Geometria Różniczkowa II

wykład trzeci

Wykład trzeci poświęcony będzie koneksji metrycznej. Zanim jednak zdefiniujemy koneksję w wiązce stycznej związaną z metryką udowodnimy następujący pożyteczny fakt:

Fakt 1 *Odwzorowanie $\nabla : \mathsf{T}M \times \Gamma(\tau) \to E$ spełniające warunki*

1. *∇ jest liniowe ze względu na pierwszy argument, tzn $\nabla_{\lambda v+\mu w}\sigma = \lambda\nabla_v\sigma + \mu\nabla_w\sigma$ oraz zachowuje rzut na M, tzn $\tau_M(v) = \tau(\nabla_v\sigma)$;*
2. *∇ jest różniczkowaniem ze względu na drugi argument, tzn $\nabla_{\lambda v} f\sigma = (vf)\sigma(q) + f\nabla_v\sigma$, $(q = \tau_M(v))$;*
3. *jeśli X jest gładkim polem wektorowym na M, a σ gładkim cięciem τ, to $\nabla_X\sigma$ jest gładkim cięciem τ*

jednoznacznie zadaje koneksję liniową w wiązce τ.

Dowód: Do tej pory definiowaliśmy koneksję jako dystrybucję horyzontalną lub jako morfizm podwójnych wiązek wektorowych. Używając pochodnej kowariantnej definiujemy odwzorowanie

$$F_{q,e} : \mathsf{T}_qM \to \mathsf{T}_eE, \qquad F(v) = \mathsf{T}\sigma(v) - (\nabla_v\sigma)^{\mathsf{v}}$$

dla ustalonego cięcia σ wiązki τ w otoczeniu q takiego, że $\sigma(q) = e$. Podniesienie pionowe $(\nabla_v\sigma)^{\mathsf{v}}$ wykonujemy do punktu e. Odwzorowanie $F_{q,e}$ to jest liniowe, co łatwo widać z definicji. Nietrudno także stwierdzić, że $F_{q,e} \circ \mathsf{T}\tau = \mathrm{id}_{\mathsf{T}_qM}$. pokażemy, że $F_{q,e}$ nie zależy od wyboru cięcia σ. Posłużymy się bazą pochodzącą od współrzędnych. Niech σ będzie zadane przy pomocy funkcji σ^a, tzn $\sigma(x) = \sigma^a(x^i)e_a$. Wtedy

$$\mathsf{T}\sigma(\partial_i) = \partial_i + \frac{\partial\sigma^a}{\partial x^j}\partial_a.$$

Z własności pochodnej kowariantnej wynika, że

$$\nabla_{v^i\partial_i}(\sigma^a e_a) = v^i\nabla_{\partial_i}(\sigma^a e_a) = v^i\frac{\partial\sigma^a}{\partial x^i}e_a + v^i\sigma^a(\nabla_{\partial_i}e_a)^b e_b$$

Współczynniki $(\nabla_{\partial_i}e_a)^b$ rozkładu $\nabla_{\partial_i}e_a$ w bazie nazwiemy D^b_{ia} i wtedy (korzystając z $(e_a)^{\mathsf{v}} = \partial_a$)

$$F_{q,e}(v) = \mathsf{T}\sigma(v) - (\nabla_v\sigma)^{\mathsf{v}} = v^i\partial_i + v^i\frac{\partial\sigma^a}{\partial x^i}\partial_a - v^i\frac{\partial\sigma^a}{\partial x^i}\partial_a - D^b_{ia}v^i\sigma^a\partial_b = v^i\partial_i - D^b_{ia}v^i\sigma^a\partial_b$$

Wynik nie zależy już od pochodnych σ^a a tylko od wartości w punkcie q, czyli od współrzędnych punktu włókna e. Definiujemy więc $\mathcal{H}_e = F_{q,e}(\mathsf{T}_qM)$. Składnik $v^i\partial_i$ zapewnia odpowiedni wymiar $\mathcal{H}_e$ zaś gładkość pochodnej kowariantnej daje gładkość dystrybucji $\mathcal{H}$. $\square$

Niech teraz M będzie rozmaitością wypasażoną w tensor metryczny $g : M \to \vee^2\mathsf{T}^*M$ niezdegenerowany. Zazwyczaj zakłada się także dodatnią określoność, ale nie jest to niezbędne – sygnatura Lorenzowska też jest dobra. Dużą literą G oznaczać będziemy izomorfizm wiązek $G : \mathsf{T}M \to \mathsf{T}^*M$ pochodzący od metryki, tzn. $G(v) = g(v, \cdot)$. Wyrazy macierzowe macierzy g oznaczać będziemy g_{ij} a macierzy odwrotnej g^{ij}.

