Analiza I R

tydzień czwarty, 22.10.2012 – 28.10.2012

Zaczynamy od uzupełnienia braków z poprzednich zajęć:

Zadanie 1. Udowodnić (na przykład korzystając z elementarnej geometrii na płaszczyźnie), że

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Wolno wykorzystać ciągłość funkcji *sinus*.

Twierdzenie Stolza wraz z dowodem znajduje się w materiałach z wykładu:

Zadanie 2. Udowodnić fakty (które wynikają z tw. Stolza, choć były znane wcześniej)

(1) (Twierdzenie Cauchy'ego) Jeśli istnieje granica $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n)$, to istnieje także $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n}$ i obie granice są równe.

(2) Jeśli $x_n > 0$ i istnieje granica $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ to istnieje też $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$ i obie granice są równe.

(3) Jeśli $x_n > 0$ i istnieje granica $\lim_{n\to\infty} x_n$ to istnieje też $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$ i obie granice są równe.

Zajmiemy się tym korzystając z dodatkowego czasu jaki dają nam kłopoty kalendarzowe grupy prof Urbańskiego:

Zadanie 3. Korzystając z wyprowadzonych wcześniej oszacowań $x \mapsto e(x)$ wykazać, że jest to funkcja ciągła. Zrobić to samo dla log.

Zadanie 4. Zbadać zbieżność ciągów zadanych w sposób rekurencyjny, w zależności od x_0.

$$(a)\ \ x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}, \qquad (b)\ \ x_{n+1} = \frac{2}{x_n + 1},\ x_0 > 1$$

Zadanie 5. Znaleźć zbiór punktów skupienia, $\limsup$, $\liminf$ dla ciągów

$$(a)\ \ x_n = \frac{n}{1 + E(\sqrt{n})} - E(\sqrt{n}), \quad (b)\ \ x_n = (-1)^n \left(\frac{\sqrt{n}}{2n + 25} + 1 \right), \quad (c)\ \ x_n = \frac{n}{10} + \frac{3}{n} - E(\frac{n}{10})$$

Zadanie 6. Wykazać, że jeśli ciąg liczbowy jest ograniczony oraz $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$ to zbiór punktów skupienia tego ciągu jest odcinkiem domkniętym $[a, b]$ (może być o zerowej długości), gdzie $a = \liminf x_n$, $b = \limsup x_n$.