



## Analiza I R

tydzień piąty, 29.10.2012 – 4.11.2012

**Zadanie 1.** Sprawdzić, że funkcja

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$$

jest metryką na  $\mathbb{R}$ . Czy metryka ta jest równoważna metryce  $\rho(x, y) = |x - y|$ ? Czy topologia zadawana przez tę metrykę jest identyczna z kanoniczną?

**Zadanie 2.** Niech  $K = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1)^2 + (x_2)^2 < 1\}$ . Sprawdzić, że funkcja

$$d : K \times K \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(x, y) = \min\{\|x - y\|, 2 - \|x\| - \|y\|\},$$

gdzie  $\|x\| = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}$ , jest metryką na  $K$ . Narysować kulę o środku w  $(0, \frac{3}{4})$  i promieniu  $\frac{1}{2}$  oraz kulę o środku w  $(\frac{1}{2}, 0)$  i promieniu  $\frac{1}{4}$ . Obliczyć średnicę  $K$ . Czy  $(K, d)$  jest przestrzenią zupełną?

**Zadanie 3.** Udowodnić, że (1) zbiór wyrazów ciągu Cauchy'ego w przestrzeni metrycznej jest ograniczony, (2) jeśli  $(x_n), (y_n)$  są ciągami Cauchy'ego w przestrzeni metrycznej  $(X, d)$  to ciąg liczbowy  $d_n = d(x_n, y_n)$  jest zbieżny.

**Zadanie 4.** Metodą polowania na lwa udowodnić zwartość odcinka  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ .



**Zadanie 5.** W zależności od wartości parametru  $p \in \mathbb{R}$  zbadać ODZS zbioru

$$A_p = \{t \in \mathbb{R} : 2t^2 - 3t \leq pe^t\}.$$

**Zadanie 6.** Niech  $X$  będzie przestrzenią ograniczonych ciągów liczbowych metryką

$$d((x_n)_{n=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty) = \sup\{|x_n - y_n|, n \in \mathbb{N}\}.$$

Zbadać ODZS zbioru ciągów zbieżnych do 0. *Przy okazji rozwiązywania tego zadania udało mi się wygłosić jedną (przynajmniej ;) ) głupotę, mam nadzieję, że Państwo zauważyli...*

**Zadanie 7.** Opisać otwarte, domknięte, zwarte i spójne podzbiory zbioru  $\mathbb{N}$  z metryką

$$d(m, n) = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right|.$$

Czy metryka  $\rho(m, n) = |m - n|$  zadaje tę samą topologię?