Geometria Różniczkowa I

wykład piąty

Nawias Liego pól wektorowych: Gładkie pole wektorowe (tzn. gładkie odwzorowanie $X: M \to \mathsf{T}M$ takie, że $X \circ \tau_M = \mathrm{id}_M$) definiuje różniczkowanie algebry $\mathcal{C}^\infty(M)$ nad identycznością. Istotnie, skoro w każdym punkcie $q \in M$ wartość $X(q)$ jest różniczkowaniem algebry $\mathcal{C}^\infty(M)$ o wartościach rzeczywistych, zbierając wartości różniczkowania punkt po punkcie i korzystając z gładkości jako wartość $X(f)$ otrzymujemy gładką funkcję $q \mapsto X(q)(f)$. Reguła Leibniza jest spełniona, gdyż jest spełniona dla $X(q)$. Można pokazać (czego nie będziemy robić), że pola wektorowe to wszystkie różniczkowania algebry $\mathcal{C}^\infty(M)$ nad identycznością. W zbiorze różniczkowań algebry nad identycznością określony jest komutator różniczkowań. Można sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, że $[D_1, D_2]$ określone wzorem

$$[D_1, D_2](a) = D_1(D_2(a)) - D_2(D_1(a))$$

jest różniczkowaniem. Istotnie

$$\begin{aligned}[D_1, D_2](ab) = D_1(D_2(ab)) - D_2(D_1(ab)) = D_1(aD_2(b) + D_2(a)b) - D_2(aD_1(b) + D_1(a)b) = \\ aD_1(D_2(b)) + D_1(a)D_2(b) + D_1(D_2(a))b + D_2(a)D_1(b) - \\ aD_2(D_1(b)) - D_2(a)D_1(b) - D_2(D_1(a))b - D_1(a)D_2(b) =\end{aligned}$$

Jednokolorowe wyrażenia się upraszczają i otrzymujemy

$$\begin{aligned}= aD_1(D_2(b)) + D_1(D_2(a))b + aD_2(D_1(b)) - D_2(D_1(a))b = \\ a[D_1(D_2(b)) - D_2(D_1(b))] + [D_1(D_2(a)) - D_2(D_1(a))]b = \\ a[D_1, D_2](b) + [D_1, D_2](a)b\end{aligned}$$

Skoro komutator różniczkowań jest różniczkowaniem, a wszystkie różniczkowania to pola wektorowe, to komutator pól wektorowych także jest polem wektorowym. Komutator w zastosowaniu do pól wektorowych nazywany jest *nawiasem Liego*. Jest to odwzorowanie

$$\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$$

antysymetryczne (tzn. $[X, Y] = -[Y, X]$), spełniające następujące warunki:

$$[X, fY] = f[X, Y] + X(f)Y$$

oraz

$$[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]].$$

Druga z równości nazywana jest *tożsamością Jacobiego* Mówi ona, że odwzorowanie

$$[X, \cdot] : \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$$

samo jest różniczkowaniem algebry $(\mathcal{X}(M), [\cdot, \cdot])$. Algebra ta jest algebrą nieprzemienną (antysymetryczną), bez jedynki i bez łączności. Algebra z antysymetrycznym działaniem spełniającym tożsamość Jacobiego nazywa się *algebrą Liego*. Obie równości sprawdza się bezpośrednim rachunkiem na współrzędnych. Rachunek związany z tożsamością Jacobiego jest długi i nieprzyjemny - można z nim poczekać do czasu, kiedy da się go wykonać szybciej i z większym pożytkiem. Sprawdźmy jeszcze jak nawias pól wektorowych wygląda we współrzędnych:

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j},$$

$$\begin{aligned}[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(Y^j \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) - Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}\left(X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right) = \\ X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} + X^i Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^i} - Y^j X^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} = \\ X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^i} = \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial f}{\partial x^j},\end{aligned}$$

$$[X,Y]^i = X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}.$$

Krzywe całkowe pola wektorowego: Krzywą całkową pola wektorowego $X \in \mathcal{X}(M)$ nazywamy gładką krzywą $\gamma : I \to M$, $t \mapsto \gamma(t)$ taką, że

$$\forall t \in I \quad \dot\gamma(t) = X(\gamma(t)),$$

czyli pole X jest styczne do krzywej i prędkość krzywej jest równa wartości pola. Zamiast zagłębiać się w kwestie teoretyczne obejrzyjmy przykład:

Przykład 1. Rozważmy pole wektorowe X na S^2 dane we współrzędnych stereograficznych (względem bieguna północnego) wzorem

$$X = (x-y)\frac{\partial}{\partial x} + (x+y)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Jeśli krzywa $t \mapsto (x(t), y(t))$ jest krzywą całkową pola to

$$(\dot x(t), \dot y(t)) = (x(t) - y(t), x(t) + y(t)).$$

Otrzymaliśmy więc układ równań różniczkowych, który do tej pory (na analizie II) zapisywany był jako

$$\begin{bmatrix} \dot x \\ \dot y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Wytężywszy pamięć i sięgnąwszy do zasobów wiedzy algebraicznej bylibyśmy pewnie w stanie rozwiązać... Widzimy zatem, że pole wektorowe na rozmaitości zapisane w układzie współrzędnych to nic innego jak układ równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu. Istnienie i jednoznaczność rozwiązania takiego układu dla zadanych warunków początkowych gwarantowana jest przez twierdzenie Cauchy'ego. Zadanie warunków początkowych oznacza wybranie punktu na rozmaitości, przez który krzywa całkowa przechodzi dla parametru $t = 0$. Wiemy już więc, że krzywe całkowe istnieją, przynajmniej lokalnie. Wróćmy teraz do przykładu. Pole wektorowe X zdefiniowane przy pomocy współrzędnych jest określone wszędzie poza biegunem północnym. Czy da się je w sposób gładki dookreślić także w biegunie północnym? W tym celu zamieńmy współrzędne na (a, b) stereograficzne względem bieguna południowego:

$$a = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad b = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Okazuje się, że

$$X = (a + b)\frac{\partial}{\partial a} + (b - a)\frac{\partial}{\partial b}.$$

W biegunie północnym zatem, podobnie jak w południowym, pole jest równe zeru. Krzywą całkową najłatwiej znaleźć korzystając ze współrzędnych sferycznych:

$$X = \frac{\partial}{\partial \varphi} - \sin(\vartheta)\frac{\partial}{\partial \vartheta}.$$

Krzywa całkowa przechodząca przez punkt (φ_0, ϑ_0) to

$$t \longmapsto \gamma(t) = \left(\varphi_0 + t,\, 2 \operatorname{arc\,tg}[\operatorname{tg}\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right) e^t]\right).$$

Zauważmy jaką ciekawą własność ma powyższe rozwiązanie: Zapiszmy krzywą całkową w parametrze s z warunkiem początkowym dla $s = 0$ równym $\gamma(t)$:

$$s \longmapsto \left(\varphi(t) + s, 2 \operatorname{arc\,tg}[\operatorname{tg}\left(\frac{\vartheta(t)}{2}\right) e^s]\right).$$

Ale $\varphi(t) = \varphi_0 + t$ oraz $\vartheta(t) = 2 \operatorname{arc\,tg}[\operatorname{tg}\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right) e^t]$. W szczególności druga współrzędna to:

$$2 \operatorname{arc\,tg}[\operatorname{tg}\left(2 \operatorname{arc\,tg}[\operatorname{tg}\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right) e^t]/2\right) e^s] = 2 \operatorname{arc\,tg}[\operatorname{tg}\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right) e^t e^s] = 2 \operatorname{arc\,tg}[\operatorname{tg}\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right) e^{t+s}]$$

Okazuje się więc, że $s \longmapsto \gamma(s + t)$. Powyższa własność jest ogólną własnością krzywych całkowych. Przesunięcie wzdłuż krzywej całkowej o t jest dyfeomorfizmem rozmaitości M:

$$\Phi_t : M \longrightarrow M$$

o własnościach

$$(1)\;\; \Phi_0(q) = q, \qquad (2)\;\; \Phi_s(\Phi_t(q)) = \Phi_{t+s}(q).$$

Ponadto dla każdego q

$$t \longmapsto \Phi_t(q)$$

jest krzywą całkową pola X. Odwzorowanie

$$\Phi : I \times M \longrightarrow M, \qquad \Phi(t, q) = \Phi_t(q).$$

Nazywane jest *lokalną grupą dyfeomorfizmów* związaną z X. Określenie „grupa" odnosi się tu do własności (1) i (2).♣

Poniższe notatki powstały z użyciem notatek do wykładów Matematyka II i Matematyka III, więc mogą Państwo mieć czasami wrażenie, że autor niepotrzebnie rozdziela włos na czworo. Z drugiej strony jednak „wykładanie kawy na ławę" ma też swoje zalety...

Odwzorowania wieloliniowe. Niech V będzie n-wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem liczb rzeczywistych. *Formą k-liniową* na przestrzeni wektorowej V nazywamy odwzorowanie:

$$\omega : V \times V \times \cdots \times V \longrightarrow \mathbb{R},$$

które jest liniowe ze względu na każdy argument, tzn. dla każdego i, dowolnych wektorów v_j, $j = 1 \dots k$, v_i' i dowolnych $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$\omega(v_1, v_2, \cdots, \lambda v_i + \mu v_i', \cdots, v_k) = \lambda\omega(v_1, v_2, \cdots, v_i, \cdots, v_k) + \mu\omega(v_1, v_2, \cdots, v_i', \cdots, v_k)$$

Z kursu algebry i analizy znają państwo dobrze formy dwuliniowe, szczególnie dwuliniowe symetryczne (np. iloczyn skalarny, druga pochodna funkcji wielu zmiennych obliczona w ustalonym punkcie, tensor bezwładności ciała sztywnego...).

