



Analiza I R

tydzień trzeci, 15.10.2012 – 21.10.2012

Zadanie 1. Zbadać zbieżność i ewentualnie obliczyć granicę następujących ciągów:

- | | |
|---|--|
| (1) $x_n = \sqrt{2n^2 + 3n + 1} - \sqrt{2n^2 - 3n + 1}$ | (2) $x_n = \sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + 3} - \sqrt{n^2 + 2n + 3}$ |
| (3) $x_n = \frac{2n3^n}{n!}$ | (4) $x_n = \frac{n^n}{n!}$ |
| (5) $x_n = \frac{a^n}{n!}$ | (6) $x_n = \frac{n^n}{(n!)^2}$ |
| (7) $x_n = \frac{n^2}{2^n}$ | (8) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ |
| (9) $x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2} - 1} + \frac{3}{\sqrt[n]{8} - 1}$ | (10) $\frac{n3^n + 2n^2 - 1}{n! + 1}$ |
| (11) $x_n = \frac{a^n}{1 + a^2n}, a \in \mathbb{R}$ | (12) $\cos\left(\frac{n^2\pi}{n+2}\right)$ |

Zadanie 2. Wykazać, że ciąg

$$e_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

jest zbieżny dla dowolnego rzeczywistego x . Dla $e(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} e_n(x)$ wykazać następujące własności:

- (1) $e(x)e(y) = e(x+y)$,
- (2) dla dowolnego x $e(x) \geq 0$, $e(x) \geq 1+x$,
- (3) dla $x < 1$, $e(x) \leq \frac{1}{1-x}$.
- (4) Zauważyć, że dla funkcji odwrotnej log prawdziwe są oszacowania $\frac{x-1}{x} \leq \log(x) \leq x-1$.

Zadanie 3. Wykazać, że jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = g$ to granica ciągu

$$(1 + a_n)^{b_n}$$

istnieje i jest równa e^g . Wykorzystać to do zbadania granicy ciągów:

$$x_n = \left(\frac{3n+7}{3n+5}\right)^{2n+3}, \quad y_n = \left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right)^{n^2}.$$