i Y^j) - Y^i(\partial_i X^j)\Big)\,\partial_j = 0 \end{aligned}$$

Liczymy więc

$$\begin{aligned} [X^h, Y^h] = {} & [X^i(x)\partial_i - \Gamma^a_{jb}(x)X^j y^b\partial_a, Y^i(x)\partial_i - \Gamma^a_{jb}(x)Y^j y^b\partial_a] = \\ & X^i(\partial_i Y^j)\partial_j - X^i(\partial_i\Gamma^a_{jb}y^bY^j\partial_a - X^i\Gamma^a_{jb}(\partial_iY^j)y^b\partial_a + \Gamma^a_{jb}(x)X^jy^b\Gamma^c_{ia}Y^i\partial_c - \\ & \Big\{Y^i(\partial_iX^j)\partial_j - Y^i(\partial_i\Gamma^a_{jb}y^bX^j\partial_a - Y^i\Gamma^a_{jb}(\partial_iX^j)y^b\partial_a + \Gamma^a_{jb}(x)Y^jy^b\Gamma^c_{ia}X^i\partial_c\Big\} = \end{aligned}$$

Fragmenty jednokolorowe upraszczają się ze względu na znikanie komutatora $[X, Y]$, reszta przyjmuje postać

$$= -X^i(\partial_i\Gamma^a_{jb}y^bY^j\partial_a + \Gamma^a_{jb}(x)X^jy^b\Gamma^c_{ia}Y^i\partial_c - Y^i(\partial_i\Gamma^a_{jb}y^bX^j\partial_a - \Gamma^a_{jb}(x)Y^jy^b\Gamma^c_{ia}X^i\partial_c =$$

Porządkujemy indeksy otrzymując wyrażenie

$$= \Big[\partial_j\Gamma^c_{ib} - \partial_i\Gamma^c_{jb} + \Gamma^a_{ib}\Gamma^c_{ja} - \Gamma^a_{jb}\Gamma^c_{ia}\Big]\, X^iY^jy^b\partial_c \tag{1}$$

Wyrażenie w nawiasie kwadratowym nie jest automatycznie równe zero. Mamy więc nietrywialny warunek zerowania się nawiasu horyzontalnych podniesień komutujących pól. Jeśli wyjściowe pola X i Y nie komutują, sprawdzanie warunku $[X^h, Y^h] = 0$ nie ma sensu. Zauważmy jednak, że $[X^h, Y^h]$ rzutuje się zawsze na $[X, Y]$, oraz, że kolorowe wyrazy, które znikły w powyższym rachunku układają się w $[X, Y]^h$. Warto więc badać różnicę

$$[X^h, Y^h] - [X, Y]^h.$$

We współrzędnych jest ona dokładnie równa (1). Ponadto zauważmy, że wartość tej różnicy jest w każdym punkcie wektorem pionowym, który, jak zawsze w wiązce wektorowej, może być utożsamiony z elementem włókna. Zapiszmy więc odwzorowanie R, które dwóm polom wektorowym X i Y oraz cięciu σ wiązki τ przyporządkowuje cięcie wiązki τ według wzoru

$$(R(X, Y, \sigma)(q))^{\mathsf{v}} = [X^h, Y^h](\sigma(q)) - [X, Y]^h(\sigma(q)).$$

Podniesienie ${}^{\mathsf{v}}$ oznacza podniesienie pionowe do punktu $\sigma(q)$. Z własności koneksji wynika, że R zależy w sposób liniowy od $\sigma(q)$. Wyrażenie na współrzędnych wskazuje także, że R zależy jedynie od wartości pól X, Y oraz od wartości cięcia σ w punkcie q, a nie od ich pochodnych. Można to także sprawdzić następującym rachunkiem: Dla funkcji $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ mamy

$$(fX)^h = (\tau^* f)X^h,$$

oraz

$$Y^h(\tau^* f)(e) = Y(f)(\tau(e)).$$

Liczymy więc

$$\begin{aligned} R(fX, Y, \sigma)(q) &= [(\tau^* f)X^h, Y^h](\sigma(q)) - [fX, Y]^h(\sigma(q)) = \\ &\tau^* f(\sigma(q))[X^h, Y^h](\sigma(q)) - Y^h(\tau^* f)(\sigma(q))X^h(\sigma(q)) - (f[X,Y] - Y(f)X)^h(\sigma(q)) = \\ &f(q)[X^h, Y^h](\sigma(q)) - Y(f)(q)X^h(\sigma(q)) - f(q)[X,Y]^h + Y(f)(q)X^h(\sigma(q)) = \\ &f(q)\left([X^h, Y^h](\sigma(q)) - [X,Y]^h(\sigma(q))\right). \end{aligned}$$