Wśród wszystkich form k-linowych wyróżnimy teraz szczególnie funkcje *antysymetryczne*, to znaczy mające własność

$$\omega(v_1, v_2, \cdots, v_i, \dots, v_j, \cdots, v_k) = -\omega(v_1, v_2, \cdots, v_j, \dots, v_i, \cdots, v_k) \tag{1}$$

dla dowolnych $i \neq j$. Formy k-liniowe antysymetryczne nazywane są też *k-formami antysymetrycznymi*, lub czasem *k-kowektorami*.

Omawiając odwzorowania liniowe i formy dwuliniowe stwierdziliśmy, że własność liniowości powoduje, że odwzorowanie jest jednoznacznie określone przez wartości na wektorach bazowych. Stąd na przestrzeni n-wymiarowej do zdefiniowania formy dwuliniowej potrzeba n^2 liczb:

$$Q : V \times V \to \mathbb{R}, \quad Q_{ij} = Q(e_i, e_j).$$

Jeśli wiadomo, że forma jest symetryczna, wtedy wystarczy $n(n+1)/2$ wartości. Jeśli forma jest antysymetryczna potrzeba jeszcze mniej $n(n-1)/2$, gdyż wyrazy diagonalne Q_{ii} muszą być zero: z warunku antysymetrii wynika, że dla dowolnego $v \in V$

$$Q({\color{red}v}, {\color{blue}v}) = -Q({\color{blue}v}, {\color{red}v})$$

Po opuszczeniu kolorów (w końcu ${\color{red}v}$ i ${\color{blue}v}$ to ostatecznie ten sam wektor v) dostajemy

$$Q(v, v) = -Q(v, v), \tag{2}$$

czyli $Q(v, v) = 0$. Innymi słowy przestrzeń wektorowa wszystkich form dwuliniowych ma wymiar n^2 a podprzestrzenie form symetrycznych i antysymetrycznych wymiary odpowiednio $n(n+1)/2$ i $n(n-1)/2$. Jeśli zauważymy ponadto, że forma, która jest jednocześnie symetryczna i antysymetryczna musi być zerowa, oraz że

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 + n + n^2 - n}{2} = n^2$$

zrozumiemy, że przestrzeń wszystkich form dwuliniowych jest sumą prostą podprzestrzeni form symetrycznych i podprzestrzeni form antysymetrycznych. Każda forma dwuliniowa da się więc rozłożyć w sposób jednoznaczny na część symetryczną i antysymetryczną:

$$Q(v,w) = Q_-(v,w) + Q_+(v,w)$$

$$Q_-(v,w) = \frac{1}{2}[Q(v,w) - Q(w,v)], \quad Q_+(v,w) = \frac{1}{2}[Q(v,w) + Q(w,v)].$$

Dla $k > 2$ także jest prawdą, że forma k-liniowa jest jednoznacznie określona przez wartości na bazie, zatem przestrzeń takich odwzorowań jest przestrzenią wektorową wymiaru n^k. W tej przestrzeni są także wyróżnione podprzestrzenie form symetrycznych i antysymetrycznych, których częścią wspólną jest przestrzeń zerowa, ale podprzestrzenie te nie wyczerpują przestrzeni wszystkich form. Zastanówmy się nad wymiarem przestrzeni $Alt^k(V)$ form antysymetrycznych. Niech ω oznacza formę antysymetryczną. W zbiorze n^k liczb

$$\omega_{i_1 i_2 \cdots i_k} = \omega(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})$$

jest wiele zer. Wystarczy, że w układzie $(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})$ kórykolwiek wektor bazowy powtarza się, a już wartość ω na tym układzie musi być równa zero jak w (2). Jeśli zaś układ $(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})$ nie zawiera powtarzających się wektorów, to wartość ω na tym układzie różni się od wartości ω na układzie zawierającym te same wektory tylko uporządkowane rosnąco ze względu na indeks, tylko znakiem. **Wniosek:** do zdefiniowania k-formy wystarczy tyle liczb ile jest różnych podzbiorów k-elementowych w zbiorze n-elementowym. Z kombinatoryki wiadmo, że jest ich

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{tzn.} \quad \dim Alt^k(V) = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Powyższe rozważania prowadzą także do wniosku, że przestrzeń k-form dla $k > n$ jest zerowa, natomiast przestrzeń n-form ma wymiar równy 1. Dalej zajmiemy się tylko k-kowektorami antysymetrycznymi.

k-kowektory na przestrzeni wektorowej. Niech V będzie przestrzenią wektorową wymiaru n. *k-kowektorem* na przestrzeni V nazywamy ozdwzorowanie

$$\alpha : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{k} \longrightarrow \mathbb{R}$$

liniowe ze względu na każdy argument, tzn. dla dowolnego $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, dowolnych wektorów $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$, $(v'_1, v'_2, \ldots, v'_k)$, dowolnych liczb λ, μ

$$\alpha(v_1, v_2, \ldots, \lambda v_i + \mu v'_i, \ldots, v_k) = \lambda\alpha(v_1, v_2, \ldots, v_i, \ldots, v_k) + \mu(v_1, v_2, \ldots, v'_i, \ldots, v_k),$$

oraz antysymetryczne, tzn

$$\alpha(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \operatorname{sgn}\sigma\alpha(v_1, v_2, \ldots, v_k).$$

