Zanim przejdziemy dalej w naszym badaniu wiązek głównych i koneksji na nich potrzebujemy dwa odwzorowania **Ad** i **ad**

W każdej grupie istnieje odwzorowanie $G \longrightarrow Aut(G)$ $g \longmapsto \varphi_g$ $\varphi_g(h) = ghg^{-1}$
odwzorowanie to jest homomorfizmem grup, ponieważ jak łatwo sprawdzić $\varphi_g \circ \varphi_{g'}(x) = \varphi_g(g' x (g')^{-1}) = gg' x (g')^{-1} g^{-1} = gg' x (gg')^{-1} = \varphi_{gg'}(x)$
oraz $\varphi_e = id$ **Mówimy, że grupa G działa na sobie przy pomocy sprzężenia.** Można rozważać orbity tego działania... Nas jednak interesuje odwzorowanie styczne $T\varphi_g : TG \longrightarrow TG$. Ponieważ $\varphi_g = l_g \circ r_{g^{-1}}$ to oczywiście $T\varphi_g = Tl_g \circ Tr_{g^{-1}}$ i co za tym idzie $T\varphi_g$ zachowuje $T_e G = \mathfrak{g}$

$T\varphi_g$ obcięte do $\mathfrak{g}$ nazywa się ~~ad~~ działaniem dołączonym grupy na algebrze (lub reprezentacją dołączoną) i oznaczane jest Ad_g
$Ad_g = T\varphi_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ jest odwzorowaniem liniowym, ponadto z własności φ_g wynika $Ad_g \circ Ad_h = Ad_{gh}$ czyli $Ad : G \longrightarrow End(\mathfrak{g})$ jest reprezentacją grupy. W grupie macierzowej rzecz jest prosta

$$Ad_g(X) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(g \exp(tX) g^{-1} \right) = gXg^{-1}$$

ad jest wersją infinitezymalną Ad. Zamiast bowiem badać $Ad_g : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ możemy sprawdzić jak wygląda to odwzorowanie wokół e dla niedużych g $\quad Ad_{\exp(tX)} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ $\quad ad_X = \frac{d}{dt} Ad_{\exp(tX)}$ w tym sensie, że

$$ad_X(Y) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Ad_{\exp(tX)}(Y) \underset{\text{macierzowo}}{=} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(tX)\, Y \exp(-tX) = XY - YX = [X,Y]$$

Przydatny wzorek

↳ Φ - homomorfizm G różniczkowalny $\quad \underline{\Phi(\exp(X)) = \exp(T_e\Phi(X))}$ wykazać //

i zastosować do Ad_g $\quad \Psi_g$

Możemy teraz przejść do Działania grupy G na rozmaitości M. Wspomnieliśmy już wcześniej o działaniu grupy na ~~rozmaitości~~ sobie, że jest to odwzorowanie z G do ~~$Aut(G)$~~ $Diff(G)$. ~~Ponieważ G ma strukturę wyp. wyższą w zgodności (działamy przez homomorfizmy)~~. Jeśli M jest zbiorem powiedzielibyśmy, że działanie grupy na zbiorze M to odwzorowanie $\sigma : G \longrightarrow Bij(M)$ zachowujące składanie tzn

$\sigma_g \circ \sigma_h = \sigma_{gh}$. piszę się też tak $\sigma : G \times M \longrightarrow M \ni \sigma(g,m)$

$$\sigma(g, \sigma(h,m)) = \sigma(gh, m)$$

Dla grupy Liego i gładkiej rozmaitości wymagamy, aby odwzorowanie σ było gładkie. Zazwyczaj w notacji opuszczamy symbol σ zamiast $\sigma(g, m)$ lub $\sigma_g(m)$ piszemy po prostu gm. Działanie grupy na rozmaitości można badać długo i namiętnie. My jednak potrzebujemy jeden bardzo konkretny przykład, do którego będziemy zmierzać:

(1) Orbitą punktu $m \in M$ pod działaniem G nazywamy zbiór $\{q \in M: \ q = g \cdot m$ dla pewnego $G \ni g\}$. Orbitę oznaczamy Gm.

Oczywiście działanie grupy zadaje podział ~~G~~ M na orbity, tzn. jest relacja równoważności $q \sim q' \Leftrightarrow \exists g: \ q = gq'$ i orbity są klasami względem tej relacji. Zbiór orbit oznaczamy M/G. Gdy M jest rozmaitością M/G dziedziczy w szczególności topologię, ale ta topologia może być dość paskudna – w szczególności niehausdorffowa. Nas będzie interesować sytuacja kiedy M/G może zostać w naturalny sposób wyposażone w strukturę rozmaitości taką, że $\pi: M \longrightarrow M/G$ jest gładkie. W tym celu potrzebujemy dwa pojęcia i jedno twierdzenie

• Mówimy, że działanie jest tranzytywne na M jeśli M jest orbitą, tzn. z każdego punktu do każdego można dojść przy pomocy elementu grupy. Mówimy wtedy że M jest przestrzenią jednorodną dla G.

