

Geometria Różniczkowa II

wykład piąty

Wykład piąty poświęcony będzie pojęciu całkowalności dystrybucji oraz fundamentalnemu dal tego zagadnienia twierdzeniu Frobeniusa. Przy okazji postanowiłam sprawdzić kim był autor twierdzenia. Oto on: Ferdinand Georg Frobenius (ur. 26 października 1849 w Berlinie Charlottenburgu, zm. 3 sierpnia 1917 w Berlinie), matematyk niemiecki. Przypomnijmy podstawowe

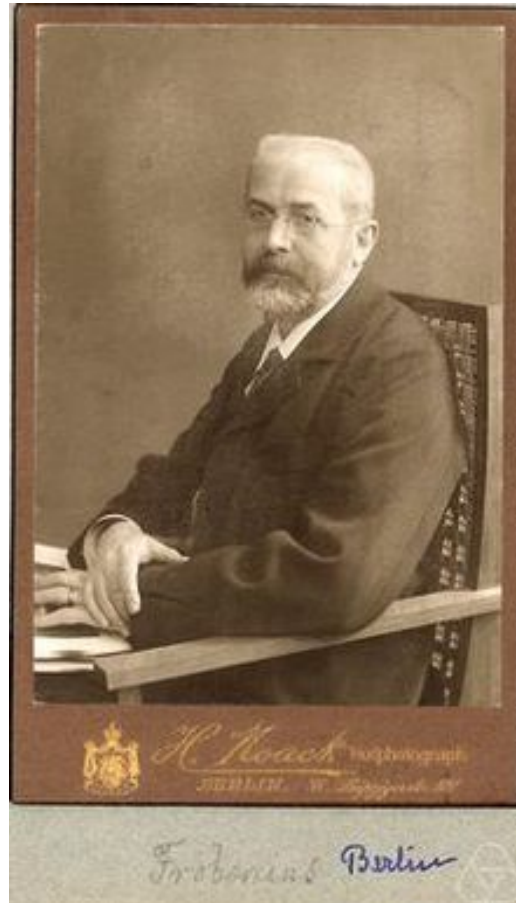


Fig. 1: F.G. Frobenius

pojęcie

Definicja 1 *Dystrybucją* wymiaru k na rozmaitości M wymiaru n nazywamy podzbiór \mathcal{D} wiązki stycznej TM taki, że dla każdego $x \in M$ zbiór $\mathcal{D}_x = T_x M \cap \mathcal{D}$ jest k -wymiarową podprzestrzenią wektorową w $T_x M$. Dystrybucja jest *różniczkowalna*, jeśli dla każdego punktu x istnieje otoczenie \mathcal{U} i k pól wektorowych X_1, \dots, X_k takich, że dla $y \in \mathcal{U}$ $\mathcal{D}_y = \langle X_1(y), \dots, X_k(y) \rangle$.

Szczególnym przypadkiem dystrybucji jest dystrybucja jednowymiarowa rozpięta przez jedno nieznikające pole wektorowe. W takim przypadku wiadomo, że w otoczeniu każdego punktu rozmaitość M „utkana” jest z jednowymiarowych podrozmaitości mających tę własność, że dystrybucja jest do nich styczna. Te podrozmaitości to obrazy krzywych całkowych pola. Przechodząc od pola wektorowego do dystrybucji gubimy po prostu informację o parametryzacji

krzywych całkowych. Interesowało nas będzie, czy dystrybucje wymiaru $k > 1$ także związane są z rodziną podrozmaitości do których wektory z dystrybucji są styczne. Doprecyzujemy:

Definicja 2 *Podrozmaitością całkową* dystrybucji \mathcal{D} nazywamy taką podrozmaitość $N \subset M$, że dla każdego $x \in N$ przestrzeń styczna $T_x N$ jest podprzestrzenią w \mathcal{D}_x . Mówimy, że dystrybucja \mathcal{D} jest zupełnie całkowalna, jeżeli przez każdy punkt $x \in M$ przechodzi dokładnie jedna podrozmaitość całkowa wymiaru k równego wymiarowi dystrybucji.

Zanim przejdziemy do sformułowania i udowodnienia twierdzenia przyrzyjmy się przykładowi, który pomoże lepiej zrozumieć kwestię całkowalności dystrybucji.