Znamy już przynajmniej jeden przykład n-kowektora: Jeśli kolumny macierzy potraktujemy jak elementy $\mathbb{R}^n$ wyznacznik jest n-kowektorem ne $\mathbb{R}^n$. Zbiór wszystkich odwzorowań k-liniowych jest przestrzenią wektorową, a zbiór k-kowektorów jest w niej podprzestrzenią wektorową. Podprzestrzeń tę oznaczamy

$$\bigwedge^k V^*$$

Sensowność tego oznaczenia będzie jasna później. Przypomnijmy sobie własności k-kowektorów. W poniższych wypowiedzach α jest k-kowektorem:

- Jeśli wśród argumentów α którykolwiek z wektorów powtarza się, wartość α na tym układzie wektorów jest równa zero. Wynika z tego, że
- jeśli $v_1, v_2, \ldots, v_k$ jest układem liniowo-zależnym to $\alpha(v_1, v_2, \ldots, v_k) = 0$.
- Jak każde odwzorowanie liniowe α jest jednoznacznie określone na wektorach bazowych. Jeśli $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ jest bazą w V to liczby

$$\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \alpha(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k}), \qquad 0 < i_1 < i_2 < \cdots < i_k < n+1$$

  wyznaczają jednoznacznie odwzorowanie α. Wynika z tego, że
- $\dim \bigwedge^k V^* = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Skoro znamy już wymiar przestrzeni k-kowektorów, przydałby nam się także jakaś wygodna baza. Jako narzędzie do konstrukcji takiej bazy posłuży następujące pojęcie: *lioczynem zewnętrznym* k-kowektora α i l-kowektora β jest $(k+l)$-kowektor zadany wzorem

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \frac{\operatorname{sgn} \sigma}{k! l!} \alpha(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, v_{\sigma(l+2)}, \ldots, v_{\sigma(l)}).$$

Zanim zastanowimy się nad własnościami iloczynu zewnętrznego przyjrzyjmy się przykładom dla konkretnych (niedużych) k i l. Niech $k = 1$ i $l = 1$, czyli α, β są po prostu kowektorami na V. Wtedy $\alpha \wedge \beta$ jest 2-kowektorem określonym wzorem

$$\alpha \wedge \beta(v_1, v_2) = \sum_{\sigma \in S_2} \frac{\operatorname{sgn} \sigma}{1!1!} \alpha(v_{\sigma(1)}) \beta(v_{\sigma(2)}).$$

W grupie permutacji S_2 są tylko dwie permutacje: identyczność (parzysta) i jedna transpozycja $(1\ \ 2)$ (nieparzysta). Wzór przyjmuje więc postać

$$\alpha \wedge \beta(v_1, v_2) = \alpha(v_1)\beta(v_2) - \alpha(v_2)\beta(v_1)$$

Teraz załóżmy, że α jest 2-kowektorem a β kowektorem. Potrzebujemy więc permutacji z S_3. W tej grupie jest sześć permutacji: trzy transpozycje $(1\ \ 2)$, $(1\ \ 3)$, $(2\ \ 3)$ (nieparzyste), dwa cykle $(1\ \ 2\ \ 3)$, $(1\ \ 3\ \ 2)$ i identycznosć. Wzór na iloczyn zewnętrzny przyjmuje postać:

$$\alpha \wedge \beta(v_1, v_2, v_3) = \frac{1}{2!1!} \Big(+\alpha(v_1, v_2)\beta(v_3) - \alpha(v_2, v_1)\beta(v_3) - \alpha(v_1, v_3)\beta(v_2) - \alpha(v_3, v_2)\beta(v_1)$$
$$+\alpha(v_3, v_1)\beta(v_2) + \alpha(v_2, v_3)\beta(v_1) \Big) =$$

Wyrazy zaznaczone tym samym kolorem różnią się jedynie kolejnością argumentów 2-kowektora α. Po uporządkowaniu można je dodać. Trzeba jedynie pamiętać o zmianie znaku przy zamianie kolejności argumentów:

$$= \frac{1}{2!1!}\left(+\alpha(v_1,v_2)\beta(v_3) + \alpha(v_1,v_2)\beta(v_3) - \alpha(v_1,v_3)\beta(v_2) + \alpha(v_2,v_3)\beta(v_1) - \alpha(v_1,v_3)\beta(v_2) + \alpha(v_2,v_3)\beta(v_1)\right) =$$
$$\frac{1}{2}\left(+2\alpha(v_1,v_2)\beta(v_3) - 2\alpha(v_1,v_3)\beta(v_2) + 2\alpha(v_2,v_3)\beta(v_1)\right) =$$
$$\alpha(v_1,v_2)\beta(v_3) - \alpha(v_1,v_3)\beta(v_2) + \alpha(v_2,v_3)\beta(v_1).$$

