Geometria Różniczkowa II

wykład szósty i niemal cały siódmy

Dla uzupełnienia wiedzy ogólnej zajmiemy się dzisiaj klasyczną geometrią powierzchni zanurzonych. Niech więc M będzie powierzchnią wymiaru k zanurzoną w $\mathbb{R}^n$. Zazwyczaj zakładać będziemy, że dysponujemy lokalną parametryzacją tej powierzchni:

$$\Phi : \mathbb{R}^k \supset \mathcal{O} \ni (u^1, \dots u^k) \longmapsto (x^1(u), \dots x^n(u)) \in \mathbb{R}^n.$$

Wszystkie pojęcia teoretyczne ilustrować będziemy rachunkami dla górnej powłoki hiperboloidy dwupowłokowej tzn dla powierzchni

$$\mathcal{H} = \{(x, y, z) : \quad z^2 - x^2 - y^2 = 1, \qquad z > 0\}.$$

Używać będziemy globalnej parametryzacji

$$R^2 \ni (a, b) \longmapsto (a, b, \sqrt{1 + a^2 + b^2}) \in \mathcal{H} \subset \mathbb{R}^3$$

Wiązka styczna do $\mathbb{R}^n$ ma strukturę wiązki trywialnej, tzn. $\mathsf{T}\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Wiązka styczna do powierzchni M trywialna nie jest, jednak przestrzeń styczna $\mathsf{T}_q M$ w każdym punkcie $q \in M$ jest podprzestrzenią wektorową w niebieskiej kopii $\mathbb{R}^n$. Wektory styczne do powierzchni M można zapisywać w bazie $(\partial_{u^1}, \dots, \partial_{u^k})$ związanej z parametryzacją powierzchni ale także w bazie niebieskiego $\mathbb{R}^n$ $(\partial_{x^1}, \dots, \partial_{x^n})$. Dzięki strukturze trywialnej wiązki $\mathsf{T}\mathbb{R}^n$ można różniczkować obiekty tensorowe po współrzędnych. Różniczkowanie takie w kierunku wektora v oznaczać będziemy D_v.

Przestrzeń styczna $\mathsf{T}\mathcal{H}$ rozpięta jest przez wektory

$$\partial_a = \partial_x + \frac{a}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}} \partial_z, \qquad \partial_b = \partial_y + \frac{b}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}} \partial_z.$$

Definicja 1 *Pierwszą formą podstawową g na powierzchni M nazywać będziemy obcięcie iloczynu skalarnego z niebieskiego $\mathbb{R}^n$ do przestrzeni stycznej do M*

Oczywiście wraz z iloczynem skalarnym na $\mathsf{T}M$ dostajemy jak zwykle izomorfizm $G : \mathsf{T}M \to \mathsf{T}^*M$. Macierz g w bazie związanej z parametryzacją otrzymujemy licząc iloczyny skalarne $g_{ij} = (\partial_{u^i} | \partial_{u^j})$. Na hiperboloidzie dostajemy

$$(\partial_a | \partial_a) = 1 + \frac{a^2}{1 + a^2 + b^2},$$
$$(\partial_b | \partial_b) = 1 + \frac{b^2}{1 + a^2 + b^2},$$
$$(\partial_a | \partial_b) = \frac{ab}{1 + a^2 + b^2},$$

tzn. macierz formy g jest postaci

$$[g] = \begin{bmatrix} 1 + \dfrac{a^2}{1 + a^2 + b^2} & \dfrac{ab}{1 + a^2 + b^2} \\ \dfrac{ab}{1 + a^2 + b^2} & 1 + \dfrac{b^2}{1 + a^2 + b^2} \end{bmatrix}.$$

W formie tensorowej zapisalibyśmy to tak:

$$g = \left(1 + \frac{a^2}{1+a^2+b^2}\right) \mathsf{d}a \otimes \mathsf{d}a + \frac{ab}{1+a^2+b^2}\left(\mathsf{d}a \otimes \mathsf{d}b + \mathsf{d}b \otimes \mathsf{d}a\right) + \left(1 + \frac{b^2}{1+a^2+b^2}\right) \mathsf{d}b \otimes \mathsf{d}b$$

