Geometria Różniczkowa II

wykład czwarty

Własności tensora krzywizny. W trakcie poprzednich wykładów krzywiznę koneksji zdefiniowaliśmy jako różnicę między nawiasem Liego horyzontalnych podniesień pól wektorowych na M i podniesieniem horyzontalnym nawiasu Liego tych pól, tzn.

$$[X^h, Y^h] - [X, Y]^h$$

Różnica ta jest polem wektorowym na E pionowym ze względu na rzutowanie $\tau : E \to M$. Sprawdzaliśmy, że zależy ona tak naprawdę od wartości pól X i Y w punkcie a nie w całym otoczeniu. Ponadto z liniowości koneksji wynika, że wartość pola pionowego zależy liniowo od punktu zaczepienia. Wektory pionowe można utożsamiać z elementami włókna, więc ostatecznie

$$R : \mathsf{T}M \times_M \mathsf{T}M \times_M E \longrightarrow E$$

jest tensorem, który można obliczyć na dwóch polach wektorowych X i Y oraz na cięciu σ wiązki τ według wzoru

$$R(X, Y, \sigma)^{\mathsf{v}}(\sigma(q)) = [X^h, Y^h](\sigma(q)) - [X, Y]^h(\sigma(q)),$$

gdzie $R(X, Y, \sigma)^{\mathsf{v}}(\sigma(q))$ oznacza podniesienie pionowe elementu $R(X(q), Y(q), \sigma(q))$ włókna wiązki τ do punktu $\sigma(q)$. Przypomnijmy sobie teraz, że nawias Liego pól wektorowych jest miarą nieprzemienności potoków tych pól. Jeśli założymy teraz, że pola X i Y komutują, wartość R powie nam „jak bardzo nieprzemienne” są potoki ich horyzontalnych podniesień. Tensor R ma więc coś wspólnego z próbą odpowiedzenia na pytanie czy krzywa zamknięta na bazie po podniesieniu horyzontalnym do wiązki E nadal będzie zamknięta. Przyjrzyjmy się temu bliżej pracując we współrzędnych. Niech X i Y będą komutującymi polami wektorowymi na rozmaitości M

$$X(q) = X^i(x^j(q))\partial_i, \qquad Y(q) = Y^i(x^j(q))\partial_i, \qquad X^i\partial_i Y^j - Y^i \partial_i X^j = 0.$$

Ustalmy punkt q_0 w M o współrzędnych (x^i_0) oraz punkt e_0 we włóknie E_{q_0} o współrzędnych (x^i_0, y^a_0). Niech φ_t oznacza potok pola X, zaś ψ_t potok pola Y. Podniesienie horyzontalne krzywej $\varphi_t(q_0)$ do punktu e_0 spełnia układ równań $\dot{x}^i = X^i(x)$, $\dot{y}^a = -\Gamma^a_{ib}(x)X^i(x)y^b$, zatem w przybliżeniu zależność x^i i y^a od t można opisać

$$x^i(t) = x^i_0 + X^i(x_0)\,t + \ldots, \qquad y^a(t) = y^a_0 - \Gamma^a_{ib}(x_0)X^i(x_0)y^b_0\,t + \ldots.$$

Będziemy teraz poruszać się po podniesieniu horyzontalnym krzywej $t \mapsto \varphi_t(q_0)$ i dalej po podniesieniu $s \mapsto \psi_s(\varphi_t(q_0))$. Następnie zamienimy miejscami pola X i Y – najpierw pójdziemy o s wzdłuż poniesienia horyzontalnego pola Y a następnie o t wzdłuż podniesienia pola X. Idąc najpierw wzdłuż X a potem Y otrzymujemy (dla współrzędnych y^a)

