Geometria Różniczkowa II

reszta wykładu siódmego i wykład ósmy

Wszyscy słuchacze wykładu wiedzą, mam nadzieję, co to jest grupa i znają podstawowe przykłady grup skończonych i nieskończonych. Teoria grup ma też swoją wersję związaną z geometrią różniczkową, w której podstawowymi obiektami są grupa Liego i algebra Liego grupy Liego. Grupa Liego jest to jednocześnie grupa i jednocześnie gładka rozmaitość. Nakładamy także warunki zgodności na obie struktury, tzn wymagamy aby mnożenie grupowe oraz branie odwrotności były odwzorowaniami gładkimi. Zapiszmy definicję przyzwoicie i podajmy przykłady.

Grupą Liego nazywamy gładką rozmaitość G wyposażoną w strukturę grupy taką, że mnożenie $G \times G \ni (g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2 \in G$ oraz odwrotność $G \ni g \mapsto g^{-1} \in G$ są odwzorowaniami gładkimi.

Oto kilka przykładów grup Liego (1) przestrzeń wektorowa wymiaru skończonego z dodawaniem wektorów, (2) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ z mnożeniem, (3) $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ z mnożeniem (struktura rozmaitości pochodzi z $\mathbb{R}^2$), (4) $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$ z mnożeniem, (5) grupa $GL(n, \mathbb{R})$ odwracalnych macierzy $n \times n$ z mnożeniem macierzy. Zatrzymajmy się na chwilę na przykładzie (5). Zbiór $M(n, \mathbb{R})$ wszystkich macierzy $n \times n$ o współczynnikach rzeczywistych jest, jako przestrzeń wektorowa, izomorficzny z $\mathbb{R}^{n^2}$, ma więc stosowną strukturę rozmaitości. Odwzorowanie det jest przyzwoitym odwzorowaniem na $M(n, \mathbb{R})$, w szczególności więc ciągłym. Zbiór $GL(n, \mathbb{R}) = \{X \in M(n, \mathbb{R}) : \ \det X \neq 0\}$ jest otwarty jako dopełnienie domknietego zbioru macierzy z wyznacznikiem 0. Ten ostatni jest domknięty jako przeciwobraz zbioru domkniętego $\{0\}$ w odwzorowaniu ciągłym. Struktura rozmaitości w $GL(n, \mathbb{R})$ jest więc taka, jak w otwartym podzbiorze przestrzeni wektorowej. Mnożenie macierzy i branie odwrotności wyraża się za pomocą gładkich funkcji wyrazów macierzowych - oba odwzorowania są więc gładkie. Grupy z przykładów (1), (2), (3), (4) są przemienne, grupa (5) jest nieprzemienna. My będziemy zajmować się jedynie niewielkim wycinkiem teorii grup Liego. Ponieważ mają one bardzo istotne znaczenie w teoriach fizycznych, zdecydowanie rekomenduję wszystkim wysłuchanie wykładu z teorii grup, lub studiowanie którejś z rozlicznych książek na ten temat. Mój ulubiony podręcznik to *J.J. Duistermaat, J.A.C. Kolk, Lie Groups, Universitext, Springer-Verlag.*

Dokładając do struktury grupy strukrurę rozmaitości różniczkowej zaczynamy wymagać więcej także od homomorfizmów, podgrup itp. Odwzorowanie $\varphi : G \to H$ jest *homomorfizmem grup Liego* jeśli jest homomorfizmem grup oraz odwzorowaniem gładkim. *Izomofrizm grup Liego* to odwracalny homomorfizm grup Liego, którego odwrotność także jest homomorfizmem grup Liego. Podgrupa H grupy Liego G jest *podgrupą Liego* wtedy i tylko wtedy jeśli jest także podrozmaitością. Tak jest na przykład dla podgrupy $SL(n, \mathbb{R}) = \{X \in GL(n, R) : \ \det X = 1\}$ w grupie $GL(n, \mathbb{R})$.

Dla $x \in G$ oznaczmy przez l_x i r_x dwa odwzorowania

$$\begin{aligned} l_x : G \to G, \quad & l_x(g) = xg \quad \text{lewe przesunięcie o } x \\ r_x : G \to G, \quad & r_x(g) = gx \quad \text{prawe przesunięcie o } x \end{aligned}$$

Odwzorowania te można składać: $l_x \circ l_y = l_{xy}$, $r_x \circ r_y = r_{yx}$. Działanie te są gładkie (gładkość mnożenia) i odwracalne. łatwo zauważyć, że $(l_x)^{-1} = l_{x^{-1}}$ i podobnie $(r_x)^{-1} = r_{x^{-1}}$. Odwzorowania odwrotne też są więc gładkie. Inaczej mówiąc lewe i prawe przesunięcie są dyfeomorfizmami.