Twierdzenie 1 *Istnieje dokładanie jedna beztorsyjna koneksja liniowa w $\mathsf{T}M$ zgodna ze strukturą metryczną, tzn taka, że $\nabla g = 0$. (Koneksja Levi-Civitta'y)*

Dowód: ponieważ twierdzenie ma charakter lokalny, możemy posłużyć się wspołrzędnymi. Beztorsyjność koneksji oznacza, że $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$, co oznacza, że poszukujemy $\frac{1}{2}n^2(n+1)$ funkcji Γ^i_{jk} definiujących koneksję w lokalnym układzie współrzędnych. Warunek $\nabla g = 0$ we współrzędnych ma postać

$$\forall v^i \quad (\nabla_{v^i\partial_i} g)_{jk} = 0$$

tzn.

$$0 = v^i(\nabla_{\partial_i} g)_{jk} = v^i(\partial_i g_{jk} - \Gamma^l_{ij} g_{lk} - \Gamma^l_{ik} g_{jl})$$

Z dowolności v^i wnioskujemy, że zachodzić musi

$$\partial_i g_{jk} - \Gamma^l_{ij} g_{lk} - \Gamma^l_{ik} g_{jl} = 0$$

dla dowolnych i, j, k. Przestawiając cyklicznie indeksy zapisujemy

$$\partial_i g_{jk} - \Gamma^l_{ij} g_{lk} - \Gamma^l_{ik} g_{jl} = 0 \tag{1}$$
$$\partial_j g_{ki} - \Gamma^l_{jk} g_{li} - \Gamma^l_{ji} g_{kl} = 0 \tag{2}$$
$$\partial_k g_{ij} - \Gamma^l_{ki} g_{lj} - \Gamma^l_{jj} g_{il} = 0 \tag{3}$$

Od sumy (2) i (3) odejmujemy (1), korzystamy z beztorsyjności upraszczając kolorowe wyrazy i otrzymujemy

$$\partial_j g_{ki} + \partial_k g_{ij} - \partial_i g_{jk} - 2\Gamma^l_{jk} g_{li} = 0$$

Przenosimy co trzeba na drugą stronę, zwężamy z g i dzielimy przez 2:

$$\Gamma^m_{jk} = \frac{1}{2} g^{im} \left(\partial_j g_{ki} + \partial_k g_{ij} - \partial_i g_{jk}\right). \tag{4}$$

Współczynniki koneksji udało się jednoznacznie policzyć.□

Ten sam fakt, tzn istnienie jedynej koneksji metrycznej dla danej metryki wyrazić można także geometrycznie. Jak dotąd koneksję opisywaliśmy poprzez podanie dystrybucji horyzontalnej, podanie stosownego morfizmu podwójnych wiązek wektorowych lub poprzez pochodną kowariantną. Używając odwzorowania dla koneksji w wiązce stycznej otrzymujemy:

$$\Gamma : \mathsf{TT}M \longrightarrow \mathsf{T}M \times_M \mathsf{T}M \times_M \mathsf{T}M,$$
$$(x, \delta x, \dot{x}, \delta\dot{x}) \longmapsto (x, \delta x, \delta\dot{x}^i + \Gamma^i_{jk}\dot{x}^j \delta x^k, \dot{x})$$

pochodna kowariantna pochodząca od koneksji daje się rozszerzyć także na cięcia wiązki dualnej, tzn możemy różniczkować także jednoformy. Wiemy jednak, że pochodna kowariantna zadaje koneksję, więc mamy także koneksję w wiązce dualnej. Oznaczmy odpowiednie odwzorowanie przez Γ^*. Jest ono rzeczywiście dualne do wyjściowego Γ (w odpowiednim sensie):

$$\Gamma^* : \mathsf{TT}^*M \longrightarrow \mathsf{T}^*M \times_M \mathsf{T}^*M \times_M \mathsf{T}M,$$
$$(x, p, \dot{x}, \dot{p}) \longmapsto (x, p, \delta\dot{p}_k - \Gamma^i_{jk}\dot{x}^j p_i, \dot{x})$$