Przykład 1 Niech $M = \mathbb{R}^3$. Rozważmy dwuwymiarową dystrybucję \mathcal{D} rozpiętą przez

$$X_1(x, y, z) = \partial_x + z\partial_z, \quad X_2(x, y, z) = \partial_y + z^2\partial_z.$$

Bez wątpliwości podrozmaitością całkową wymiaru 2 jest płaszczyzna $\{z = 0\}$. Gdyby dystrybucja ta była zupełnie całkowalna, powinniśmy być w stanie znaleźć dwuwymiarowe podrozmaitości całkowe przechodzące przez inne punkty. Sprawdźmy punkt $a = (0, 0, 1)$. Oczywiście jeśli taka podrozmaitość istnieje, to należą do niej krzywe całkowe pól X_1 i X_2 przechodzące przez punkt a . Nawet więcej - taką rozmaitość można znaleźć, przynajmniej w otoczeniu a , postępując według następującego planu: z punktu a wypuszczamy krzywą całkową $t \mapsto \varphi_t^1(a)$ dla pola X_1 , a następnie z każdego punktu γ_1 wypuszczamy krzywe całkowe pola X_2 , tzn. $s \mapsto \varphi_s^2(\varphi_t^1(a))$. W ten sposób odwzorowanie

$$(s, t) \mapsto \varphi_s^2(\varphi_t^1(a)) \in M$$

powinno być lokalną parametryzacją podrozmaitości całkowej naszej dystrybucji w otoczeniu a . Trzeba jeszcze tylko sprawdzić, czy rzeczywiście w punktach innych od a przestrzeń styczna do powstałej powierzchni jest równa dystrybucji. Plan niezły, pora na realizację. Krzywa całkowa pola X_1 przechodząca przez a to

$$t \mapsto \varphi_t^1(a) = (t, 0, e^t).$$

Powstała ona jako rozwiązanie układu równań różniczkowych

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = z \end{cases}$$

z warunkiem początkowym $x(0) = 0, y(0) = 0, z(0) = 1$. Drugie pole wektorowe jest równoważne układowi równań

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = z^2 \end{cases}$$

Rozwiązanie zapiszemy w parametrze s z warunkiem początkowym dla $s = 0$ równym $\varphi_t^1(a)$. Otrzymamy parametryzację dwuwymiarowej powierzchni (nazwijmy ją N):

$$(s, t) \mapsto \left(t, s, \frac{1}{e^{-t} - s}\right).$$

Powierzchnię tę można też opisać równaniem

$$z = \frac{1}{e^{-x} - y}.$$

Ze względu na to, że pole X_2 jest niezupełne, dziedzina jest ograniczona ze względu na y , jednak możemy podstawić np $x = 1/2$, $y = 1/2$ i otrzymamy $z = \frac{1}{1/\sqrt{e}-1/2} = \frac{1}{\alpha}$. Oznaczmy punkt $(1/2, 1/2, 1/\alpha)$ przez b . Sprawdźmy, czy przestrzeń styczna do powierzchni N w punkcie b i podprzestrzeń \mathcal{D}_b jest jednakowa. W punkcie b mamy

$$\mathcal{D}_b = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/\alpha \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/\alpha^2 \end{bmatrix} \right\rangle$$

zaś przestrzeń styczna do naszej powierzchni to

$$\mathbb{T}_b N = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ (1/\alpha^2)e^{-1/2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/\alpha^2 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Łatwo stwierdzić, że $\mathbb{T}_b N + \mathcal{D}_b = \mathbb{R}^3$, zatem $\mathbb{T}_b N \neq \mathcal{D}_b$. Powierzchnia N nie jest podrozmaitością całkową \mathcal{D} . Dlaczego tak nam wyszło? Plan był przecież dobry! Podążając za planem posłużyliśmy się najpierw polem X_1 do wyprodukowania krzywej całkowej, a potem polem X_2 . A co by było, gdyby użyć tych pól odwrotnie? Gdyby dystrybucja była całkowalna powinniśmy dostać tę samą podrozmaitość całkową. A co wychodzi naprawdę? Startując z X_2 a potem podążając wzdłuż X_1 otrzymujemy powierzchnię M daną równaniem

$$x = \frac{e^y}{1 - y}.$$

Na obrazku (Fig.2) widać, że jakkolwiek obie powierzchnie zawierają a (wspólny punkt po lewej), to jednak są nieco inne. W szczególności punkty po prawej stronie obrazka odpowiadają współrzędnym $x = 1/2$ i $y = 1/2$. Punkt położony na powierzchni czerwonej to b .