Ostatecznie R okazuje się być wieloliniowym odwzorowaniem

$$R : \mathsf{T}M \times_M \mathsf{T}M \times_M E \to E,$$

które może być reprezentowane tensorem (oznaczanym tą samą literą)

$$R \in Sec(\mathsf{T}^*M \otimes_M \mathsf{T}^*M \otimes_M E^* \otimes_M E)$$

Z definicji wynika, że tensor R jest antysymetryczny ze względu na zamianę X i Y. We współrzędnych R zapisujemy

$$R(X, Y, \sigma) = R^a_{bij}\sigma^b X^i Y^j$$

gdzie

$$R^a_{bij} = \partial_j \Gamma^a_{ib} - \partial_i \Gamma^a_{jb} + \Gamma^c_{ib}\Gamma^a_{jc} - \Gamma^c_{jb}\Gamma^a_{ic}.$$

Warunek antysymetrii oznacza, że

$$R^a_{bij} = -R^a_{bji}.$$

Różnica dwóch koneksji jest tensorem. Często mówi się, że „koneksja nie jest tensorem, ale różnica dwóch koneksji jest", mając na myśli, że współczynniki koneksji, jakkolwiek są funkcjami na rozmaitości M, to nie są współczynnikami tensora, bo inaczej się transformują. Z naszej definicji koneksji widać skąd się te funkcje biorą i że nie ma powodu, aby były współczynnikami tensora. Jednak kiedy mamy dwie koneksje Γ i $\tilde{\Gamma}$ możemy porównać części pionowe tego samego wektora z $\mathsf{T}E$ względem obu koneksji. Jeśli v ma współrzędne $(x^i(v), y^a(v), \dot{x}^j(v), \dot{y}^b(v))$ to częsci pionowe mają postać

$$(\dot{y}^a(v) + \Gamma^a_{ib}\dot{x}^i(v)y^b(v))\partial_a, \quad \text{i} \quad (\dot{y}^a(v) + \tilde{\Gamma}^a_{ib}\dot{x}^i(v)y^b(v))\partial_a$$

i ich różnica

$$(\Gamma^a_{ib}\dot{x}^i(v)y^b(v) - \tilde{\Gamma}^a_{ib}\dot{x}^i(v)y^b(v))\partial_a$$

zależy jedynie od punktu zaczepienia wektora v (i.e. od $x^i(v)$ i $y^b(v)$) oraz od tego jaki jest rzut tego wektora na bazę $\dot{x}^i(v)$. Zależność od punktu zaczepienia i od rzutu jest liniowa. Wartości tej różnicy leżą w $\mathsf{V}E$, jednak wektory pionowe jak zwykle utożsamiany z elementami włókna. W tej sytuacji różnica koneksji może być wyrażona przez dwuliniowe odwzorowanie

$$E \times_M \mathsf{T}M \to E$$

zachowujące rzut na M, czyli cięcie wiązki tensorowej $E^* \otimes_M \mathsf{T}^*M \otimes_M E \to M$.

Koneksja w wiązce stycznej. Niech teraz $E = \mathsf{T}M$. Koneksja jest więc odwzorowaniem

$$\Gamma : \mathsf{TT}M \longrightarrow \mathsf{T}M \times_M \mathsf{T}M \times_M \mathsf{T}M$$

We współrzędnych

$$(x^i, \delta x^j, \dot{x}^j, \delta\dot{x}^l) \longmapsto \Big((x^i, \delta x^j), (x^i, \delta\dot{x}^i + \Gamma^i_{jk}\delta x^j \dot{x}^k), (x^i, \dot{x}^j)\Big)\,.$$