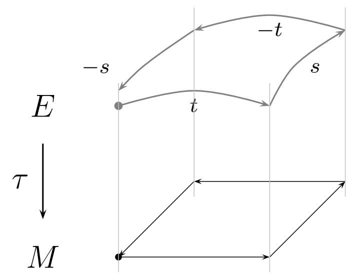
$$\begin{aligned}
y^a(s,t) = {} & y^a_0 - \Gamma^a_{ib}X^i(x_0)y^b_0\,t + \\
& - \Gamma^a_{jc}(x_0 + X^i(x_0)\,t + \ldots)Y^i(x_0 + X^i(x_0)\,t + \ldots)(y^c_0 - \Gamma^c_{kd}X^k(x_0)y^d_0\,t + \ldots)\,s + \ldots = \\
& y^a_0 - \Gamma^a_{ib}X^i(x_0)y^b_0\,t + [\Gamma^a_{jc}(x_0) + \partial_k\Gamma^a_{jc}(x_0)X^k(x^i_0)\,t + \ldots]\times \\
& \times [Y^i(x_0) + \partial_k Y^i X^k(x_0)\,t + \ldots][y^c_0 - \Gamma^c_{kd}X^k(x_0)y^d_0\,t + \ldots]\,s = \\
& y^a_0 - \Gamma^a_{ib}X^i(x_0)y^b_0\,t - \Gamma^a_{jc}Y^j(x_0)y^c_0\,s + \\
& - \{\partial_k\Gamma^a_{jc}(x_0)X^k(x_0) + \Gamma^a_{jc}(x_0)\partial_k Y^i X^k(x_0) - \Gamma^a_{jc}(x_0)Y^i(x_0)\Gamma^c_{kd}(x_0)X^k(x_0)y^d_0\}\,st
\end{aligned}$$

Po zamianie kolejności pól X i Y dostajemy

$$\begin{aligned}\tilde{y}^a(s,t) = {} & y_0^a - \Gamma^a_{ib} Y^i(x_0) y_0^b\, s - \Gamma^a_{jc}(x_0) X^j(x_0) y_0^c\, t + \\ & - \{\partial_k \Gamma^a_{jc}(x_0) Y^k(x_0) + \Gamma^a_{jc}(x_0) \partial_k X^i Y^k(x_0) - \Gamma^a_{jc}(x_0) X^i(x_0) \Gamma^c_{kd}(x_0) Y^k(x_0) y_0^d\} st\end{aligned}$$

Obejście „drogi po prostokącie” wzdłuż X o t, potem wzdłuż Y o s i dalej wzdłuż X o $-t$ i wzdłuż Y o $-s$ dałoby odwzorowanie

$$\begin{aligned}\chi^i(s,t) &= x_0^i \\ \chi^a(s,t) &= y_0^a + st\{\partial_k \Gamma^a_{jc} - \partial_j \Gamma^a_{kc} - \Gamma^a_{jd}\Gamma^d_{kc} + \Gamma^a_{kd}\Gamma^d_{jc}\}\end{aligned}$$



Wyrazy niebieskie upraszczają się, zielone także (ze względu na komutowanie pól X i Y) zaś czerwone dodają z odpowiednimi znakami. Otrzymane odwzorowanie jest reprezentantem elementu $\mathsf{TT}E$ rzutującego się na wektory zerowe w $\mathsf{T}E$ za pomocą obu rzutów $\tau_{\mathsf{T}E}$ i $\mathsf{T}\tau_E$. Rzuty na $\mathsf{T}M$ także są zerowe, zatem element ten może być identyfikowany z elementem E, który, jak widać we współrzędnych, jest wartością tensora krzywizny w punkcie q.

Z samej definicji R wynika, że $R(X,Y,\sigma) = -R(Y,X,\sigma)$ co we współrzędnych oznacza antysymetrię ze względu na zamianę dwóch dolnych ostatnich indeksów:

$$R^a_{bij} = -R^a_{bji}.$$

Pozostałe symetrie indeksów mają miejsce jedynie gdy $E = \mathsf{T}M$ i koneksja jest metryczna. Zanotujmy najpierw następujący wygodny wzór

Fakt 1

$$R(X,Y,Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_Y Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

Prawdziwość wzoru sprawdzamy na współrzędnych. W większości podręczników wzór ten pojawia się jako definicja tensora krzywizny. Skoro jednak koneksję wprowadzamy w sposób bardziej geometryczny (dystrybucja horyzontalna) niż algebraiczny (pochodna kowariantna), wypada także geometrycznie wprowadzić krzywiznę. Korzystając ze struktury metrycznej definiujemy także tensor krzywizny z opuszczonym indeksem