Jak już wspomnieliśmy pola wektorowe na $\mathbb{R}^n$ różniczkować można w kierunku wektorów stycznych „po współrzędnych”. Dotyczy to także pól określonych jedynie na M i stycznych do M, jednak powinny być one do tego celu wyrażone w niebieskiej bazie. Można je różniczkować jedynie w kierunku wektorów stycznych do M i należy wziąć pod uwagę, że wynik różniczkowania nie musi być styczny do M. Na przykład $D_{\partial_a}\partial_a$ ma jedynie składową w kierunku ∂_z, zatem nie może być styczny do $\mathcal{H}$:

$$D_{\partial_a}\partial_a = \left(\frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}} - \frac{a^2}{(\sqrt{1+a^2+b^2})^3}\right)\partial_z = \frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}}\left(1 - \frac{a^2}{1+a^2+b^2}\right)\partial_z = \frac{1+b^2}{(\sqrt{1+a^2+b^2})^3}\partial_z$$

Oczywiście ze względu na istnienie iloczynu skalarnego w $\mathbb{R}^n$ możemy znaleźć rozkład $\mathbb{R}^n = \mathsf{T}_qM \oplus \mathsf{T}_qM^\perp$ i korzystając z niego rozłożyć uzyskany wynik na część prostopadłą do M i styczną do M. Jeśli X jest polem na M a $v \in \mathsf{T}_qM$ wektorem stycznym to D_vX jest elementem $\mathsf{T}_q\mathbb{R}^n$: $D_vX = (D_vX)^\parallel + (D_vX)^\perp$. Część styczną oznaczamy zazwyczaj ∇_vX, tzn

$$\nabla_vX = D_vX - (D_vX)^\perp. \tag{1}$$

Obliczmy $\nabla_{\partial_a}\partial_a$. W tym celu przyda nam się pole wektorów normalnych na $\mathcal{H}$ o długości 1:

$$N = \frac{1}{\sqrt{1+2a^2+2b^2}}\left(-a\partial_x - b\partial_y + \sqrt{1+a^2+b^2}\,\partial_z\right).$$

Znajdziemy teraz $\nabla_{\partial_a}\partial_a$:

$$\nabla_{\partial_a}\partial_a = D_{\partial_a}\partial_a - (N|D_{\partial_a}\partial_a)N = \frac{1+b^2}{(1+2a^2+2b^2)(1+a^2+b^2)}\left(a\partial_x + b\partial_y + \frac{a^2+b^2}{\sqrt{1+a^2+b^2}}\partial_z\right) = a\partial_a + b\partial_b.$$

Zdefiniowana w (1) operacja ∇ ma następujące własności:

- $\nabla_{v+w}X = \nabla_vX + \nabla_wX$,
- $\nabla_{\lambda v}X = \lambda\nabla_vX$,
- $\nabla_v(X+Y) = \nabla_vX + \nabla_vY$,
- $\nabla_v(fX) = (vf)X + f(q)\nabla_vX$.

Jedynie ostatnia własność wymaga sprawdzenia. Operacja D_v jest różniczkowaniem, więc

$$D_v(fX) = (vf)X + f(q)D_vX = (vf)X + f(q)(D_vX)^{\parallel} + f(q)(D_vX)^{\perp} = \\ (vf)X + f(q)\nabla_vX + f(q)(D_vX)^{\perp}$$

Część oznaczono na czerwono jest styczna do M, stanowi zatem $\nabla_v(fX)$. Warunki wymienione wyżej to własności pochodnej kowariantnej. Operacja ∇ jest więc pochodną kowariantną na M związaną z koneksją liniową w $\mathsf{T}M$. Z drugiej strony wiadomo, że na M istnieje koneksja Levi-Civitty związana z metryką. Czy to jest ta sama koneksja? Ponieważ koneksja metryczna jest jedyna wystarczy sprawdzić, czy koneksja związana z pochodną kowariantną jest beztorsyjna oraz czy pochodna kowariantna metryki znika. Zacznijmy od pochodnej kowariantnej metryki. Rozkład $\mathbb{R}^n$ na część styczną i prostopadłą do M ma swoje odbicie także po stronie kostycznej. $\mathsf{T}^*_q\mathbb{R}^n$ także rozkłada się na sumę prostą:

$$\mathsf{T}_q\mathbb{R}^n = \mathsf{T}_qM \oplus (\mathsf{T}_qM)^{\perp}, \qquad \mathsf{T}^*_q\mathbb{R}^n = \mathsf{T}^*_qM \oplus (\mathsf{T}_qM)^{\circ}$$

