Analiza I R

tydzień ósmy, 19.11.2012 – 25.11.2012

Zadanie 1. Obliczyć poniższe granice (dowolnie wybraną metodą). Proponuję część zrobić na ćwiczeniach a resztę w domu.

(a) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{e^x - e^a}{x-a}$

(ą) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \cos x}{\cos x - 1}$

(b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin^2 x - \frac{1}{2}\operatorname{tg} x}{1+\cos 4x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\log(1+x)}$

(ć) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin(\sin x) - \sin^2(x)}{x^6}$

(ę) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x^2)}{\cos 3x - e^{-x}}$

(h) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\arcsin(2-x)}{\sqrt{x^2-3x+2}}$

(i) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x + 2\log x}{x}$

(j) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} x - \dfrac{1}{1-\sin x}\right)$

(k) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\log x}\right)$

(l) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x\right)$

(ł) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x(1+x)} - \dfrac{\log(1+x)}{x^2}\right)$

(m) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\pi x - 1}{2x^2} - \dfrac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1)}\right)$

(n) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg} x} - \dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$

(ń) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

(o) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{x^x}$

(ó) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$

(p) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x\right)^{\frac{1}{x}}$

(r) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt[n]{x}\log^m x$

(s) $\lim\limits_{x\to \infty} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

(ś) $\lim\limits_{x\to a} \arcsin\dfrac{x-a}{a}\operatorname{ctg}(x-a)$

(t) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg}(2x)}$

(u) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ (w) $\lim_{x\to 0}\cos(ax)^{\frac{1}{x^2}}$

(y) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg} x\right)^{x}$ (z) $\lim_{x\to 0^+}(-\log x)^{x}$

(ź) $\lim_{x\to 0^+}(x)^{\frac{1}{\log(e^x-1)}}$ (ż) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n}$

Zadanie 2. Rozwinąć w szereg Taylora wokół $x_0 = 2$ i pokazać, że na pewnym otoczeniu x_0 $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Zadanie 3. Niech funkcja $f :]a,\infty[\to \mathbb{R}$ będzie różniczkowalna dwa razy i ma asymptotę w nieskończoności. Wykazać, że jeśli f jest wypukła, to wykres leży nad asymptotą, a jeśli wklęsła, to pod.

Zadanie 4. Zbadać ciągłość i różniczkowalność funkcji

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{\sin(x)}\right)^{\frac{6}{x^2}} & x \neq 0 \\ e & x = 0 \end{cases}$$

Zadanie 5. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}-2\sqrt{x}\right)$$

trzema sposobami: (1) rozwijając w szereg, (2) korzystając z reguły de l'Hospitala oraz (3) stosując zwykłe zabiegi algebraiczne.

Zadanie 6. Wykazać, że jeśli funkcja φ ma w otoczeniu x_0 drugą pochodną ciągłą, to istnieje granica

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\left(\varphi(x_0+h)+\varphi(x_0-h)-2\varphi(x_0)\right).$$

Znaleźć tę granicę. Wskazówka: Zastosować twierdzenie o wartości średniej do $\psi(x) = \varphi(x) - \varphi(x-h)$.

Zadanie 7. Znaleźć wzór na n-tą pochodną funkcji $x \mapsto \operatorname{arc\,tg}(x)$. Znaleźć wszystkie pochodne w $x = 0$.

Zadanie 8. Zbadać przebieg i narysować wykres funkcji

$$g(x) = \arcsin\frac{2x}{x^2+1}$$