Definicja 1

$$R(X,Y,Z,T) = g(T, R(X,Y,Z)).$$

Poniższy fakt zbiera wszystkie (poza wspomnianą powyżej) symetrie tensora krzywizny dla koneksji metrycznej:

Fakt 2 *Prawdziwe są wzory*

$$\begin{aligned}
&(a)\ \ R(X,Y,Z,T) = -R(X,Y,T,Z),\\
&(b)\ \ R(X,Y,Z) + R(Y,Z,X) + R(Z,X,Y) = 0,\\
&(c)\ \ R(X,Y,Z,T) = R(Z,T,X,Y),\\
&(d)\ \ (\nabla_X R)(Y,Z,T) + (\nabla_Y R)(Z,X,T) + (\nabla_Z R)(X,Y,T) = 0
\end{aligned}$$

Wzór (b) nazywany jest pierwszą, zaś wzór (d) drugą tożsamością Bianchi.

Dowód: W (a) korzystamy najpierw z metryczności koneksji (wyraz niebieski znika) obserwując, że

$$Xg(A,B) = (\nabla_X g)(A,B) + g(\nabla_X A, B) + g(A, \nabla_X B) = g(\nabla_X A, B) + g(A, \nabla_X B).$$

Możemy więc „przerzucać" pochodną kowariantną z pierwszego argumentu na drugi:

$$g(\nabla_X A, B) = Xg(A,B) - g(A, \nabla_X B)$$

Piszemy

$$R(X,Y,Z,T) = g(T, \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z)$$

i w poszczególnych składnikach typu $g(T, \nabla_X\nabla_Y Z)$ przerzucamy różniczkowanie z Z na T. Na przykład

$$\begin{aligned}
g(T,\nabla_X\nabla_Y Z) &= Xg(T,\nabla_Y Z) - g(\nabla_X T \nabla_Y Z) = \\
&Xg(T,\nabla_Y Z) - Yg(\nabla_X T, Z) + g(\nabla_Y\nabla_X T, Z) = \\
&X[Yg(T,Z) - g(\nabla_Y T, Z)] - Yg(\nabla_X T, Z) + g(\nabla_Y\nabla_X T, Z) = \\
&XYg(T,Z) - Xg(\nabla_Y T, Z) - Yg(\nabla_X T, Z) + g(\nabla_Y\nabla_X T, Z)
\end{aligned}$$

Po cierpliwych rachunkach wychodzi co trzeba. W (b) używamy beztorsyjności koneksji, tzn faktu, że

$$\nabla_X Z - \nabla_Z X = [X,Z].$$

$$\begin{aligned}
&R(X,Y,Z) + R(Y,Z,X) + R(Z,X,Y) = \\
&\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z + \nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_Z\nabla_Y X - \nabla_{[Y,Z]}X + \nabla_Z\nabla_X Y - \nabla_X\nabla_Z Y - \nabla_{[Z,X]}Y = \\
&\nabla_X(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y) - \nabla_{[X,Y]}Z + \nabla_Y(\nabla_Z X - \nabla_X Z) - \nabla_{[Y,Z]}X + \nabla_Z(\nabla_X Y - \nabla_Y X) - \nabla_{[Z,X]}Y = \\
&\nabla_X[Y,Z] - \nabla_{[X,Y]}Z + \nabla_Y[Z,X] - \nabla_{[Y,Z]}X + \nabla_Z[X,Y] - \nabla_{[Z,X]}Y = \\
&[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0
\end{aligned}$$

Pierwsza tożsamość Bianchi sprowadza się więc do tożsamości Jacobiego. Ta ostatnia jest związana z faktem iż $\mathsf{d}^2 = 0$ (o tym mówiliśmy w poprzednim semestrze). Mówi się więc często, że tożsamość Bianchi wynika ze znikania kwadratu różniczki zewnętrznej. Dowodząc (c) korzystamy z (b) cztery razy dla argumentów przestawionych cyklicznie:

$$\begin{aligned}
R(X,Y,Z,T)+R(Y,Z,X,T)+R(Z,X,Y,T)&=0\\
R(Y,Z,T,X)+R(Z,T,Y,X)+R(T,Y,Z,X)&=0\\
R(Z,T,X,Y)+R(T,X,Z,Y)+R(X,Z,T,Y)&=0\\
R(T,X,Y,Z)+R(X,Y,T,Z)+R(Y,T,X,Z)&=0
\end{aligned}$$