Mówimy, że działanie jest <u>wolne</u> jeśli dla każdego elementu $q \in M$ zbiór $G_q = \{ g \in G : \ gq = q \}$ jest trywialny, tzn $G_q = \{e\}$ zauważmy, że G_q zawsze jest podgrupą w G. W takim przypadku orbita jest w bijekcji z grupą. Istotnie. Weźmy orbitę elementu m

$G \cdot m$ $\quad \sigma_m : G \longrightarrow Gm \quad \sigma_m(g) = gm \quad \sigma_m$ jest surjektywne

co wynika z definicji orbity. Jeśli działanie jest wolne to

$$\sigma_m(g) = \sigma_m(h)$$

$$gm = hm \qquad h^{-1} g m = m \to h^{-1} g = e \to g = h$$

odwzorowanie to też jest injektywne.

Będziemy mówić o wolnym działaniu grupy, tzn o takim, że każda orbita wygląda jak grupa bez jedynki (coś w rodzaju przestrzeni afinicznej).

Potrzebujemy jeszcze aby przestrzeń ilorazowa M/G miała strukturę rozmaitości i to taką, aby $M \longrightarrow M/G$ było wiązką różniczkową. Okazuje się, że do tego potrzeba aby działanie było właściwe tzn aby odwzorowanie

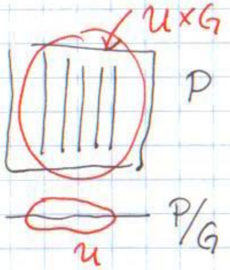
$G \times M \ni (g, x) \xrightarrow[\Sigma]{} (gx, x) \in M \times M$ miało własność: dla każdego zwartego zbioru $K \subset M \times M$ $\Sigma^{-1}(K)$ jest zwarty.

Mamy wtedy twierdzenie: Jeśli P jest rozmaitością gładką a G grupą Liego, która działa na P w sposób gładki, wolny i właściwy to przestrzeń orbit P/G ma strukturę rozmaitości wymiaru $\dim P - \dim G$ o tej własności, że dla każdego $m \in P/G$ istnieje otoczenie $\mathcal{U}$ w P/G i dyfeomorfizm

$$\tau : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \longrightarrow G \times \mathcal{U}$$

$$p \longmapsto (\alpha(p), \beta(p)) \quad : \quad \beta(p) = \pi(p)$$

$$\tau(g\cdot p) = (g\cdot\alpha(p), \beta(p))$$



Struktura $P \longrightarrow P/G$ jest strukturą wiązki głównej.

Przejdziemy więc teraz do koneksji w wiązkach głównych — temat ważny w kontekście klasycznej teorii pola, w szczególności teorii pól z cechowaniem.

$\pi: P \to M$ wiązka główna z grupą G. Koneksja w wiązce jest to — jak zwykle — rozkład przestrzeni stycznej TP na część horyzontalną i wertykalną w każdym punkcie uwaga: jest to bardzo ogólna i bardzo dobra definicja !!!!
Będziemy teraz zgłębiać przez jakiś czas warunek zgodności koneksji ze strukturą wiązki głównej.

$$T_pP \longrightarrow H_p \oplus V_p.$$

popatrzmy na pionowe wektory — pionowe tzn styczne do włókna wiązki. Korzystając z działania grupy oraz z odwzorowania exp możemy skonstruować odwzorowanie

$$\mathfrak{g} \ni X \longmapsto \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(\exp(tX)\cdot p\right) = X_p(p) \in V_p$$

pole wektorowe

(1) każdy element algebry definiuje pole wektorowe pionowe na P,

$$[X_p, Y_p] = [X, Y]_p$$

(2) odwzorowanie to jest izomorfizmem przestrzeni wektorowych. (kanonicznym)

Oznacza to że koneksja to

$$T_pP \longrightarrow H_p \oplus \mathfrak{g}$$

Koneksję więc zadać można za pomocą formy ~~liniowej~~ o wartościach w $\mathfrak{g}$: $\theta_p : TP \longrightarrow \mathfrak{g}$ o tej własności, że na H_p znika a na $\mathfrak{g}$ jest identycznością.

Koneksja jest niezmiennicza ze względu na okładanie grupy jeśli $\forall g \; T\sigma_g(H_p) = H_{gp}$.