Mogą one służyć do porównywania obiektów na grupie w różnych punktach. Przyjrzyjmy się w szczególności wiązce stycznej $\mathsf{T}G$. W grupie jest wyróżniony punkt - e, czyli jedynka. Przestrzeń styczna T_eG zasługuje na własne oznaczenie: $\mathsf{T}_eG = \mathfrak{g}$. Jak się za chwilę okaże, przestrzeń styczna w e ma ciekawą strukturę. Na razie jednak zauważmy, że posługując się $\mathsf{T}l_x$ możemy przenosić wektory styczne $X \in \mathfrak{g}$ do dowolnego punktu $x \in G$. Skoro l_x jest dyfeomorfizmem, to $\mathsf{T}l_x$ obcięte do $\mathfrak{g}$ jest liniowym izomorfizmem przestrzeni $\mathfrak{g}$ i T_xN. Odwzorowaniem odwrotnym jest oczywiście $\mathsf{T}l_{x^{-1}}$ obcięte do T_xG. W ten sposób wprowadzić można strukturę iloczynu kartezjańskiego w $\mathsf{T}G$: każdy wektor $v \in \mathsf{T}_xG$ traktować można jak parę $(x, \mathsf{T}l_{x^{-1}}(v))$. Oczywiście zupełnie to samo można zrobić używając r_x. Utożsamienie $\mathsf{T}G$ z $G \times \mathfrak{g}$ będzie wtedy inne. W dalszym ciągu korzystać będziemy z lewego przesunięcia.

Startując z jednego wektora $X \in \mathfrak{g}$ i działając $\mathsf{T}l_g$ utworzyć możemy gładkie pole wektorowe

$$X^l(g) = \mathsf{T}l_g(X)$$

Sprawdzimy teraz jak to pole zachowuje się pod działaniem $\mathsf{T}l_x$

$$\mathsf{T}l_x(X^l(g)) = \mathsf{T}l_x\mathsf{T}l_g(X) = \mathsf{T}(l_x \circ l_g)(X) = \mathsf{T}l_{xg}(X) = X^l(xg).$$

Okazuje się, że takie pole jest niezmiennicze względem przesunięć. W terminach transportu pola wektorowego zapisać to można następująco

$$\forall x \in G\ (l_x)_* X^l = X^l. \tag{1}$$

Na wszelki wypadek przypomnijmy, że jeśli $\varphi : M \to N$ jest dyfeomorfizmem oraz X jest polem wektorowym na M, to $\varphi_* X$ jest polem na N, którego wartość w punkcie $n \in N$ jest dana wzorem $\varphi_* X(n) = \mathsf{T}\varphi(X(\varphi^{-1}(n)))$. Pola mające własność (1) nazywać będziemy *lewoniezmienniczymi* polami na G. Wiemy już, że każdy element $X \in \mathfrak{g}$ generuje pewne lewoniezmiennicze pole X^l. Weźmy teraz jakiekolwiek lewoniezmiennicze pole V na G. Skoro $(l_g)_*V = V$, to w punkcie g mamy

$$V(g) = ((l_g)_*V)(g) = \mathsf{T}l_g(V(l_{g^{-1}}(g))) = \mathsf{T}l_g(V(g^{-1}g)) = \mathsf{T}l_g(V(e)).$$

Wartość pola w dowolnym punkcie na grupie jest więc wyznaczona przez jego wartość w e. Okazuje się, że wszystkie pola lewoniezmiennicze pochodzą od elementów $\mathfrak{g}$.