Po dodaniu wszystkich czterech równań i uproszczeniu kolorowych wyrazów otrzymujemy

$$0=R(Z,X,Y,T)+R(T,Y,Z,X)+R(X,Z,T,Y)+R(Y,T,X,Z)=\\ 2R(Z,X,Y,T)+2R(T,Y,Z,X)$$

i ostatecznie

$$R(Z,X,Y,T)=R(Y,T,Z,X).$$

Ostatni wzór (d) wynika, jak się okazuje, także z tożsamości Jacobiego. Rachunki jednak są nieco trudniejsze, a właściwie nudniejsze. Zauważmy najpierw, że

$$(\nabla_X R)(Y,Z,T)=\nabla_X(R(Y,Z,T)-R(\nabla_X Y,Z,T)-R(Y,\nabla_X Z,T)-R(Y,\nabla_X Z,T).$$

Będziemy musieli zsumować trzy takie wyrażenia z cyklicznie przestawionymi polami X, Y, Z. Każde wyrażenie to cztery składniki:

$$\begin{aligned}
(X,Y,Z)\ &\begin{cases}
\nabla_X\nabla_Y\nabla_Z T-\nabla_X\nabla_Z\nabla_Y T-\nabla_X\nabla_{[Y,Z]}T+\\
-\nabla_{\nabla_X Y}\nabla_Z T+\nabla_Z\nabla_{\nabla_X Y}T+\nabla_{[\nabla_X Y,Z]}T+\\
-\nabla_Y\nabla_{\nabla_X Z}T+\nabla_{\nabla_X Z}\nabla_Y T+\nabla_{[Y,\nabla_X Z]}T+\\
-\nabla_Y\nabla_Z\nabla_X T+\nabla_Z\nabla_Y\nabla_X T+\nabla_{[Y,Z]}\nabla_X T+
\end{cases}\\
(Y,Z,X)\ &\begin{cases}
\nabla_Y\nabla_Z\nabla_X T-\nabla_Y\nabla_X\nabla_Z T-\nabla_Y\nabla_{[Z,X]}T+\\
-\nabla_{\nabla_Y Z}\nabla_X T+\nabla_X\nabla_{\nabla_Y Z}T+\nabla_{[\nabla_Y Z,X]}T+\\
-\nabla_Z\nabla_{\nabla_Y X}T+\nabla_{\nabla_Y X}\nabla_Z T+\nabla_{[Z,\nabla_Y X]}T+\\
-\nabla_Z\nabla_X\nabla_Y T+\nabla_X\nabla_Z\nabla_Y T+\nabla_{[Z,X]}\nabla_Y T+
\end{cases}\\
(Z,X,Y)\ &\begin{cases}
\nabla_Z\nabla_X\nabla_Y T-\nabla_Z\nabla_Y\nabla_X T-\nabla_Z\nabla_{[X,Y]}T+\\
-\nabla_{\nabla_Z X}\nabla_Y T+\nabla_Y\nabla_{\nabla_Z X}T+\nabla_{[\nabla_Z X,Y]}T+\\
-\nabla_X\nabla_{\nabla_Z Y}T+\nabla_{\nabla_Z Y}\nabla_X T+\nabla_{[X,\nabla_Z Y]}T+\\
-\nabla_X\nabla_Y\nabla_Z T+\nabla_Y\nabla_X\nabla_Z T+\nabla_{[X,Y]}\nabla_Z T=
\end{cases}
\end{aligned}$$

Składniki niebieskie upraszczają się, zaś w tym co zostaje wyszukujemy trójki takie, jak zaznaczona na czerwono. Dają się one przekształcić następująco:

$$\nabla_X\nabla_{\nabla_Y Z}T-\nabla_X\nabla_{\nabla_Z Y}T-\nabla_X\nabla_{[Y,Z]}T=\nabla_X\nabla_{(\nabla_Y Z-\nabla_Z Y)}T-\nabla_X\nabla_{[Y,Z]}T=\\ \nabla_X\nabla_{[Y,Z]}T-\nabla_X\nabla_{[Y,Z]}T=0$$