Ostatecznie

$$\alpha \wedge \beta(v_1,v_2,v_3) = \alpha(v_1,v_2)\beta(v_3) - \alpha(v_1,v_3)\beta(v_2) + \alpha(v_2,v_3)\beta(v_1).$$

Jako ostatniej przyjrzyjmy się sytuacji kiedy oba czynniki iloczynu zewnętrznego są 2-kowektorami. Potrzebujemy teraz permutacji z S_4. Poprzedni przykład pokazuje, że istotny jest jedynie podział argumentów między czynniki. Argumenty jednego 2-kowektora porządkujemy rosnąco dodając podobne składniki. W tym przypadku mamy sześć możliwych podziałów zbioru indeksów $\{1,2,3,4\}$ pomiedzy 2-kowektory α i β:

$$\begin{gathered}
\{1,2,3,4\} = \{1,2\} \cup \{3,4\} \\
\{1,2,3,4\} = \{1,3\} \cup \{2,4\} \\
\{1,2,3,4\} = \{1,4\} \cup \{2,3\} \\
\{1,2,3,4\} = \{2,3\} \cup \{1,4\} \\
\{1,2,3,4\} = \{2,4\} \cup \{1,3\} \\
\{1,2,3,4\} = \{3,4\} \cup \{1,2\}.
\end{gathered}$$

Argumenty z indeksami z pierwszego zbioru będziemy wstawiac do α a z drugiego do β. Pierwszemu z podziałów odpowiadają cztery możliwe permutacje:

$$\mathrm{id}\,, \quad (1\ \ 2), \quad (3\ \ 4), \quad (1\ \ 2)(3\ \ 4)$$

Pierwsza i ostatnia są parzyste, druga i trzecia nieparzyste. Permutacje te mieszają indeksy w ramach podziału, a nie między zbiorami podziału. Wkład od tych czterech permutacji do wzoru na iloczyn $\alpha \wedge \beta$ jest następujący

$$+\alpha(v_1,v_2)\beta(v_3,v_4) - \alpha(v_2,v_1)\beta(v_3,v_4) - \alpha(v_1,v_2)\beta(v_4,v_3) + \alpha(v_2,v_1)\beta(v_4,v_3)$$

Po uporządkowaniu rosnąco argumentów obu 2-kowektorów otrzymujemy wkład

$$+4\alpha(v_1,v_2)\beta(v_3,v_4).$$

Podobnie analizując każdy z możliwych podziałów i odpowiadające każdemu cztery permutacje dostaniemy wzór

$$\alpha\wedge\beta(v_1,v_2,v_3,v_4)=\frac{1}{2!2!}\left(4\alpha(v_1,v_2)\beta(v_3,v_4)-4\alpha(v_1,v_3)\beta(v_2,v_4)+4\alpha(v_1,v_4)\beta(v_2,v_3)\right.$$
$$\left.+4\alpha(v_2,v_3)\beta(v_1,v_4)-4\alpha(v_2,v_4)\beta(v_1,v_3)+4\alpha(v_3,v_4)\beta(v_1,v_2)\right)=$$
$$\alpha(v_1,v_2)\beta(v_3,v_4)-\alpha(v_1,v_3)\beta(v_2,v_4)+\alpha(v_1,v_4)\beta(v_2,v_3)$$
$$+\alpha(v_2,v_3)\beta(v_1,v_4)-\alpha(v_2,v_4)\beta(v_1,v_3)+\alpha(v_3,v_4)\beta(v_1,v_2).$$

Zupełnie nieprzypadkowo współczynniki liczbowe za każdym razem się upraszczają. Oto najważniejsze własności ioczynu zewnętrznego:

- Iloczyn zewnętrzny jest operacją dwuliniową, tzn:

  $$(a\alpha+b\alpha')\wedge\beta=a\alpha\wedge\beta+b\alpha'\wedge\beta,\qquad \alpha\wedge(a\beta+b\beta'=a\alpha\wedge\beta+b\alpha\wedge\beta').$$

  Fakt ten wynika łatwo z definicji.
- Iloczyn zewnętrzny jest łączny, tzn

  $$(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma=\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma).$$

  Dowód tego faktu jest dość nieprzyjemny. Polega na pokazaniu, że lewa i prawa strona obliczona na układzie $k+l+p$ wektorów daje

  $$\sum_{\sigma\in S_{k+l+p}}\frac{\operatorname{sgn}\sigma}{k!l!p!}\alpha(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(k)})\beta(v_{\sigma(k+1)},\ldots,v_{\sigma(k+l)})\gamma(v_{\sigma(k+l+1)},\ldots,v_{\sigma(k+l+p)}).$$

  Istotnie, zajmijmy się najpierw lewą stroną wzoru:

  $$[(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma](v_1,\ldots,v_{k+l+p})=$$
  $$\sum_{\rho\in S_{k+l+p}}\frac{sgn(\rho)}{(k+l)!p!}\;\alpha\wedge\beta(v_{\rho(1)},\ldots,v_{\rho(k+l)}\;\gamma(v_{\rho(k+l+1)},\ldots,v_{\rho(k+l+p)})$$