„Odpowiedni sens" oznacza, że do dualności musimy wybrać odpowiednie struktury wektorowe. Wiemy już, że $\mathsf{TT}M$ jest wiązką wektorową nad $\mathsf{T}M$ na dwa sposoby. Rzutowania związane z tymi sposobami to $\tau_{\mathsf{T}M} : \mathsf{TT}M \to \mathsf{T}M$, $(x, \delta x, \dot{x}, \delta\dot{x}) \mapsto (x, \delta x)$ oraz $\mathsf{T}\tau_M : \mathsf{TT}M \to \mathsf{T}M$, $(x, \delta x, \dot{x}, \delta\dot{x}) \mapsto (x, \dot{x})$. Wiązką dualną do $\tau_{\mathsf{T}M}$ jest oczywiście $\pi_{\mathsf{T}M} : \mathsf{T}^*\mathsf{T}M \to \mathsf{T}M$, natomiat wiązką dualną do $\mathsf{T}\tau_M$ jest $\mathsf{T}\pi_M : \mathsf{TT}^*M \to \mathsf{T}M$. Wiązka po prawej stronie jest też wektorowa na dwa sposoby (nawet więcej, ale inne nie są tu istotne) pr_1 i pr_3. Żeby z koneksji Γ otrzymać koneksję dualną trzeba wziąć po lewej stronie strukturę $\mathsf{T}\tau_M$ a po prawej pr_3. Otrzymane odwzorowanie dualne to $(\Gamma^*)^{-1}$. Metrycznosć koneksji oznacza, że koneksja jest beztorsyjna oraz następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{TT}M \arrow[r, "\Gamma"] \arrow[d, "\mathsf{T}G"] & \mathsf{T}M \arrow[d, "G"] & \times_M & \mathsf{T}M \arrow[d, "G"] & \times_M & \mathsf{T}M \arrow[d, "id"] \\
\mathsf{TT}^*M \arrow[r, "\Gamma^*"] & \mathsf{T}^*M & \times_M & \mathsf{T}^*M & \times_M & \mathsf{T}M
\end{tikzcd}$$

Beztorsyjność koneksji także można wyrazić bardziej geometrycznie niż tradycyjny wzór $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$. W wiązce $\mathsf{TT}M$ istnieje kanoniczne odwzorowanie $\kappa_M : \mathsf{TT}M \to \mathsf{TT}M$ zachowujące strukturę podwójnej wiązki wektorowej, ale zamieniające rzuty, tzn $\kappa_M \circ \mathsf{T}\tau_M = \tau_{\mathsf{T}M} \circ \kappa_M$. Odwzorowanie to we współrzędnych zapisuje się jako

$$(x, \delta x, \dot{x}, \delta\dot{x}) \xmapsto{\kappa_M} (x, \dot{x}, \delta x, \delta\dot{x})$$

Beztorsyjność koneksji oznacza, że dystrybucja horyzontalna jest niezmiennicza ze względu na κ_M albo że przemienny jest diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{TT}M \arrow[r, "\Gamma"] \arrow[d, "\kappa_M"] & \mathsf{T}M \arrow[d, "id"] & \times_M & \mathsf{T}M \arrow[d, "id"] & \times_M & \mathsf{T}M \arrow[d, "id"] \\
\mathsf{TT}M \arrow[r, "\Gamma"] & \mathsf{T}M & \times_M & \mathsf{T}M & \times_M & \mathsf{T}M
\end{tikzcd}$$

Odwzorowanie κ_M. Odwzorowanie κ_M jest bardzo istotnym elementem struktury wiązki stycznej. Na dowolnej wiązce wektorowej takiego odwzorowania nie ma. W sposób niezależny od współrzędnych odwzorowanie to można zdefiniować następująco. Reprezentantem elementu z $\mathsf{TT}M$ jest krzywa w $\mathsf{T}M$, zaś reprezentantem elementu z $\mathsf{T}M$ krzywa w M. Mozna więc rozważyć „krzywą w krzywych", czyli odwzorowanie $\chi : \mathbb{R}^2 \to M$, $(s, t) \mapsto \chi(s, t)$. Biorąc wektory styczne względem t dla $t = 0$ i różnych s otrzymujemy krzywą w wiązce stycznej $s \mapsto \mathsf{t}^{(0,1)}\chi(s, 0)$, biorąc wektor styczny do otrzymanej krzywej w $s = 0$ dostajemy element $\mathsf{tt}^{(0,1)}\chi(0, 0)$ wiązki $\mathsf{TT}M$. Notacja zastosowana tutaj odnosi się do sposobu oznaczania wektora stycznego do krzywej $t \mapsto \gamma(t)$ w punkcie $t = 0$. Możemy pisać $\dot{\gamma}(0)$, ale możemy też $\mathsf{t}\gamma(0)$. Jeśli argumentów jest więcej warto wskazać wzdłuż którego bierzemy wektor styczny, $\mathsf{t}^{(0,1)}$ oznacza że wzdłuż drugiego, a $\mathsf{t}^{(1,0)}$, że wzdłuż pierwszego. Wróćmy do problemu odwzorowania κ_M i reprezentanta χ. A co będzie jeśli zamienimy kolejność różniczkowania? Krzywa $t \mapsto \mathsf{t}^{(1,0)}(0, t)$ też jest krzywą w wiązce stycznej i wektor do niej styczny to $\mathsf{tt}^{(1,0)}\chi(0, 0)$ jest elementem $\mathsf{TT}M$. Odwzorowanie κ jest właśnie związane z zamianą kolejności rożniczkowania. Jeśli $v = \mathsf{tt}^{(0,1)}\chi(0, 0)$ to $\kappa_M(v) = \mathsf{tt}^{(1,0)}\chi(0, 0)$. Można sprawdzić rachunkiem, że definicja jest poprawna, tzn nie zależy od wyboru reprezentanta χ.