W powyższy sposób znikają wyrazy czerwone oraz wszystkie wyrazy szare. Pozostałe wyrazy czarne przepisujemy nadając im na nowo przydatne kolory:

$$\begin{aligned}
=&-\nabla_{\nabla_X Y}\nabla_Z T+\nabla_{[\nabla_X Y,Z]}T+\nabla_{\nabla_X Z}\nabla_Y T+\nabla_{[Y,\nabla_X Z]}T+\nabla_{[Y,Z]}\nabla_X T+\\
&-\nabla_{\nabla_Y Z}\nabla_X T+\nabla_{[\nabla_Y Z,X]}T+\nabla_{\nabla_Y X}\nabla_Z T+\nabla_{[Z,\nabla_Y X]}T+\nabla_{[Z,X]}\nabla_Y T+\\
&-\nabla_{\nabla_Z X}\nabla_Y T+\nabla_{[\nabla_Z X,Y]}T+\nabla_{\nabla_Z Y}\nabla_X T+\nabla_{[X,\nabla_Z Y]}T+\nabla_{[X,Y]}\nabla_Z T=
\end{aligned}$$

Wyrazy jednokolorowe upraszczają się na podobnej jak poprzednio zasadzie, czarne przepisujemy:

$$= \nabla_{[\nabla_X Y,Z]}T + \nabla_{[Y,\nabla_X Z]}T + \nabla_{[\nabla_Y Z,X]}T + \nabla_{[Z,\nabla_Y X]}T + \nabla_{[\nabla_Z X,Y]}T + \nabla_{[X,\nabla_Z Y]}T =$$

Wyrażenia jednokolorowe przekształcamy według wzoru (na przykładzie niebieskiego):

$$\nabla_{[\nabla_X Y,Z]}T + \nabla_{[Z,\nabla_Y X]}T = \nabla_{[\nabla_Y X+[X,Y],Z]}T + \nabla_{[Z,\nabla_Y X]}T =$$
$$\nabla_{[\nabla_Y X,Z]}T + \nabla_{[[X,Y],Z]}T + \nabla_{[Z,\nabla_Y X]}T = \nabla_{[[X,Y],Z]}T$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$= \nabla_{[[X,Y],Z]}T + \nabla_{[[X,X],Y]}T + \nabla_{[[Y,Z],X]}T = \nabla_{[[X,Y],Z]+[[X,X],Y]+[[Y,Z],X]}T = 0$$

Druga tożsamość Bianchi sprowadza się zatem także do tożsamości Jacobiego. □

Wzory (a), (b), (c) i (d) zapisane przy pomocy współrzędnych mają postać

(a) $R_{kl\,ij} = -R_{lk\,ij}$

(b) $R^k_{lij} + R^k_{ijl} + R^k_{jli} = 0$

(c) $R_{kl\,ij} = -R_{ij\,kl}$

(d) $R^m_{lij;k} + R^m_{lki;j} + R^m_{ljk;i} = 0$

Po takiej porcji teorii przydadzą się praktyczne rachunki - proponuję dwa zadania:

Zadanie 1 Znaleźć symbole Christoffela metryki na S^2 indukowanej z $\mathbb{R}^3$ we współrzędnych pochodzących od współrzędnych sferycznych w $\mathbb{R}^3$. Znaleźć nietrywialne wartości współrzędnych R^k_{mij}, zwężenie $R_{ij} = R^k_{ikj}$ oraz dalsze zwężenie R^i_i. Należy tu wspomnieć, że tensor Ricciego R_{ij} jest jedynym z dokładnością do znaku nietrywialnym zwężeniem tensora krzywizny. Ponadto R^i_i nazywa się krzywizną skalarną.

Zadanie 2 Znaleźć przesunięcie równoległe ∂_θ wzdłuż równoleżnika innego niż równik. Może być np. $\theta = \frac{\pi}{4}$ i zobaczyć, że po obiegnięciu sfery wektor zmienia się na inny.