



## Analiza I R

tydzień dziesiąty, 3.12.2012 – 9.12.2012

Szanowni Państwo, po analizie wyników kolokwium postanowiłam zmienić nieco metody dydaktyczne (prawda, że to bardzo poważnie brzmi?). W nadchodzącym tygodniu będziemy więc pracować inaczej. We wtorek pierwsza godzina zajęć poświęcona będzie na samodzielne rozwiązywanie zadań w grupach, w drugiej godzinie grupy podzielą się z pozostałymi swoimi rezultatami. Sądzę, że prezentacje i dyskusja przeciągną się na środek. W razie czego przejdziemy do szeregów liczbowych. Oto zadania przeznaczone do rozwiązywania grupowego wraz ze wskazówkami:

**Grupa 1 - podstawienia Eulera** Podstawienie Eulera służy do znajdowania funkcji pierwotnych do funkcji postaci  $f(x) = R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$ , gdzie  $R$  jest wymierną funkcją dwóch zmiennych. Chodzi o to, żeby funkcję zawierającą pierwiastek sprowadzić do funkcji wymiernej. Jeśli oznaczymy  $y := \sqrt{ax^2 + bx + c}$  sprowadza się to do sparametryzowania fragmentu krzywej

$$x \mapsto (x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) \in \mathbb{R}^2$$

dla  $y > 0$  parametrem  $t$  w taki sposób, aby  $x(t)$  i  $y(t)$  były wymierne.

- (1) PIERWSZE PODSTAWIENIE EULERA działa gdy  $a > 0$ , podstawiamy  $y = \sqrt{ax} + t$ . Wyznaczamy  $x(t)$ ,  $y(t)$  i  $dx = x'(t)dt$ ;
- (2) DRUGIE PODSTAWIENIE EULERA działa gdy  $c > 0$ , podstawiamy  $y = tx + \sqrt{c}$ ;
- (3) TRZECIE PODSTAWIENIE EULERA działa gdy łatwo jest wybrać punkt  $(x_0, y_0)$  na krzywej, tzn  $y_0 = \sqrt{ax_0^2 + bx_0 + c}$ , podstawiamy  $y - y_0 = t(x - x_0)$ . Prowadząc rachunki warto zapisać  $y^2$  w potęgach  $x - x_0$  zamiast  $x$ .

Zadanie polega na obliczeniu trzema sposobami całki nieoznaczonej

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}} \quad \text{oraz jej wersji oznaczonej} \quad \int_0^1 \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}.$$

**Grupa 2 – podstawienia trygonometryczne i hiperboliczne dla całek z pierwiastkami.** Gdy funkcja podcałkowa ma postać  $f(x) = R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$  można spróbować pozbyć się pierwiastka stosując podstawienia trygonometryczne lub hiperboliczne. Obliczcie poniższe całki używając wskazanych podstawień i zastanówcie się w jaki sposób powinno się decydować, którego z podstawień można i warto użyć w konkretnym przypadku:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)\sqrt{x^2 + b^2}} \quad x = b \operatorname{tg} t, \quad \text{dwa przypadki } 0 < a < b, \quad 0 < b < a;$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}, \quad x + 1 = \operatorname{tg} t;$$

$$\text{całka jak wyżej,} \quad x + 1 = \sinh t;$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{5 + 3\sqrt{1 - x^2}}, \quad x = \sin t.$$

Jako zadanie dodatkowe proszę zapisać funkcje odwrotne do  $\sinh$  i  $\cosh$  z użyciem logarytmów.

**Grupa 3 – definicja całki Riemanna oraz różne całki oznaczone.** Rozważając sumy Riemanna odpowiednio dobranych całek wykazać, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2} = \frac{\pi}{4}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{kn} \right) = \log k, \quad \mathbb{N} \ni k \geq 2$$

Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi (wybrać dwa punkty spośród poniższych)

- (a)  $y = x^2, \quad y = \frac{1}{2}x^2, \quad y = 3x,$
- (a)  $y = e^{3x}, \quad y = e^{-x}, \quad y = \sqrt{e},$
- (a)  $y^2 = -x, \quad y = x + 6,$
- (a)  $y = \arctg x, \quad y = \operatorname{arccotg} x, \quad y = 0.$

**Grupa 4 – Różne całki oznaczone.** Wybierzcie kilka całek oznaczonych i policzcie je. Im więcej tym lepiej. Im trudniejsze tym lepiej

- (a)  $\int_0^1 \frac{\arctg \sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}} dx;$
- (b)  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \operatorname{tg}^p x}$  dla  $p \in \mathbb{R};$
- (c)  $\int_0^1 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} dx;$
- (d)  $\int_1^2 \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2+1}};$
- (e)  $\int_0^{\pi} \frac{dx}{3 + 2 \cos x};$
- (f)  $\int_0^{\log 2} \sqrt{e^x - 1} dx;$
- (g)  $\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x^2}};$
- (h)  $\int_a^b (x-a)^m (b-x)^n dx, \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad a < b;$
- (i)  $\int_0^1 (1-x^2)^n dx, \quad n \in \mathbb{N};$
- (j)  $\int_0^1 \sqrt{1+4x^2} dx;$
- (k)  $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{1 + \sin^2 x};$
- (l)  $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + 2 \sin x (\sin x + \cos x)};$

(m)  $\int_0^\pi \cos^n x \cos nx \, dx;$

(n)  $\int_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x} dx, n \in \mathbb{N}.$