Zamiana rolami pól wektorowych w powyższym przykładzie doprowadziła do wyprodukowania innych „kandydatów” na powierzchnie całkowane. Rozważania zawierające wędrowanie po krzywych całkowych pól wektorowych w rozmaitej kolejności pojawiają się zazwyczaj w kontekście komutatora pól wektorowych. W tej sytuacji nikogo nie zdziwi, że twierdzenie dotyczące całkowalności dystrybucji również się do tego komutatora odwołuje:

Twierdzenie 1 (F.G. Frobenius) *Dystrybucja \mathcal{D} na rozmaitości M jest zupełnie całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu $x \in M$ istnieje otoczenie \mathcal{U} i układ pól wektorowych X_1, \dots, X_k rozpinający tę dystrybucję taki, że dla dowolnego $y \in \mathcal{U}$*

$$[X_i, X_j](y) = \alpha_{ij}^m(y) X_m,$$

gdzie α_{ij}^m są gładkimi funkcjami na \mathcal{U} .

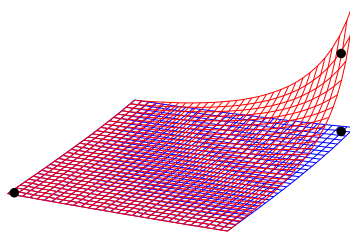


Fig. 2: Powierzchnie N (czerwona) i M (niebieska)

Własność zamknięcia ze względu na nawias Liego nazywana jest *inwolutywnością* dystrybucji. Twierdzenie Frobeniusa można więc krótko sformułować mówiąc, że dystrybucja jest zupełnie całkowalna wtedy i tylko wtedy gdy jest inwolutywna. Pozostaje przyjrzeć się dowodowi twierdzenia. Prezentuję go w postaci zaczerpniętej z publikacji Alberta T Lundell'a "A Short Proof of the Frobenius Theorem" Proc. Amer. Math. Soc. vol. 116, No 4 (1992).

Dowód: Dowodzić będziemy jedynie, że z inwolutywności wynika całkowalność. Twierdzenie odwrotne jest oczywiste. Weźmy więc dowolny układ pól Y_1, \dots, Y_k rozpinający \mathcal{D} i zapiszmy go w układzie współrzędnych $(y^i)_{i=1}^n$. Dysponujemy zatem układem funkcji gładkich a_j^i określonych na zbiorze \mathcal{U} takich, że

$$Y_j = a_j^i \partial_{y^i}.$$

Pola Y_j rozpinają \mathcal{D} w każdym punkcie \mathcal{U} , w szczególności są więc liniowo niezależne. Macierz o wyrazach a_j^i jest więc maksymalnego rzędu (k) w każdym punkcie \mathcal{U} . Przestawiając ewentualnie kolejność współrzędnych zadamy, aby nieznikającym minorem tej macierzy był ten zaznaczony na czerwono:

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^k & a_1^{k+1} & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^k & a_2^{k+1} & \dots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_k^1 & a_k^2 & \dots & a_k^k & a_k^{k+1} & \dots & a_k^n \end{array} \right]$$

Czerwoną podmacierz oznaczmy A . Ma ona nieosobliwy wyznacznik, więc A^{-1} istnieje. Zdefiniujmy pola wektorowe X_i wzorem

$$X_i = (A^{-1})_i^j Y_j.$$

Pola te rozpinają \mathcal{D} oraz są postaci

$$X_i = \partial_{y^i} + b_i^j \partial_{y^j}, \quad i = 1 \dots k, \quad j = k + 1 \dots n.$$

Układ pól (X_i) jest lepszy niż (Y_i) , bo pola te nie tylko stanowią inwolutywny układ ale wręcz

$[X_i, X_j] = 0$. Sprawdźmy:

$$\begin{aligned} [X_i, X_j] &= [\partial_i + b_i^p \partial_{y^p}, \partial_{y^j} + b_j^r \partial_{y^r}] = \\ &= [\partial_{y^i}, \partial_{y^j}] + [b_i^p \partial_{y^p}, \partial_{y^j}] + [\partial_{y^i}, b_j^r \partial_{y^r}] + [b_i^p \partial_{y^p}, b_j^r \partial_{y^r}] = \\ &= -\partial_{y^j}(b_i^p) \partial_{y^p} + \partial_{y^i}(b_j^r) \partial_{y^r} + b_i^p \partial_{y^p}(b_j^r) \partial_{y^r} - b_j^r \partial_{y^r}(b_i^p) \partial_{y^p} \end{aligned}$$

Ponieważ p i r przebiegają wartości $k+1 \dots n$ to $[X_i, X_j] \in \langle \partial_{y^{k+1}}, \dots, \partial_{y^n} \rangle$. Z drugiej strony $[X_i, X_j] \in \langle X_1, \dots, X_k \rangle$, a przecięcie obu tych przestrzeni jest trywialne. W dalszym ciągu pokażemy, że w takim przypadku istnieje, być może na nieco mniejszym zbiorze, układ współrzędnych (x^i) taki, że $X_i = \partial_{x^i}$. Dowód przeprowadzamy używając indukcji względem k . Dla $k=1$ fakt, iż istnieje układ współrzędnych w którym pole X_1 jest współrzędnościowe jest treścią poniższego lematu:

Lemat 1 Niech Q będzie rozmaitością różniczkową a X polem wektorowym na Q takim, że w ustalonym punkcie $p \in Q$ $X(p) \neq 0$. Istnieje wówczas układ współrzędnych (q^i) w pewnym otoczeniu p taki, że $X = \partial_{q^1}$.