  Żeby zrealizować iloczyn zwnętrzny $\alpha\wedge\beta$ musimy teraz wykonać sumowanie po wszystkich permutacjach jego argumentów. Można to zrealizować za pomocą zastosowania wszystkich możliwych permutacji $\sigma\in S_{k+l}$ do argumentów premutacji ρ. Co prawda oznacza to zastosowanie permutacji σ i ρ w odwrotnej kolejności niżby to wynikało ze wzoru definicyjnego ilioczynu zewnętrznego, ale ponieważ i tak chhodzi o wysumowanie po wszystkich przestawieniach, ostatecznie różnicy nie ma:

$$\sum_{\rho\in S_{k+l+p}} \frac{sgn(\rho)}{(k+l)!p!}\ \alpha\wedge\beta(v_{\rho(1)},\ldots,v_{\rho(k+l)})\ \gamma(v_{\rho(k+l+1)},\ldots,v_{\rho(k+l+p)}) =$$

$$\sum_{\substack{\rho\in S_{k+l+p}\\ \sigma\in S_{k+m}}} \frac{sgn(\rho)\mathrm{sgn}\,(\sigma)}{(k+l)!p!k!l!}\ \alpha(v_{\rho(\sigma(1))},\ldots,v_{\rho(\sigma(k))})\beta(v_{\rho(\sigma(k+1))},\ldots,v_{\rho(\sigma(k+l))})$$

$$\gamma(v_{\rho(k+l+1)},\ldots,v_{\rho(k+l+p)})$$

W zbiorze układów wektorów

$$(v_{\rho(\sigma(1))},\ldots,v_{\rho(\sigma(k))},v_{\rho(\sigma(k+1))},\ldots,v_{\rho(\sigma(k+l))},v_{\rho(k+l+1)},\ldots,v_{\rho(k+l+p)})$$

to samo uporządkowanie występuje wiele razy. Dla różnych par ρ i σ złożenie $\rho\circ\sigma$ może być takie samo. Traktujemy tutaj permutację $\sigma\in S_{k+l}$ jako element grupy S_{k+l+p} nie ruszający ostatnich p elementów. To samo uporządkowanie (nazwijmy je ω) pojawia się tyle razy, ile jest permutacji σ, gdzyż ustaliwszy σ odpowiednie ρ obliczymy ze wzoru

$$\rho = \omega\circ\sigma^{-1}.$$

Z własności znaku permutacji wiadomo także, że $sgn(\rho)sgn(\sigma) = sgn(\omega)$. Zamiast sumować więc po permutacjach z S_{k+l+p} i S_{k+l} możemy sumować jedynie po permutacjach z S_{k+l+p} uwzględniając każdą permutację $(k+l)!$ razy:

$$\sum_{\substack{\rho\in S_{k+l+p}\\ \sigma\in S_{k+m}}} \frac{sgn(\rho)\mathrm{sgn}\,(\sigma)}{(k+l)!p!k!l!}\ \alpha(v_{\rho(\sigma(1))},\ldots,v_{\rho(\sigma(k))})\beta(v_{\rho(\sigma(k+1))},\ldots,v_{\rho(\sigma(k+l))})$$

$$\gamma(v_{\rho(k+l+1)},\ldots,v_{\rho(k+l+p)}) =$$

$$\sum_{\omega\in S_{k+l+p}} \frac{sgn(\omega)(k+l)!}{(k+l)!p!k!l!}\alpha(v_{\omega(1)},\ldots,v_{\omega(k)})\beta(v_{\omega(k+1)},\ldots,v_{\omega(k+l)})\gamma(v_{\omega(k+l+1)},\ldots,v_{\omega(k+l+p)}) =$$

$$\sum_{\omega\in S_{k+l+p}} \frac{sgn(\omega)}{p!k!l!}\alpha(v_{\omega(1)},\ldots,v_{\omega(k)})\beta(v_{\omega(k+1)},\ldots,v_{\omega(k+l)})\gamma(v_{\omega(k+l+1)},\ldots,v_{\omega(k+l+p)}).$$

Podobnie postąpimy s prawą stroną wzoru. Sumować będziemy po permutacjach $\rho\in S_{k+l+p}$ a następnie $\sigma\in S_{l+p}$ aplikując σ do układu $(k+1,\ldots k+l+p)$. Zauważamy następnie, że σ można traktować jako element S_{k+l+p} nie ruszajacy pierwszych k liczb i że każdy układ wektorów powatarza się z tym samym znakiem $(l+p)!$ razy. W ten sposób dochodzimy do tej samej postaci wzoru po prawej stronie.□