Zauważmy teraz, że jeśli $\varphi : M \to M$ jest dowolnym dyfeomorfizmem, to dla pól wektorowych X, Y na M zachodzi równość

$$\varphi_*[X, Y] = [\varphi_* X, \varphi_* Y] \tag{2}$$

Istotnie, jeśli f jest funkcją na N, to $(\varphi_* Xf) \circ \varphi = X(f \circ \varphi)$

$$\begin{aligned}\varphi_*[X,Y](f) \circ \varphi = [X,Y](f \circ \varphi) = X(Y(f \circ \varphi)) - Y(X(f \circ \varphi)) = \\ X((\varphi_* Yf) \circ \varphi) \circ \varphi - Y((\varphi_* Xf) \circ \varphi)) = \varphi_* X(\varphi_* Yf) \circ \varphi - \varphi_* Y(\varphi_* Xf) \circ \varphi) = \\ ([\varphi_* X, \varphi_* Y]f) \circ \varphi\end{aligned}$$

Zastosujmy fakt (2) do pól lewoniezmienniczych na grupie i dyfeomorfizmu l_x

$$(l_x)_*[X^l, Y^l] = [(l_x)_* X^l, (l_x)_* Y^l] = [X^l, Y^l].$$

Nawias Liego pól lewoniezmienniczych też jest polem lewoniezmienniczym !!! Każde takie pole pochodzi od pewnego elementu $\mathfrak{g}$. Oznacza to, że dwóm elementom $\mathfrak{g}$ potrafię przypisać trzeci zgodnie z przepisem: *wziąć X i Y, wyprodukować pola wektorowe X^l, Y^l, obliczyć $[X^l, Y^l]$, sprawdzić od jakiego elementu $\mathfrak{g}$ nowe pole się wzięło.* Ten nowy element $\mathfrak{g}$ oznaczymy $[X, Y]$. Wprowadziliśmy w ten sposób odwzorowanie

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \ni (X, Y) \longmapsto [X, Y] \in \mathfrak{g},$$

które ponadto ma wszystkie własności nawiasu pól wektorowych, tzn. antysymetrię i tożsamość Jacobiego

$$[X, Y] = -[Y, X], \qquad [X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]].$$

Wprowadziliśmy właśnie w $\mathfrak{g}$ strukturę *algebry Liego.* Od tego momentu będziemy nazywać $\mathsf{T}_e G = \mathfrak{g}$ algebrą Liego grupy Liego G.

Popatrzmy teraz na przykłady grup Liego o których mówiliśmy wcześniej i znajdźmy dla nich algebry Liego wraz ze stosownym nawiasem. W przykładzie (1) grupą była przestrzeń wektorowa skończenie-wymiarowa V z dodawaniem jako działaniem grupowym i wektorem $\overrightarrow{0}$ jako elementem neutralnym $\mathsf{T}_{\overrightarrow{0}} V = V$ a krzywą reprezentująca wektor styczny X może być na przykład $\gamma(t) = tv$. Przesunięcie o element grupy v daje krzywą $l_v(\gamma(t)) = v + tX$. Wektor styczny w $t = 0$ do przesuniętej krzywej, wraz z punktem zaczepienia to (v, X). Pola lewoniezmiennicze są więc polami stałymi. Nawias Liego pól stałych jest zero. Ostatecznie, jeśli $G = V$ to $\mathfrak{g} = V$ i nawias jest zerowy. W przykładzie (2) rozważaliśmy $\mathbb{R}_*$ z mnożeniem. Elementem neutralnym jest oczywiście 1. Przestrzeń styczna w 1 jest kanonicznie izomorficzna z $\mathbb{R}$, a krzywa reprezentująca wektor styczny X może być wzięta w postaci $\gamma(t) = 1 + tX$. Przesuniecie tej krzywej do punktu $r \in \mathbb{R}_*$ to krzywa $l_r(\gamma(t)) = r + rtX$ i wektor styczny wraz z punktem zaczepienia to (r, rX). Posługując się strukturą rozmaitości na $\mathbb{R}$ i kanoniczną współrzędną możemy napisać, że $\mathsf{T}l_r(X) = rx\partial_r$. W tym prościutkim przykładzie zauważmy, że izomorfizm $\mathsf{T}\mathbb{R}_* = \mathbb{R}_* \times \mathbb{R}$ pochodzący od struktury rozmaitości w $\mathbb{R}_*$ i kanonicznej współrzędnej jest inny niż rozkład $\mathsf{T}G = G \times \mathfrak{g}$, który dostalibyśmy biorąc $G = \mathbb{R}_*$ i strukturę grupy multiplikatywnej. Wektorowi stycznemu $a\partial_r$ zaczepionemu w punkcie r_0 odpowiada względem struktury grupowej element $(r_0, \frac{a}{r_0})$ w rozkładzie na element grupy i element algebry! Pola lewoniezmiennicze mają więc postać $X^l(r) = rX\partial_r$. Sytuacja jest jak widzimy nieco bardziej skomplikowana, ale prosty rachunek pokazuje, że także w tym przypadku nawias Liego jest zerowy. Proponuję samodzielnie zbadać przypadek S^1 - znaleźć przestrzeń styczną w 1, pola lewoniezmiennicze i nawias. Ciekawszą sytuację zobaczymy dopiero w przykładzie (5). Jako rozmaitość $G = GL(n, \mathbb{R})$ jest otwartym podzbiorem w $\mathbb{R}^{n^2}$, topologicznie i różniczkowo sytuacja jest więc prosta. Wiązka styczna do G ma strukturę wiązki trywialnej. $\mathsf{T}GL(n, \mathbb{R}) = GL(n, R) \times M(n, \mathbb{R})$. W otoczeniu macierzy $\mathbf{1}$ element $X \in \mathfrak{g} = M(n, \mathbb{R})$ może być reprezentowany krzywą $\gamma(t) = \mathbf{1} + tX$. Ta krzywa być może jest dobra dla małych t jedynie, gdyż w pechowym przypadku może się okazać, że wzdłuż krzywej trafimy na macierz mającą zerowy wyznacznik. Przesunięcie do punktu g jest reprezentowane krzywą $t \mapsto g + tgX$ zatem w rozkładzie na iloczyn kartezjański pochodzącym od rozmaitości wektor styczny to (g, gX). Szukanie nawiasu przy pomocy badania nawiasu pól lewoniezmienniczych explicite byłoby tutaj niewygodne (n^2 wymiarów...) Posłużymy się tutaj znajomością algebry liniowej. Krzywa γ lub jej przesunięcie $l_g \circ \gamma$ to krzywe reprezentujące wektory styczne X i $X^l(g)$ ale nie krzywe całkowe pola wektorowego X^l. Są to krzywe dobre tylko dla punktu $t = 0$. Możemy jednak dość łatwo odgadnąć jednoparametrową grupę dyfeomorfizmów związaną z polem X^l. Oznaczmy tę grupę φ_t^X. Okazuje się, że

