



Analiza I R

tydzień dziewiąty, 26.11.2012 – 2.12.2012

Zadanie 1. Rozgrzewka: Obliczyć całki nieoznaczone, tzn znaleźć funkcje pierwotne. W nawiasach wymienione są narzędzia jakie mogą być potrzebne przy rozwiązywaniu

(a) $\int (x^2 - 2x + 3)e^x dx$ (całkowanie przez części lub zgadywanie);

(b) $\int \sin^3 x dx$ (podstawienie);

(c) $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$ (suma Fouriera);

(d) $\int \arcsin\left(\frac{x}{x+1}\right) dx$ (całkowanie przez części, podstawienie);

(e) $\int x^{-\frac{3}{2}} \log(1 + \sqrt{x}) dx$ (całkowanie przez części, podstawienie, albo podstawienie i po drodze ułamki proste...)

Zadanie 2. Całkowanie funkcji wymiernych: rozkładamy na ułamki proste postaci

$$\frac{A}{(x-a)^k}, \quad \frac{Ax+B}{(x^2+a^2)^k}$$

Trudniejsze jest tylko całkowanie wyrażeń z wielomianem kwadratowym w wyższej potędze w mianowniku

(a) $\int \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^3 - x} dx$;

(b) $\int \frac{(x-1)^2}{(x+1)^3(x-4)} dx$;

(c) $\int \frac{1}{x^4 - 1} dx$;

(d) $\int \frac{x^4 + 2x^2 + 4}{(1+x^2)^3} dx$;

(e) $\int \frac{3x+1}{x(1+x^2)^2} dx$;

Zadanie 3. Funkcje wymierne od trygonometrycznych:

$$(a) \int \frac{1 + \sin x}{\sin x(1 + \cos x)} dx;$$

$$(b) \int \frac{1}{\sin x \sin 2x} dx;$$

$$(c) \int \frac{2 \operatorname{tg} x + 3}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx;$$

Zadanie 4. Wyrazić $F_{n+1}(x)$ przez $F_n(x)$

$$(a) F_n(x) = \int \left(\frac{x^2}{(1+x^2)} \right)^n dx;$$

$$(b) F_n(x) = \int \frac{1}{x(1+x^2)} dx, \text{ wyliczyć } F_4(x).$$

Zadanie 5. Dalsze ćwiczenia (część na zajęciach, a część w domu, niektóre są trudne)

$$(a) \int \frac{\log |1-x|}{x^{n+1}} dx;$$

$$(b) \int \left(\frac{x}{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x} - 1 \right)^{-2} dx;$$

$$(c) \int \frac{x^4 dx}{x^2 + 1};$$

$$(d) \int \frac{(x^2 - 1) dx}{x^4 + 1};$$

$$(e) \int \frac{(x^2 + 1) dx}{x^4 + 1};$$

$$(f) \int \operatorname{tg}^2 x dx;$$

$$(g) \int \frac{(x+1) dx}{(x^2+x+2)(x^2+4x+5)};$$

$$(h) \int \frac{1}{x^2} \operatorname{arc} \sin x dx;$$

$$(i) \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{1-x^3}};$$

$$(j) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^n+1}};$$

$$(k) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^n-1}}; (l) \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^4}};$$

$$(m) \int \frac{x dx}{x^3+1};$$

$$(n) \int \frac{x dx}{\cos^2 x};$$

$$(o) \int \sin(\log x) dx;$$

$$(p) \int \frac{\operatorname{tg} 2x dx}{2-3\cos^2 x};$$

$$(q) \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2+\cos 2x}};$$

$$(r) \int \frac{\sin x \cos^3 x dx}{2+\sin^2 x};$$

$$(s) \int e^{-x} \frac{x^n}{n!} dx;$$

$$(t) \int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+x}};$$

$$(u) \int \frac{dx}{1+x+\sqrt{x^2+x}};$$

$$(w) \int \frac{dx}{x+\sqrt{x-x^2}};$$

$$(x) \int \frac{dx}{1+\sqrt{x-x^2}};$$

$$(y) \int \sqrt{e^{2x}+2e^x+4} dx.$$