- Iloczyn zewnętrzny w ogólności nie jest przemienny, ale zachodzi wzór:

$$\alpha\wedge\beta = (-1)^{kl}\beta\wedge\alpha.$$

Wspominaliśmy już, że każdy k-kowektor jest zadany przez swoje wartości na układach wektorów bazowych. Wartości te są współrzędnymi k-kowektora w pewnej bazie. Zajdźmy tę bazę. Niech, jak poprzednio, $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ będzie bazą w V. Kowektory tworzące baze dualną oznaczymy $(\epsilon^1, \epsilon^2, \ldots, \epsilon^n)$. Wybierzmy teraz k-elementowy zbiór indeksów $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ i uporządkujemy indeksy rosnąco, tzn. $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_k$. Interesuje nas k-kowektor

$$\epsilon^{i_1} \wedge \epsilon^{i_2} \wedge \cdots \wedge \epsilon^{i_k}.$$

Jeśli w zbiorze I choć jeden indeks powtarza się, to powyższy k-kowektor jest równy zero (zamiana miejscami dwóch czynników powinna powodować zmianę znaku, jednak jeśli czynniki te są jednkowe, tak naprawdę nic się nie zmienia). Możemy więc rozważać tylko takie zbiory indeksów, że $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$. Obliczmy k-kowektor $\epsilon^{i_1} \wedge \epsilon^{i_2} \wedge \cdots \wedge \epsilon^{i_k}$ na układzie wektorów $(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k})$ (zakładamy także, że indeksy w tym układzie wektorów są uporządkowane rosnąco):

$$\epsilon^{i_1} \wedge \epsilon^{i_2} \wedge \cdots \wedge \epsilon^{i_k}(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) = \sum_{\sigma \in S_k} \epsilon^{i_1}(e_{j_{\sigma(1)}}) \cdot \;\cdots\; \cdot \epsilon^{i_k}(e_{j_{\sigma(k)}})$$

W powyższej sumie albo wszystkie skladniki są równe 0, albo jest tylko jeden niezerowy składnik. Wszystkie składniki są równe zero, jeśli zbiory $\{i_1, \ldots, i_k\}$ i $\{j_1, \ldots, j_k\}$ nie są identyczne. Wtedy zawsze przynajmniej jedna ewaluacja $\epsilon^{i_k}(e_{j_{\sigma(k)}})$ w każdym z iloczynów jest równa 0. Jeśli zbiory indeksów są jednakowe wtedy w powyższej sumie jest jeden niezerowy wyraz dla permutacji identycznościowej (założyliśmy początkowo, że indeksy w obu zbiorach są uporządkowane rosnąco). W takiej sytuacji otrzymujemy

$$\epsilon^{i_1} \wedge \epsilon^{i_2} \wedge \cdots \wedge \epsilon^{i_k}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) = \epsilon^{i_1}(e_{i_1}) \cdot \epsilon^{i_1}(e_{i_1}) \cdot \;\cdots\; \cdot \epsilon^{i_k}(e_{i_k}) = 1$$

Postulujemy, że układ k-kowektorów składający się ze wszystkich iloczynów zewnętrznych k kowektorów bazowych z odpowiednio uporządkowanycmi indeksami jest dobrą bazą w $\bigwedge^k V^*$. Liczba k-kowektorów w powyższym układzie się zgadza, tzn jest ich liczba równa wymiarowi przestrzeni. Ponadto układ ten jest liniowo niezależny: wystrczy obliczyć wartości kombinacji liniowej wektorów z tego układu na wszystkich k elementowych ciągach wektorów bazowych e_i z uporządkowanymi rosnąco indeksami. Na każdym z takich ciągów wartość niezerową ma tylko jeden z k-kowektorów, co daje warunkek znikania współczynnika przy tym właśnie k-kowektorze. Okazuje się, że istotnie badany przez nas układ k-kowektorów jest dobrą bazą. Współrzędne rozważane przez nas wcześniej związane są właśnie z tą bazą. Oznacza to, że każdy k-kowektor α można zapisać jako kombinację liniową

$$\alpha = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_k} \epsilon^{i_1} \wedge \epsilon^{i_2} \wedge \cdots \wedge \epsilon^{i_k}$$

k-formy na rozmaitości. Jeśli jako przestrzeń wektorową weźmiemy przestrzeń styczną $\mathsf{T}_q M$ do rozmaitości M w punkcie q, możemy mówić o wielokowektorach na rozmaitości. Mamy wtedy zazwyczaj do dyspozycji bazę w $\mathsf{T}_q M$ pochodzącą od układu współrzędnych oraz dualną do niej bazę w $\mathsf{T}^*_q M$, składającą się z różniczek współrzędnych. Jeśli $(x^1, \ldots, x^n)$ oznaczają współrzędne na n-wymiarowej rozmaitiści M, to k-kowektor w punkcie $q \in M$ jest postaci

$$\sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_k} \mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k}.$$