$$\varphi_t^X(g) = g\exp(tX)$$

gdzie exp jest zwykłym dobrze nam znanym macierzowym eksponensem. Własności exp powodują, że jest to istotnie jednoparametrowa grupa:

$$\varphi_t^X \circ \varphi_s^X(q) = \varphi_t^X(g\exp(sX)) = g\exp(sX)\exp(tX) =$$
$$g\exp(sX + tX) = g\exp((s+t)X) = \varphi_{s+t}^X(g)$$

Ponadto wektor styczny do krzywej $t \mapsto g\exp(tX)$ w punkcie $t = 0$ to gX, czyli, tak jak trzeba, lewe przesunięcie X do punktu g. Poszukujemy teraz wartości nawiasu lewoniezmienniczych pól w jedynce grupy. Skorzystamy z faktu iż $[X^l, Y^l] = \mathcal{L}_{X^l}Y^l$ oraz z tego, że potrafimy wyliczyć pochodną Liego znając potoki pól o które chodzi. Z definicji $\mathcal{L}_{X^l}Y^l(\mathbf{1})$ jest wektorem stycznym do krzywej w $\mathfrak{g} \simeq M(n,\mathbb{R})$

$$t \mapsto \mathsf{T}\varphi_{-t}^X(Y^l(\varphi_t^X(\mathbf{1}))$$

Wartość tej krzywej dla ustalonego t to

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}s}_{|s=0}\exp(tX)\exp(sY)\exp(-tX) = \exp(tX)Y\exp(-tX).$$

Różniczkując względem t otrzymujemy (reguła Leibniza)

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}_{|t=0}\exp(tX)Y\exp(-tX) = XY - YX = [X,Y].$$

Nawias Liego na $\mathfrak{g} = M(n,\mathbb{R})$ pochodzący od działania grupy w $GL(n,\mathbb{R})$ okazał się być równy zwykłemu macierzowemu komutatorowi.

Używając potoków lewoniezmienniczych pól możemy zdefiniować odwzorowanie $\exp : \mathfrak{g} \to G$ wzorem

$$\exp(X) = \varphi_1^X(e).$$

Dla grupy $GL(2,\mathbb{R})$ powyższe odwzorowanie pokrywa się ze zwykłym macierzowym odwzorowaniem wykładniczym. Dla ogólnej grupy należałoby najpierw upewnić się, że pola lewoniezmiennicze są zupełne, tzn, że zawsze można wyznaczyć $\varphi_t^X(e)$ dla $t = 1$. Stosowne twierdzenie gwarantuje, że tak jest. Dla grup macierzowych wystarczy wiedza nabyta na zajęciach algebry liniowej.