Poćwiczmy używanie koneksji na czymś konkretnym: W kontekście wiązki stycznej podniesienie horyzontalne nazywa się raczej przesunięciem równoległym wektora. Równanie różniczkowe, które ma spełniać krzywa podniesiona jest równaniem liniowym na krzywą w $\mathsf{T}M$. Dane wyjściowe to krzywa γ w rozmaitości M oraz punkt we włóknie wiązki (tu – wiązki stycznej) w którym podniesiona krzywa ma się zaczynać. Możemy więc rozumieć problem podniesienia horyzontalnego w następujący sposób: poszukujemy sposobu przesuwania wektora stycznego zaczepionego w punkcie początkowym krzywej w M wzdłuż tej krzywej. Rozwiążmy konkretny problem: niech $M = \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, 0)$, $v = \partial_2$, a koneksja ma trzy niezerowe współczynniki $\Gamma^1_{11} = x^1$, $\Gamma^2_{22} = 2x^2$, $\Gamma^1_{12} = 1$. Zadanie polega na znalezieniu przesunięcia równoległego wektora v wzdłuż Γ. *Rachunki wpiszę do notatek kiedy indziej...*

Geodezyjna. Dla koneksji w wiązce stycznej możemy wprowadzić pojęcie geodezyjnej: geodezyjna jest to krzywa, której wektory styczne są autorównoległe, tzn są równe swoim przesunięciom równoległym wzdłuż krzywej. Zapiszmy we współrzędnych warunek na bycie geodezyjną. Jeśli $\gamma(t) = (x^i(t))$ jej podniesienie horyzontalne $\gamma^h(t) = (x^i(t), \delta x^j(t))$ spełniać powinno równanie

$$\dot{\delta} x^i = -\Gamma^i_{jk}\dot{x}^j \delta x^k$$

Równocześnie chcemy, aby podniesienie horyzontalne było równe stycznemu, czyli, żeby wzdłuż całej krzywej

$$\dot{x}^i = \delta x^i.$$

Równanie na we współrzędnych x^i na krzywą w M jest więc ostatecznie drugiego rzędu:

$$\ddot{x}^i = -\Gamma^i_{jk}\dot{x}^j \dot{x}^k$$

W ramach ćwiczeń znajdziemy geodezyjną dla koneksji z poprzedniego zadania zaczynającą się w punkcie $(0, 0)$ i w kierunku ∂_1. *Rachunki wpiszę do notatek kiedy indziej...*

Torsja koneksji. Na wiązce stycznej wprowadzić można, oprócz krzywizny koneksji, jeszcze jedną wielkość, która tę krzywiznę charakteryzuje – torsję. W języku pochodnej kowariantnej torsję definiujemy jako

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y],$$

gdzie X i Y są polami wektorowymi na M. Z samej definicji widać, że $T(X,Y) = -T(Y,X)$. Policzmy $T(fX,Y)$:

$$T(fX,Y) = \nabla_{fX}Y - \nabla_Y fX - [fX,Y] =$$
$$f\nabla_X Y - f\nabla_Y X - Y(f)X - f[X,Y] + Y(f)X =$$
$$f\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = fT(X,Y)$$

Z powyższego rachunku wynika, że torsja zależy jedynie od wartości pól w punkcie a nie od pochodnych tych pól. Z definicji wynika ponadto, że torsja jest odwzorowaniem liniowym ze względu na oba argumenty. Ostatecznie T jest cięciem wiązki tensorowej $\mathsf{T}^*M \otimes_M \mathsf{T}^*M \otimes_M \mathsf{T}M \to M$. Wyznaczymy współczynnki T:

$$\nabla_X^Y = \left(X^i\partial_i Y^j + \Gamma^j_{ik}X^iY^k\right)\partial_j$$
$$\nabla_Y^X = \left(Y^i\partial_i X^j + \Gamma^j_{ik}Y^iX^k\right)\partial_j$$
$$[X,Y] = \left(X^i\partial_i Y^j - Y^i\partial_i X^j\right)\partial_j$$

$$T(X,Y) = \left(X^i\partial_i Y^j + \Gamma^j_{ik}X^iY^k\right)\partial_j - \left(Y^i\partial_i X^j + \Gamma^j_{ik}Y^iX^k\right)\partial_j - \left(X^i\partial_i Y^j - Y^i\partial_i X^j\right)\partial_j =$$
$$= (\Gamma^j_{ik} - \Gamma^j_{ki})X^iY^k\partial_j$$

Kto wymyśli geometryczną interpretację torsji w języku dystrybucji horyzontalnej? Beztorsyjność jest opisana w którymś z przyszłych wykładów.