Niech teraz α będzie formą na M, zgodnie z regułą Leibniza

$$D_v(\alpha(X)) = (\nabla_v\alpha)(X) + \alpha(\nabla_v(X)).$$

Z drugiej strony wiadomo, że D_v jest różniczkowaniem, więc

$$D_v(\alpha(X)) = (D_v\alpha)(X) + \alpha(D_vX) = (D_v\alpha)^{\parallel}(X) + (D_v\alpha)^{\perp}(X) + \alpha(\nabla_vX) + \alpha((D_vX)^{\perp})$$

Części zaznaczone na czerwono znikają. Pierwsza, ponieważ $(D_v\alpha)^{\perp}$ należy do anihilatora $\mathsf{T}M$ a X do $\mathsf{T}M$, a drugi, bo $(D_vX)^{\perp}$ należy do przestrzeni prostopadłej do $\mathsf{T}M$ a α do T^*M. Z porównania otrzymujemy, że

$$\nabla_v\alpha = (D_v\alpha)^{\parallel} = D_v\alpha - (D_\alpha)^{\perp}.$$

Okazuje się, że potrafimy różniczkować kowariantnie także formy na M. Możemy więc także pomyśleć o różniczkowaniu formy dwuliniowej g. Skorzystamy jak zwykle z reguły Leibniza

$$\nabla_v(g(X,Y)) = \nabla_vg(X,Y) + g(\nabla_vX,Y) + g(X,\nabla_vY) \tag{2}$$

Z drugiej strony

$$\nabla_v(g(X,Y)) = D_v(g(X,Y)) = (D_v\tilde{g})(X,Y) + \tilde{g}(D_vX,Y) + \tilde{g}(X,D_vY). \tag{3}$$

W powyższym wzorze $\tilde{g}$ oznacza kanoniczną metrykę w $\mathbb{R}^3$. Metryka ta jest stała, tzn jej pochodna w dowolnym kierunku znika (część czerwona). W pozostałych dwóch składnikach możemy zastąpić D_vX przez ∇_vX oraz D_vY przez ∇_vY, gdyż iloczyny skalarne z częścią prostopadłą znikają. Ostatecznie

$$D_v(g(X,Y)) = g(\nabla_vX,Y) + g(X,\nabla_vY) \tag{4}$$

Z porównania (2), (3) i (3) wynika, że $(\nabla_vg)(X,Y) = 0$. Z dowolności X, Y wnioskujemy $\nabla_vX = 0$. Pozostaje do sprawdzenia beztorsyjność.

$$\nabla_XY - \nabla_YX = D_XY - (D_XY)^{\perp} - D_YX - (D_YX)^{\perp} = \\ D_XY - D_YX - ((D_XY) - (D_YX))^{\perp} = [X,Y] - [X,Y]^{\perp} = [X,Y].$$

Nawias Liego pól stycznych jest styczny do M, więc jego część prostopadła znika. Dla czystości rachunku należałyby tu rozważać rozszerzenie pól X i Y poza M. Można użyć dowolnego rozszerzenia. Koneksja zdefiniowana za pomocą rozkładu pochodnej na część styczną i prostopadłą okazała się być koneksją metryczną. Współczynniki Christoffela tej koneksji wyznaczyć można zgodnie ze wzorem

$$\nabla_{\partial_{u^i}}\partial_{u^j} = \Gamma^k_{ij}\partial_{u^k}.$$

Z przeprowadzonego wcześniej rachunku wynika, że na hiperboloidzie

$$\nabla_{\partial_a}\partial_a = \frac{1+b^2}{(1+2a^2+2b^2)(1+a^2+b^2)}\left(a\partial_a + b\partial_b\right),$$

zatem

$$\Gamma^a_{aa} = a\frac{1+b^2}{(1+2a^2+2b^2)(1+a^2+b^2)}, \qquad \Gamma^b_{aa} = b\frac{1+b^2}{(1+2a^2+2b^2)(1+a^2+b^2)}.$$

Ze względu na symetrię parametryzacji otrzymalibyśmy zapewne

$$\Gamma^b_{bb} = b\frac{1+a^2}{(1+2a^2+2b^2)(1+a^2+b^2)}, \qquad \Gamma^a_{bb} = a\frac{1+a^2}{(1+2a^2+2b^2)(1+a^2+b^2)}.$$