Sprawdźmy co to znaczy dla formy. W tym celu przyda nam się wiedza jak zachowuje się pole X_p pod okładaniem elementu grupy g.

$$T\sigma_g(X_p(p)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \sigma_g(\exp(tX)p) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(\underbrace{g\exp(tX)g^{-1}gp}\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(t\,Ad_g X)(gp) = (Ad_g X)_p(gp) \qquad (\sigma_g)_* X_p = (Ad_g X)_p$$

$$\langle (\sigma_g)^* \vartheta_p , \underset{T_pP}{\overset{}{v}} \rangle = \langle \vartheta_p , T\sigma_g(v) \rangle = \langle \vartheta_p(gp), T\sigma_g(v^h + v^v) \rangle = \langle \vartheta_p(gp), \underset{\text{znika}}{T\sigma_g(v^h)} +$$

$$+ T\sigma_g(v^v) \rangle = \langle \vartheta_p(gp), T\sigma_g(X_p(p)) \rangle = \langle \vartheta_p(gp), (Ad_g X)_p(g,p) \rangle =$$

$$= (Ad_g X)_p(gp) \qquad X = \langle \vartheta_p, v \rangle$$

(8)

$\forall v \in TP$ $\quad \boxed{(\sigma_g)^* \vartheta_P(v) = Ad_g(\vartheta_P(v))}$

taka własność mamy np. współzmienniczości formy różniczkowej

Forma koneksji jest formą współzmienniczą

Wersja infinitezymalna: biorąc $g = \exp(tX)$

$$\sigma_{\exp(tX)}^* \vartheta_P = Ad_{\exp(tX)}(\vartheta_P)$$

$$\mathcal{L}_{X^P} \vartheta_P = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \left(Ad_{\exp(tX)} \cdot \vartheta_P\right) = ad_X \vartheta_P$$

$\forall v \in TP$ $\quad (\mathcal{L}_{X^P} \vartheta_P)(v) = ad_X \vartheta_P(v) = [X, \vartheta_P(v)]$

z drugiej strony mamy

$$\mathcal{L}_{X^P} \vartheta_P = d(i_{X^P} \vartheta_P) + i_{X^P} d\vartheta_P$$

$\downarrow$

$\langle \vartheta_P, X^P \rangle = X$

stała funkcja

różniczka znika

zaraz się przyda!

$$ad_X \vartheta_P = i_{X^P} d\vartheta_P$$

Pomyślmy teraz o krzywiźnie: zgodnie z bardzo dobrą staroświecką definicją $u, v \in \mathfrak{X}(M)$

$$R(u,v) = [u^h, v^h] - [v,v]^h$$ $R(u,v)$ jest pionowym polem

wektorowym, tzn ma wartości w $\mathfrak{g}$. Używamy ϑ_p do obu stron:

$$\underbrace{\vartheta_p(R(u,v))}_{=R(u,v)\,\in\,\mathfrak{g}} = \vartheta_p([u^h, v^h]) - \underbrace{\vartheta_p([u,v]^h)}_{=0} =$$

następnie patrzymy na $d\vartheta_p(A,B) = A\vartheta_p(B) - B\vartheta_p(A) - \vartheta_p([A,B])$

$$= -d\vartheta_p(u^h, v^h) - u^h\underbrace{\vartheta_p(v^h)}_{=0} + v^h\underbrace{\vartheta_p(u^h)}_{=0} = -d\vartheta_p(u^h, v^h)$$

o krzywiźnie wiadomo, że ma tensorowy charakter tzn liczy się tak naprawdę na wektorach a nie na polach wektorowych.

W kontekście wiązki głównej rozważa się krzywiznę jako część horyzontalną

Dwa słowa ~~ae~~ ~~wi~~ o formach na wiązkach

$P \to M$ β - (k)-forma na P - mówimy że β jest horyzontalne ~~(1 dla~~ wiązka ~~horyzontalne~~) jeśli $i_v \beta = 0$ dla $v \in VP$! Jeśli mam dowolną formę β to można wyznaczyć jej horyzontalną część wzorem i koneksji!

$$\beta^h(v_1 \dots v_k) = \beta(v_1^h, \dots, v_k^h)$$

FAKT: Część horyzontalna $d\vartheta_P$ jest równa

$$\Omega(u,v) = d\vartheta_P(u,v) - [\vartheta_P(u), \vartheta_P(v)]_{\mathfrak{g}}$$

(1) na horyzontalnych się zgadza

$$(i_{X_P} d\vartheta_P)(v) = ad_X \vartheta_P(v) = [\underset{\vartheta_P(X_P)}{\underset{\uparrow}{X}}, \vartheta_P(v)]_{\mathfrak{g}}$$

część horyzontalna $\to$ trzeba odjąć

$$(d\vartheta_P)_{hor} = d\vartheta_P - [\vartheta_P; \vartheta_P]$$

Ω jest też ~~Adrale~~ współzmiennicza