Załóżmy teraz, że w każdym punkcie powierzchni M, a przynajmniej w każdym punkcie q pewnego otwartego zbioru $\mathcal{O} \subset M$ zadany jest kowektor $\alpha(q)$. mamy więc odwzorowanie

$$\alpha : \mathcal{O} \longrightarrow \bigwedge^k \mathsf{T}^* M.$$

wymagać będziemy dodatkowo, aby współczynniki $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_k}$ zależały od punktu w taki sposób, żeby wyrażone we współrzędnych $(x^1, \dots, x^m)$ były gładkimi funkcjami tych współrzędnych. W dziedzinie jednego układu współrzędnych możemy napisać

$$\alpha = \sum_{i_1 < i_2 \dots < i_k} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_k}(x^1, \dots, x^m) \mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \dots \wedge \mathsf{d}x^{i_k}$$

Odwzorowanie α nazywamy *k-formą* na $\mathcal{O}$. Przykładem 1-formy jest różniczka funkcji

$$\mathsf{d}f = \frac{\partial f}{\partial x^1}\mathsf{d}x^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}\mathsf{d}x^2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^m}\mathsf{d}x^m.$$

Różniczka funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ma postać

$$\mathsf{d}f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathsf{d}x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathsf{d}y.$$

i jest określona we wszystkich punktach $\mathbb{R}^2$ poza $(0, 0)$. W punkcie $(0, 0)$ funkcja f nie jest różniczkowalna. Ta sama funkcja zapisana w biegunowym układzie współrzędnych ma postać

$$f(r, \varphi) = r,$$

zatem jej różniczka to po prostu

$$\mathsf{d}f(r, \varphi) = \mathsf{d}r.$$

Przykładem dwuformy na $\mathbb{R}^2$ jest tzw. forma objętości zorientowanej związana z kanonicznym iloczynem skalarnym na $\mathbb{R}^2$ (o formach objętości dokładniej powiemy później)

$$\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y$$

Tę samą formę możemy wyrazić we współrzędnych biegunowych biorąc pod uwagę, że

$$\mathsf{d}x = \cos\varphi \mathsf{d}r - r \sin\varphi \mathsf{d}\varphi, \quad \mathsf{d}y = \sin\varphi \mathsf{d}r + r\cos\varphi \mathsf{d}\varphi$$

Mnożymy zewnętrznie $\mathsf{d}x$ i $\mathsf{d}y$ wyrażone we współrzędnych biegunowych:

$$\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y = (\cos\varphi \mathsf{d}r - r\sin\varphi \mathsf{d}\varphi) \wedge (\sin\varphi \mathsf{d}r + r\cos\varphi \mathsf{d}\varphi) =$$

$$(\cos\varphi \mathsf{d}r) \wedge (\sin\varphi \mathsf{d}r) + (\cos\varphi \mathsf{d}r) \wedge (r\cos\varphi \mathsf{d}\varphi) + (-r\sin\varphi \mathsf{d}\varphi) \wedge (\sin\varphi \mathsf{d}r) + (-r\sin\varphi \mathsf{d}\varphi) \wedge (r\cos\varphi \mathsf{d}\varphi) =$$

$$\cos\varphi \sin\varphi \mathsf{d}r \wedge \mathsf{d}r + r\cos^2\varphi \mathsf{d}r \wedge \mathsf{d}\varphi - r\sin^2\varphi \mathsf{d}\varphi \wedge \mathsf{d}r - r^2 \sin\varphi \cos\varphi \mathsf{d}\varphi \wedge \mathsf{d}\varphi$$

Pierwszy i ostatni składnik są równe zero, ponieważ iloczyn zewnętrzny dwóch identycznych kowektorów jest równy zero. Oznacza to, że

$$\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y = r\cos^2\varphi \mathsf{d}r \wedge \mathsf{d}\varphi - r\sin^2\varphi \mathsf{d}\varphi \wedge \mathsf{d}r$$

Korzystając z własności iloczynu zewnętrznego piszemy

$$\mathsf{d}\varphi \wedge \mathsf{d}r = -\mathsf{d}r \wedge \mathsf{d}\varphi,$$

zatem ostatecznie

$$\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y = (r\cos^2\varphi + r\cos^2\varphi)\mathsf{d}r \wedge \mathsf{d}\varphi = r\,\mathsf{d}r \wedge \mathsf{d}\varphi.$$

Zauważmy, że w zbiorze $\bigwedge^k \mathsf{T}^*M$ wprowadzić można strukturę wiązki wektorowej podobnie jak robiliśmy w samym T^*M. Ponieważ zewnętrznie mnożymy kowektory zaczepione w jednym punkcie istnieje dobrze określone odwzorowanie

$$\wedge^k\pi_m : \bigwedge^k \mathsf{T}^*M \longrightarrow M$$

Współrzędne w $\mathcal{O} \subset M$ dostarczają bazy w każdej z przestrzeni $\bigwedge^k \mathsf{T}^*_q M$ co pozwala wprowadzić współrzędne w $(\wedge^k\pi_m)^{-1}(\mathcal{O})$. Zamiana współrzędnych ma w ustalonym punkcie charakter liniowy. Używając tego języka powiedzielibyśmy, że k-forma na rozmaitości to gładkie cięcie wiązki k-kowektorów $\wedge^k\pi_m$.