Rachunek zmierzający do wyliczenia $\Gamma^a_{ab} = \Gamma^a_{ba}$ oraz $\Gamma^b_{ab} = \Gamma^b_{ba}$ trzeba wykonać oddzielnie wyznaczając np

$$\nabla_{\partial_b}\partial_a = -\frac{ab}{(1+2a^2+2b^2)(1+a^2+b^2)}\left(a\partial_a + b\partial_b\right),$$

czyli

$$\Gamma^a_{ab} = \Gamma^a_{ba} = -\frac{a^2b}{(1+2a^2+2b^2)(1+a^2+b^2)}, \qquad \Gamma^b_{ab} = \Gamma^b_{ba} = -\frac{ab^2}{(1+2a^2+2b^2)(1+a^2+b^2)}.$$

W dalszym ciągu zajmiemy się przypadkiem $\dim M = k = n-1$. W takiej sytuacji mamy do dyspozycji, przynajmniej lokalnie, jednostkowe pole normalne N. Trzeba tu dokonać wyboru spośród dwóch możliwych pól różniących się o znak. Jeśli założymy, że powierzchnia jest orientowalna, takie pole istnieje globalnie. Skoro $(N|N) = 1$ to oczywiście

$$0 = D_v(N|N) = 2(D_vN|N)$$

dla dowolnego $v \in \mathsf{T}_qM$. Wynika z tego, że D_vN jest elementem T_qM. Można zatem zdefiniować w każdym punkcie $q \in M$ operator

$$A_q : \mathsf{T}_qM \longrightarrow \mathsf{T}_qM, \quad A_q(v) = -D_vN$$

zwany *operatorem Weingartena* lub *operatorem kształtu*. Z definicji wynika łatwo, że jest to operator liniowy, zależność od punktu q jest gładka, zatem $A : \mathsf{T}M \to \mathsf{T}M$ jest gładkim endomorfizmem wiązki stycznej nad identycznością w M. Wyznaczmy A na hiperboloidzie. Rachunki nie są może zbyt przyjemne, ale dochodzimy w końcu do następujących wzorów:

$$D_a N = \frac{1}{(1+2a^2+2b^2)^{\frac{3}{2}}}\Big(-(1+2b^2)\partial_a + 2ab\partial_b\Big)$$
$$D_b N = \frac{1}{(1+2a^2+2b^2)^{\frac{3}{2}}}\Big(2ab\partial_a - (1+2a^2)\partial_b\Big)$$

Zatem w bazie pochodzącej od parametryzacji mamy

$$A = \frac{1}{(1+2a^2+2b^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\begin{array}{cc} (1+2b^2) & -2ab \\ -2ab & (1+2a^2) \end{array}\right].$$

Okazuje się, że (zupełnie nieprzypadkowo) macierz operatora Weingartena jest symetryczna. O nieprzypadkowości tego faktu można się przekonać badając różnicę $g(A(v),w) - g(v,A(w))$. Rachunek wykonamy dla dowolnych pól stycznych X i Y. Wiadomo, że $\tilde{g}(X,N) = \tilde{g}(N,Y) = 0$ oraz, że

$$0 = D_Y(\tilde{g}(X,N)) = \tilde{g}(D_Y X, N) + \tilde{g}(X, D_Y N) = \tilde{g}(D_Y X, N) - \tilde{g}(X, A(Y))$$

Okazuje się więc, że
$$\tilde{g}(D_Y X, N) = \tilde{g}(X, A(Y)).$$

Po prawej stronie można zastąpić $\tilde{g}$ przez g, gdyż oba argumenty są styczne. Wyznaczamy różnicę

$$g(A(X),Y) - g(X,A(Y)) = \tilde{g}(N, D_X Y) - \tilde{g}(D_Y X, N) =$$
$$\tilde{g}(D_X Y - D_Y X, N) = \tilde{g}([X,Y],N) = 0.$$

Forma dwuliniowa
$$b(X,Y) = (A(X),Y)$$
jest więc symetryczna, a co za tym idzie odwzorowanie A jest samosprzężone względem g. Jego macierz jest symetryczna. Powyższa forma nosi nazwę *druga forma podstawowa.*

Możemy teraz skorzystać z twierdzenia spektralnego i stwierdzić, że A jest diagonalizowalny, ma rzeczywiste wartości własne a baza złożona z wektorów własnych jest ortogonalna. Wartości własne operatora A nazywają się *krzywiznami głównymi* a kierunki wyznaczone przez wektory własne to *kierunki główne.*