Dowód lematu: Niech $\dim Q = n$ Wybierzmy najpierw jakikolwiek układ współrzędnych (u^i) w otoczeniu \mathcal{O} punktu p taki, że $u^i(p) = 0$ oraz w punkcie p $X(p) = \partial_{u^1}$. Mapę związaną z tym układem współrzędnych oznaczmy przez U , tzn $U : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $U(x) = (u^1(x), \dots, u^n(x))$. Taki układ współrzędnych zawsze można znaleźć, na przykład dokonując liniowej zamiany zmiennych w dowolnym początkowym układzie współrzędnych. Z polem wektorowym X związana jest jednoparametrowa grupa dyfeomorfizmów φ_t . Dla pewnego ε oraz pewnego otoczenia \mathcal{W} punktu 0 w \mathbb{R}^{n-1} odwzorowanie $\sigma :]-\varepsilon, \varepsilon[\times \mathcal{W}$ określone wzorem

$$\sigma(t, q^2, \dots, q^n) = \varphi_t(U^{-1}(0, q^2, \dots, q^n))$$

jest dobrze określone i gładkie. Pochodna tego odwzorowania w punkcie $0 \in \mathbb{R}^n$ jest odwzorowaniem liniowym niezdegenerowanym, gdyż $T\sigma(\partial_{q^1}) = X(q) = \partial_{u^1}$, ponadto $T\sigma(\partial_{q^i}) = \partial_{u^i}$. Wiadomo także, że poza punktem 0 zachodzi $T\sigma(\partial_{q^1}) = X(q)$. Z twierdzenia o lokalnej odwracalności wynika, że istnieje w pewnym otoczeniu $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}$ punktu p odwzorowanie odwrotne

$$\sigma^{-1} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

które może zostać użyte jako mapa szukanego układu współrzędnych. Istotnie bowiem

$$T(\sigma^{-1})(X) = \partial_{q^1}$$

w całym otoczeniu \mathcal{S} . \square

Powracamy do dowodu indukcyjnego Załóżmy teraz, że twierdzenie o istnieniu odpowiedniego układu współrzędnych zachodzi dla $k-1$ pól wektorowych i sprawdźmy co dzieje się dla wymiaru k . Weźmy więc $k-1$ pól komutujących X_1, \dots, X_{k-1} i taki układ współrzędnych (v^i) dla których $X_i = \partial_{v^i}$ dla $i = 1 \dots k-1$. Zapiszmy pole X_k w tych współrzędnych: $X_k = a^i \partial_{v^i}$. Nadal obowiązuje $[X_i, X_j] = 0$. Zatem dla dowolnego $i < k$ mamy

$$0 = [X_i, X_k] = [\partial_{v^i}, a^j \partial_{v^j}] = (\partial_{v^i} a^j) \partial_{v^j}$$

Współczynniki $\partial_{v^i} a^j$ znikają, co oznacza, że funkcje a^j nie zależą od pierwszych $k - 1$ współrzędnych. Niech V będzie polem

$$V = X_k - \sum_{i=1}^{k-1} a^i \partial_{v^i} = \sum_{i=k}^n a^i \partial_{v^i}.$$

Pole V zależy jedynie od współrzędnych v^k, v^{k+1}, \dots, v^n . Możemy więc dokonać zamiany współrzędnych $(v^k, v^{k+1}, \dots, v^n)$ na (x^k, \dots, x^n) w taki sposób, aby $V = \partial_{x^k}$ nie zmieniając jednocześnie pierwszych $k - 1$ współrzędnych. Ostatecznie więc biorąc „nowe” x^i dla $i > k - 1$ oraz dla $i < k$ $x^i = v^i$ otrzymujemy układ współrzędnych dobry dla dystrybucji rozpiętej przez X_1, \dots, X_{k-1}, V , która jest oczywiście równa dystrybucji rozpiętej przez X_1, \dots, X_{k-1}, X_k . To, że i stnieją i jak wyglądają podrozmaności całkowite dystrybucji \mathcal{D} jest teraz oczywiste. \square