Przyjrzymy się teraz podgrupie $SL(2,\mathbb{R})$ w $GL(2,\mathbb{R})$ od strony struktury rozmaitości, struktury grupy Liego i stosownej algebry.

$$SL(2,\mathbb{R}) = \{g \in GL(2,\mathbb{R}) : \quad \det g = 1\}.$$

Macierze rzeczywiste 2×2 identyfikujemy z $\mathbb{R}^4$ wprowadzając naturalne współrzędne $\begin{bmatrix} u^1 & u^2 \\ u^3 & u^4 \end{bmatrix}$.
Przynależność do $SL(2,\mathbb{R})$ oznacza więc, że $u^1u^4 - u^2u^3 = 1$. Wektor styczny w 1 mający współrzędne $(\delta u^1, \delta u^2, \delta u^3, \delta u^4)$ musi spełniać warunek

$$[u^4 \;\; -u^3 \;\; -u^2 \;\; u^1]\begin{bmatrix} \delta u^1 \\ \delta u^2 \\ \delta u^3 \\ \delta u^4 \end{bmatrix} = 0$$

dla $u^1 = u^4 = 1$, $u^2 = u3 = 0$. Oznacza to, że $\delta u^1 + \delta u^4 = 0$. Algebrę $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ stanowią więc macierze bezśladowe.

Zajmijmy się teraz $SL(2,\mathbb{R})$ jako rozmaitością. Widać, że jest to powierzchnia drugiego stopnia w $\mathbb{R}^4$ (kwadryka) dana jako poziomica formy kwadratowej o sygnaturze $(2,2)$. We współrzędnych diagonalizujących tę formę

$$u^1 = x + y,\ u^2 = z - t\ u^3 = z + t,\ u^4 = x - y$$

równanie powierzchni przyjmuje postać

$$x^2 - y^2 - z^2 + t^2 = 1.$$

Suma $x^2 + t^2$ w punktach należących do powierzchni musi zawsze być większa od 1, możemy więc zastąpić parę (x,t) współrzędnymi biegunowymi $x = r\cos\varphi$, $t = r\sin\varphi$. Równanie, które musi być spełniane przez r, y, z to $r^2 - x^2 - y^2 = 1$. W $\mathbb{R}^3$ opisuje ono (przy założeniu $r > 0$) jeden płat hiperboloidy dwupowłokowej. Jest on w sposób oczywisty dyfeomorficzny z $\mathbb{R}^2$. Ostatcznie więc okazuje się, że jako rozmaitość $SL(2,\mathbb{R})$ jest dyfoemorficzna z $S^1 \times \mathbb{R}^2$. Dla lepszego wyobrażenia możemy myśleć o $\mathbb{R}^2$ jak o otwartym dysku o skończonym promieniu. Wtedy $SL(2,\mathbb{R})$ to torus (ale nie powierzchnia torusa, tylko pełny torus – ciastko z dziurką) bez brzegu. Parametryzując $SL(2,\mathbb{R})$ współrzędnymi (φ, a, b) otrzymujemy

$$(\varphi, a, b) \longmapsto (x = r(a,b)\cos\varphi, y = a, z = b, t = r(a,b)\sin\varphi),$$

macierzowo

$$(\varphi, a, b) \longmapsto \begin{bmatrix} r(a,b)\cos\varphi + a & b - r(a,b)\sin\varphi \\ b + r(a,b)\sin\varphi & r(a,b)\cos\varphi - a \end{bmatrix}. \tag{3}$$

W przestrzeni $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ (stycznej do $SL(2,\mathbb{R})$ w $\mathbf{1}$) mamy bazę związaną z układem współrzędnych

$$\partial_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \partial_b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \partial_\varphi = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

zatem dowolny element algebry można zapisać jako

$$\Lambda = A\partial_a + B\partial_b + C\partial_\varphi = \begin{bmatrix} A & B - C \\ B + C & -A \end{bmatrix}.$$

Zobaczymy teraz jak wygląda obraz exp dla macierzy takich jak powyżej. Potrzebujemy wielomian charakterystyczny:

$$w_\Lambda(\lambda) = (A - \lambda)(-A - \lambda) - (B - C)(B + C) = \\ - A^2 + \lambda^2 - B^2 + C^2 = \lambda^2 - (A^2 + B^2 - C^2)$$