Wyznaczamy krzywizny główne i kierunki główne na hiperboloidzie $\mathcal{H}$. Wielomian charakterystyczny A ma postać

$$w_A(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbf{1}) = \frac{1}{r^6}((1+2b^2 - r^3\lambda)(1+2a^2 - r^3\lambda) - 4a^2b^2),$$

gdzie $r = \sqrt{1+2a^2+2b^2}$. Po uporządkowaniu dostajemy

$$w_A(\lambda) = \frac{1}{r^4} - \frac{1+r^2}{r^3}\lambda + \lambda^2.$$

Pierwiastkami wielomianu charakterystycznego są więc $k_1 = \frac{1}{r^3}$, $k_2 = \frac{1}{r}$. Odpowiadające im kierunki główne to, jak łatwo sprawdzić, odpowiednio

$$\begin{aligned} v_1 &= a\partial_a + b\partial_b = a\partial_x + b\partial_y + \frac{a^2+b^2}{\sqrt{1+a^2+b^2}}\partial_z \\ v_2 &= b\partial_a - a\partial_b = b\partial_x - a\partial_y \end{aligned}$$

Liniami krzywiznowymi, tzn liniami do których styczne są kierunki główne są więc tworzące powierzchni obrotowej jaką jest $\mathcal{H}$ oraz okręgi poziome o środku na osi z leżące na $\mathcal{H}$. Zgodnie z twierdzeniem, które mówi, że

Twierdzenie 1 *Jeśli w punkcie q wszystkie krzywizny główne są różne, to w otoczeniu tego punktu istnieje układ współrzędnych taki, że linie krzywiznowe są liniami współrzędnych.*

linie krzywiznowe z odpowiednią parametryzacją tworzą siatkę współrzędnych na $\mathcal{H}$ w otoczeniu każdego punktu z wyjątkiem $(0,0,1)$. W tym punkcie obie krzywizny równe są 1. Stosowna parametryzacja $\mathcal{H}$ wyglądać może na przykład tak

$$x = \cos\varphi \sinh\alpha, \quad x = \sin\varphi\sinh\alpha, \quad z = \cosh\alpha.$$

W dalszej części wykładu zajmiemy się odwzorowaniem Gaussa i krzywizną Gaussa, co wymaga ustalenia $n = 3$, $k = 2$. Mówimy więc o dwuwymiarowych powierzchniach w $\mathbb{R}^3$. *Odwzorowaniem Gaussa* nazywamy odwzorowanie n przyporządkowujące punktowi $q \in M$ element S^2 dany przez $N(q)$. n jest więc gładkim odwzorowaniem z M do S^2. Zdefiniujmy teraz krzywiznę Gaussa w sposób intuicyjny (choć nie całkiem precyzyjny). Niech $\mathcal{O}$ będzie otoczeniem w M punktu q na tyle regularnym, aby dało się policzyć jego pole, które będziemy oznaczać $P(\mathcal{O})$. Pole liczymy oczywiście względem metryki w $\mathbb{R}^3$ obciętej do M. Wyznaczmy także pole $P(n(\mathcal{O}))$. Może się oczywiście zdarzyć, że $n(\mathcal{O})$ będzie raczej chudy, przyjmiemy wówczas, że jego pole jest zero. Weźmy teraz ciąg otoczeń $\mathcal{O}_k$ punktu q, których pola zmierzają do zera gdy $k \to \infty$. Krzywizną Gaussa $K_M(q)$ powierzchni M w punkcie q nazywamy liczbę

$$K_M(q) = \operatorname{sgn}\left(\det(\mathsf{T}_q n)\right) \lim_{k\to\infty} \frac{P(n(\mathcal{O}_k))}{P(\mathcal{O}_k)}.$$

Wyjaśnić należy dlaczego używamy $\det(\mathsf{T}_q n)$, skoro na pierwszy rzut oka to jest odwzorowanie między dwiema różnymi przestrzeniami wektorowymi. Drugi rzut oka upewnia nas, że $\mathsf{T}_q M$ i $\mathsf{T}_{n(q)} S^2$ zawierają wektory prostopadłe do $N(q)$, czyli są równe w sensie dwuwymiarowych podprzestrzeni w $\mathbb{R}^3$. Używanie wyznacznika jest więc zasadne.

