Analiza I R

tydzień szósty, 5.11.2012 – 11.11.2012

Zadanie 1. Wykazać, że kula domknięta jest domknięta.

Zadanie 2. Niech A^d oznacza zbiór punktów skupienia zbioru A. Wykazać, że $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$.

Zadanie 3. Niech (X, d), (Y, ρ) będą przestrzeniami metrycznymi, $f : X \to Y$ odwzorowaniem, a $\mathrm{Graph}(f) = \{(x, y) \in X \times Y : \ y = f(x)\}$ jego wykresem. Wykazać, że jeśli f jest odwzorowaniem ciągłym to $\mathrm{Graph}(f)$ jest zbiorem domkniętym. Znaleźć kontrprzykład pokazujący, że twierdzenie odwrotnie nie jest prawdziwe. Wykazać także, że przy dodatkowym założeniu, że Y jest zwarta, twierdzenie odwrotne jest prawdziwe.

Zadanie 4. Wykazać, że jeśli $f : [a, b[\to [a, b[$ jest ciągłą surjekcją to f ma punkt stały. Wskazówka: własność Darboux dla funkcji ciągłych.

Zadanie 5. Zbadać ciągłość następujących funkcji $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Zadanie 6. Udowodnić, że funkcja $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ określona na $]-1, 0[\cup]0, \infty[$ da się przedłużyć do funkcji różniczkowalnej na $]-1, \infty[$. Obliczyć $f(0)$, $f'(0)$. Wykazać, że f jest malejąca, a $x \mapsto (1 + x)f(x)$ rosnąca. Wskazówka: przydatne oszacowania

$$\frac{x}{1+x} \leqslant \log(1+x) \leqslant x, \qquad 1 + x \leqslant e^x \leqslant \frac{1}{1-x} \ \text{ dla } \ x < 1.$$

Zadanie 7. Obliczyć pochodną $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(x) + \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$. Na jakim zbiorze funkcja ta jest określona?

Zadanie 8. Badając własności funkcji $x \mapsto e^{-x}x^e$ stwierdzić, która z liczb e^π czy π^e jest większa.

Zadanie 9. Dla wszystkich, którzy potrzebują praktyki w różniczkowaniu: Obliczyć pochodne poniższych funkcji wszędzie tam, gdzie są one różniczkowalne.

(a) $f(x) = \dfrac{1-x^3}{1-x^5}$;

(b) $f(x) = \dfrac{2}{(1-x^2)(1+x^4)}$;

(c) $f(x) = \dfrac{\operatorname{arc\,tg} x}{\arcsin x}$;

(d) $f(x) = e^x(\sin x + \cos x)$;

(e) $f(u) = \sin^4 5x$;

(f) $f(x) = \log(x + \sqrt{x^4+4})$;

(g) $f(x) = \log(\log(\log x))$;

(h) $f(x) = \sin(\cos x) + \cos(\sin x)$;

(i) $f(x) = 2^{\operatorname{tg} \frac{1}{x}}$;

(j) $f(x) = e^{\operatorname{arc\,tg}^3 \sqrt{x+4}}$;

(k) $f(x) = \log^2(\arcsin^3 \sqrt{x})$;

(l) $f(x) = \log(\dfrac{1}{x} + \sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}})$;

(m) $f(x) = \sinh^3 4x$;

(o) $f(x) = \operatorname{tgh}^5(2e^{\sqrt{x}} - 1)$;

(p) $f(x) = \sinh(\log(x + \sqrt{x^2+1})$;

(r) $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$;

(s) $f(x) = (x+1)^{\frac{1}{\sin x}}$;

(t) $f(x) = x^{\sin x}$;

(u) $f(x) = x^{x^2}$;

(w) $f(x) = x^{x^x}$;

(x) $f(x) = \log_2(x^4+1)$;

(y) $f(x) = \log_x(x^4+1)$;

(z) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} \sin x \log x$;