Analiza I R

tydzień siódmy, 12.11.2012 – 18.11.2012

Zadanie 1. Niech
$$f(x) = \frac{x \log x}{x^2 - 1}$$
dla $x \in]0, 1[\cup]1, \infty[$. Wykazać, że funkcję f da się dookreślić w punktach $x = 0$ i $x = 1$, tak aby była ona ciągła (ewentualnie jednostronnie). Zbadać tę funkcję i naszkicować wykres.

Zadanie 2. Niech $g(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ dla $x \neq 0$ i $g(0) = 0$. Wykazać, że g jest gładka w zerze i ma wszystkie pochodne równe 0.

Kolokwium przykładowe

Zadanie 3. Zbadać zbieżność i (ewentualnie) policzyć granicę
$$x_n = \sqrt[n]{\frac{1}{n} - 2^{1-n}}, \quad y_n = \sin\sqrt{n+1} - \sin\sqrt{n}, \quad z_n = \frac{(3n-2)!}{2n!(2n-1)^n}$$

Zadanie 4. Dla $t \in \mathbb{R}$ niech P_t oznacza domkniętą półpłaszczyznę ograniczoną z góry przez prostą przechodzącą przez punkty $a_t = (t+1, t+1)$ i $b_t = (t-1, 1-t)$. Znaleźć i narysować zbiory
$$\bigcup_{t \in \mathbb{R}} P_t, \qquad \bigcap_{t \in [-1,1]} P_t.$$

Zadanie 5. Niech $R \supset A = \left\{\frac{n}{n+m} + \frac{p}{n+m+p}, \quad n, m, p \in \mathbb{N}\right\}$. Znaleźć kresy zbioru A i sprawdzić, czy jest on otwarty, domknięty, zwarty spójny jako podzbiór $\mathbb{R}$ ze zwykłą topologią.

Zadanie 6. Wykazać indukcujnie, że jeśli $x_1 = 1$ i $x_{n+1} = A(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_n + 1)$ to $x_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$. Wskazówka: mocna zasada indukcji.

Zadanie 7. Niech
$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : \ \exists x \in \mathbb{N} : \ 10^n(x - y) \in \mathbb{Z}\}.$$
Sprawdzić, że $\mathcal{R}$ jest relacją równoważności, opisać klasy równoważności.