Od intuicji przejdźmy teraz do sformułowania bardziej precyzyjnego. Znajdźmy stosunek miary (mówiąc po fizycznemu) elementu powierzchni na M do miary obrazu tego elementu na S^2. Jeśli $v, w \in \mathsf{T}_q M$ to pole równoległoboku rozpiętego na tych dwóch wektorach jest pierwiastkiem z wyznacznika macierzy Grama układu (v, w). W wybranej bazie e w $\mathsf{T}_q M$ będziemy mieli

$$vol(v,w) = \sqrt{\det([[v]^e[w]^e]^T\ [g]_e\ [[v]^e[w]^e])} = |\det Q|\sqrt{\det[g]_e},$$

gdzie macierz $[[v]^e[w]^e]$ powstałą ze współrzędnych wektorów v i w oznaczyliśmy przez Q. Podobnie możemy obliczyć $vol(\mathsf{T}_q n(v), \mathsf{T}_q n(w))$ otrzymując

$$vol(\mathsf{T}_q n(v), \mathsf{T}_q n(w)) = \sqrt{\det(([\mathsf{T}_q n]\ Q)^T\ [g]_e\ [\mathsf{T}_q n]\ Q)} = |\det Q||\det \mathsf{T}_q n|\sqrt{\det [g]_e}.$$

Jeśli więc

$$K_M(q) = \operatorname{sgn}(\det(\mathsf{T}_q n))\frac{vol(\mathsf{T}_q n(v), \mathsf{T}_q n(w))}{vol(v,w)}$$

to otrzymujemy

$$K_M(q) = \operatorname{sgn}(\det(\mathsf{T}_q n))\frac{|\det Q||\det \mathsf{T}_q n|\sqrt{\det[g]_e}}{\det Q|\sqrt{\det[g]_e}} = \operatorname{sgn}(\det(\mathsf{T}_q n))|\det \mathsf{T}_q n| = \det \mathsf{T}_q n$$

Przyjrzyjmy się zatem bliżej $\mathsf{T}_q n$. Niech $v \in \mathsf{T}_q M$ i $v = \mathsf{t}\gamma(0)$. Wtedy

$$\mathsf{T}_q n(v) = \mathsf{t}(n \circ \gamma)(0) = D_v N(q) = -A_q(v)$$

Wyznacznik $\mathsf{T}_q n$ jest więc równy wyznacznikowi A_q, czyli iloczynowi krzywizn głównych. Taką definicję krzywizny Gaussa będziemy przyjmować.

$$K_m(q) = k_1(q)k_2(q).$$

Łatwo sprawdzić, że krzywizna Gaussa sfery o promieniu R to $\frac{1}{R^2}$, płaszczyzny to 0. Nasza hiperboloida ma krzywiznę Gaussa

$$K_{\mathcal{H}}(a,b) = \frac{1}{r^4}.$$

Zadanie 1 (wersja *soft*) Znaleźć krzywizny główne i krzywiznę Gaussa powierzchni danej za pomocą parametryzacji

$$(\varphi, t) \longmapsto \left(\frac{\cos\varphi}{\cosh t}, \frac{\sin\varphi}{\cosh t}, \frac{t\cosh t - \sinh t}{\cosh t}\right).$$

Zadanie 2 (wersja *hard*) Znaleźć krzywizny główne i krzywiznę Gaussa powierzchni obrotowej, której tworząca jest traktrysą. Traktrysa jest to krzywa, której punkty spełniają następujący warunek: odległość punktu p krzywej od punktu przecięcia stycznej do tej krzywej z osią $0x$ jest stała i równa 1.

Definicja krzywizny Gaussa jest na pierwszy rzut oka „zewnętrzna” tzn. zawiera elementy zależne od zanurzenia w $\mathbb{R}^3$. Okazuje się jednak, że jest to wielkość całkowicie wewnętrzna. Zachodzi bowiem twierdzenie

Twierdzenie 2 (Theorema Egregium) *Jeśli $f : M \to N$ jest izometrią, to $K_M(q) = K_N(f(q))$.*

Dowód: Wykażemy, że w układzie współrzędnych na M zachodzi równość

$$K_M(q) = \frac{R_{1212}(q)}{\det[g(q)]}$$

Wyliczmy R_{1212}. Ze względu na komutowanie pól ∂_1 i ∂_2 mamy

$$R_{1212} = g(\nabla_1\nabla_2\partial_1 - \nabla_2\nabla_1\partial_1, \partial_2)$$