Niech $D^2 = A^2 + B^2 - C^2$. Jeśli $D^2 > 0$ mamy dwie rzeczywiste wartości własne $\lambda = \pm D$ gdzie $D = \sqrt{D^2}$. Jeśli $D^2 < 0$ mamy dwie zespolone wartości własne $\lambda = \pm iD$ gdzie $D = \sqrt{|D^2|}$. Jeśli $D = 0$ mamy jedną podwójną wartość własną $\lambda = 0$. Po wykonaniu odpowiednich rachunków otrzymujemy w powyższych przypadkach

$$D^2 > 0, \qquad \exp(t\Lambda) = \begin{bmatrix} \frac{A}{D}\sinh(tD) + \cosh(tD) & \frac{B - C}{D}\sinh(tD) \\ \frac{B + C}{D}\sinh(tD) & -\frac{A}{D}\sinh(tD) + \cosh(tD) \end{bmatrix}. \tag{4}$$

$$D^2 < 0, \qquad \exp(t\Lambda) = \left[\begin{array}{cc} \frac{A}{D}\sin(tD) + \cos(tD) & \frac{B-C}{D}\sin(tD) \\ \frac{B+C}{D}\sin(tD) & -\frac{A}{D}\sin(tD) + \cos(tD) \end{array} \right]. \tag{5}$$

$$D^2 = 0, \qquad \exp(t\Lambda) = \left[\begin{array}{cc} At+1 & (B-C)t \\ (B+C)t & -At+1 \end{array} \right]. \tag{6}$$

Hipoteza nasza głosi, że wzdłuż opisanych powyżej krzywych $t \mapsto \exp(t\Lambda)$ nie da się dojść do punktów, które w postaci (3) odpowiadają współrzędnym (π, a, b) dla dowolnego $(a, b) \neq (0, 0)$. Macierz taka to

$$g(a,b) = \left[\begin{array}{cc} -r(a,b) + a & b \\ b & -r(a,b)\varphi - a \end{array} \right].$$

Sprawdźmy, czy uda się znaleźć macierz Λ dla której $\exp(t\Lambda)$ może być równe $g(a, b)$ dla pewnego $t \neq 0$.

- Zacznijmy od (4). Antydiagonalne wyrazy $g(a, b)$ są równe, zatem $C = 0$. Ślad $g(a, b)$ jest ujemny, gdyż $r(a, b) = \sqrt{1 + a^2 + b^2} \geqslant 1$. Natomiast ślad $\exp(t\Lambda)$ jest równy $2\cosh(tD)$ i jest dodatni, zatem $g(a, b) \neq \exp(t\Lambda)$.

- Pora teraz na przypadek (6). Uwaga o wyrazach antydiagonalnych pozostaje w mocy, zatem $C = 0$, ślad $\exp(t\Lambda)$ jest równy $2 > 0$ a ślad $g(a, b) = -2r(a, b) < 0$. Podobnie więc $g(a, b) \neq \exp(t\Lambda)$.

- W przypadku (5) równość wyrazów antydiagonalnych daje $C = 0$ lub $\sin Dt = 0$. Jeśli $\sin Dt = 0$, to $\cos(Dt) = \pm 1$ i $\exp(t\Lambda) = \pm\mathbf{1}$. Krzywa ta przechodzi przez punkty $(0, 0, 0) = \mathbf{1}$ i $(\pi, 0, 0) = -\mathbf{1}$. Jeśli zaś $C = 0$ to ślad $\exp(t\Lambda) = 2\cos(tD) \geqslant -2$ zaś ślad $g(a, b) = -2r(a, b) \leqslant -2$. Równość zachodzić jedynie dla $r(a, b) = 1$, czyli $a = b = 0$ i wracamy do poprzedniej sytuacji.

W żadnym z przypadków nie udało nam się znaleźć elementu algebry Λ, który generowałby pole pozwalające dojść do punktu $g(a, b)$. W wizualizacji $SL(2, \mathbb{R})$ jako torusa punkty nieosiągalne przez exp można wyobrażać sobie jako plasterek torusa prostopadły do jego osi i położony po przeciwnej stronie do jedynki grupy. Z tego plasterka osiągalny jest tylko środek leżący na osi. W wolnej chwili wyprodukuję jakieś obrazki.