Zaczniemy od wyznaczenia $\nabla_1\nabla_2\partial_1$. Rachunki prowadzić będziemy z dokładnością do części proporcjonalnej do N. Korzystamy z definicji różniczkowania kowariantnego

$$\nabla_2\partial_1 = D_2\partial_1 - \tilde{g}(D_2\partial_1, N)N$$

i stosujemy do wyniku ∇_1:

$$\begin{aligned}\nabla_1\nabla_2\partial_1 = D_1[D_2\partial_1 - \tilde{g}(D_2\partial_1, N)N] - \tilde{g}(\,D_2\partial_1 - \tilde{g}(D_2\partial_1, N)N, N\,)N = \\ D_1D_2\partial_1 - \tilde{g}(D_1D_2\partial_1, N)N - \tilde{g}(D_2\partial_1, D_1N)N - \tilde{g}(D_2\partial_1, N)D_1N + \text{prostopadłe} = \\ D_1D_2\partial_1 - \tilde{g}(D_2\partial_1, N)D_1N + \text{prostopadłe}.\end{aligned}$$

Podobnie będzie wyglądać $\nabla_2\nabla_1\partial_1$

$$\nabla_2\nabla_1\partial_1 = D_2D_1\partial_1 - \tilde{g}(D_1\partial_1, N)D_2N + \text{prostopadłe}.$$

Wyznaczamy różnicę

$$\nabla_1\nabla_2\partial_1 - \nabla_2\nabla_1\partial_1 = D_1D_2\partial_1 - D_2D_1\partial_1 - \tilde{g}(D_2\partial_1, N)D_1N + \tilde{g}(D_1\partial_1, N)D_2N + \text{prostopadłe}$$

Część zaznaczona na niebiesko znika, gdyż jest równa $D_{[\partial_1,\partial_2]}\partial_1$, a pola współrzędnościowe komutują. Otrzymany wynik możemy wstawić do wzoru na R_{1212} z pominięciem, części czerwonej, której iloczyn skalarny z ∂_2 znika

$$\begin{aligned}R_{1212} = \tilde{g}(-\tilde{g}(D_2\partial_1, N)D_1N + \tilde{g}(D_1\partial_1, N)D_2N, \partial_2) = \\ -\tilde{g}(D_2\partial_1, N)\tilde{g}(D_1N, \partial_2) + \tilde{g}(D_1\partial_1, N)\tilde{g}(D_2N, \partial_2) =\end{aligned}$$

Części zaznaczone na niebiesko zapisać można z użyciem operatora A:

$$= \tilde{g}(D_2\partial_1, N)\tilde{g}(A(\partial_1), \partial_2) - \tilde{g}(D_1\partial_1, N)\tilde{g}(A(\partial_2), \partial_2).$$

Korzystając ze stałości $\tilde{g}$ możemy także przerzucić różniczkowanie z ∂_1 na N w częściach czarnych, gdyż na przykład:

$$0 = D_2(0) = D_2[\tilde{g}(\partial_1, N)] = \tilde{g}(D_2\partial_1, N) + \tilde{g}(\partial_1, D_2N) = \tilde{g}(D_2\partial_1, N) - \tilde{g}(\partial_1, A(\partial_2))$$

Ostatecznie

$$\begin{aligned}R_{1212} = \tilde{g}(\partial_1, D_2N)\tilde{g}(A(\partial_1), \partial_2) - \tilde{g}(\partial_1, D_1N)\tilde{g}(A(\partial_2), \partial_2) = \\ -\tilde{g}(\partial_1, A(\partial_2))\tilde{g}(A(\partial_1), \partial_2) + \tilde{g}(\partial_1, A(\partial_1))\tilde{g}(A(\partial_2), \partial_2) = \\ b(\partial_1, \partial_1)b(\partial_2, \partial_2) - b(\partial_1, \partial_2)(\partial_2, \partial_1) = \det b\end{aligned}$$

Dzieląc składową tensora krzywizny przez wyznacznik metryki i obserwując, że formy b i g różnią się o A mamy

$$\frac{R_{1212}(q)}{\det g(q)} = \frac{\det b(q)}{\det g(q)} = \det A_q = K_M(q).$$

□