Geometria Różniczkowa II

wykład dziesiąty

Wykład dziesiąty rozpoczyna serię wykładów poświęconych geometrii symplektycznej. Zajmować się będziemy głównie zastosowaniami geometrii symplektycznej w mechanice, jednak zacząć trzeba od materiału klasycznego. Materiał omawiany w ramach tego i najbliższych wykładów pogłębiać można przy pomocy następujących podręczników: Rolf Berndt *An introduction to symplectic geometry*, Graduated Studies in Mathematics, vol 26, AMS, lub Paulette Liebermann, Charles-Michel Marle, *Symplectic Geometry and Analytical Mechnics*, 1987 D. Reidel Publishing Company.

Prawdopodobnie każdy z państwa rozwiązywał kiedyś (na przykład na ćwiczeniach z GRI) następujące zadanie

Zadanie 1 Niech V będzie przestrzenią wektorową wymiaru n. Pokazać, że dla każdego niezerowego dwukowektora $\omega \in \wedge^2 V^*$ istnieje liczba k, $2k \leqslant n$ oraz istnieje baza $(\varphi^i)_{i=1}^n$ w przestrzeni V^* w której ω ma postać kanoniczną, tzn

$$\omega = \varphi^1 \wedge \varphi^{k+1} + \varphi^2 \wedge \varphi^{k+2} + \cdots + \varphi^k \wedge \varphi^{2k}.$$

Jeśli ktoś widzi ten problem pierwszy raz w życiu powinien potraktować go jako zadanie domowe. Jednym ze sposobów rozwiązania jest pokazanie metody konstrukcji odpowiedniej bazy. Każdy dwukowektor ω zadaje odwzorowanie

$$\widetilde{\omega} : V \to V^*, \quad \widetilde{\omega}(v) = \omega(v, \cdot).$$

W dalszym ciągu będziemy mówić o dwukowektorach *niezdegenerowanych*, tzn takich, dla których powyższe odwzorowanie jest izomofizmem liniowym. W takim przypadku $2k = n$, tzn. dwukowektor niezdegenerowany istnieć może jedynie na przestrzeni wektorowej parzystego wymiaru. Przestrzeń wektorową z niezdegenerowanym dwukowektorem nazywa się czasami *wektorową przestrzenią symplektyczną*. W standardowym kursie algebry liniowej nie rozważa się zazwyczaj takich przestrzeni. Dyskutuje się natomiast przestrzenie z iloczynem skalarnym, czyli przestrzenie wyposażone w odwzorowanie dwuliniowe, niezdegenerowane i symetryczne. Tutaj zastępujemy warunek symetrii przez warunek antysymetrii.

Wiele wcześniejszych wykładów poświęciliśmy na rozmaite problemy związane z rozmaitościami ze strukturą Riemanna, czyli rozmaitościami, na których przestrzenie styczne są przestrzeniami wektorowymi z iloczynem skalarnym. Wymaga się także gładkiej zależności iloczynu skalarnego od punktu na rozmaitości, co prowadzi do pojęcia tensora Riemanna. Różniczkowym odpowiednikiem symplektycznej przestrzeni wektorowej jest rozmaitość symplektyczna. Jest to rozmaitość P z dwuformą ω niezdegenerowaną i zamkniętą, tzn taką, że $d\omega = 0$. Wiadomo, że w przestrzeni wektorowej z iloczynem skalarnym zawsze znaleźć można bazę ortonormalną, tzn. taką w której iloczyn skalarny ma postać kanoniczną. Nie udaje się to zazwyczaj na rozmaitości. Zawsze można znaleźć układ współrzędnych taki, że w jednym punkcie baza związana z tym układem jest ortonormalna, ale już w punktach sąsiednich zazwyczaj coś się psuje. Miarą tego „psucia" jest tensor krzywizny. Możemy zastanowić się nad podobnym problemem dla rozmaitości symplektycznych. Łatwo stwierdzić, że zawsze można znaleźć taki układ współrzędnych w otoczeniu wybranego punktu, że w tym punkcie forma symplektyczna ma postać kanoniczną.

Nie wiadomo jednak na pierwszy rzut oka, czy istnieją układy współrzędnych dobre dla całego otocznia a nie tylko jednego punktu. Okazuje się, że jest to jedna z podstawowych różnic między strukturą Riemanna a strukturą symplektyczną. Do kolekcji wizerunków matematyków pora dołączyć (Fig.1) Jeana Gastona Darboux (1842-1917).

Fig. 1: J.G. Darboux

Twierdzenie 1 (Darboux) *Niech (P, ω) będzie rozmaitością symplektyczną wymiaru $2n$. Dla każdego punktu $x \in P$ istnieje otoczenie $\mathcal{O}$ i układ współrzędnych $(q^i, p^i)_{i=1}^n$ w tym otoczeniu taki, że w każdym punkcie $y \in \mathcal{O}$ forma symplektyczna ω ma postać*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{d}q^i \wedge \mathsf{d}p^i.$$

Dowód tego twierdzenia wymaga od nas pewnych przygotowań dotyczących pól wektorowych zależnych od czasu. Zacznijmy od następującego zadania:

Zadanie 2 Niech $F : \mathbb{R} \times M \to M$ będzie gładką rodziną dyfeomorfizmów a $\sigma : \mathbb{R} \times M \to \wedge^k \mathsf{T}^* M$ gładką rodziną form. Udowodnić wzór

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(F_t^* \sigma_t) = F_t^* \left(\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\sigma_t + \mathsf{d}(\imath(X_t)\sigma_t) + \imath(X_t)\mathsf{d}\sigma_t \right),$$

gdzie $F_t = F(t, \cdot)$, $\sigma_t = \sigma(t, \cdot)$ a X_t jest polem wektorowym na M od czasu związanym z F_t, tzn $X_t(q)$ jest elementem $\mathsf{T}_q M$ stycznym to krzywej $s \longmapsto F(t+s, q)$ w $s = 0$. Mówimy, że $X : \mathbb{R} \times M \to \mathsf{T}M$, $X(t, q) = X_t(q)$ jest polem zależnym od czasu.

Rozwiązanie: Rozważmy najpierw przypadek specjalny: $M = \mathbb{R} \times Q$. Niech także rozważana rodzina dyfeomorfizmów będzie bardzo prosta (oznaczmy ją ψ_t zamiast F_t, co przyda się później), $\psi_t(s, q) = (s + t, q)$. Pole wektorowe związane z tą rodziną jest stałe, tzn. nie zależy od t, i ma postać $Y_t(s, q) = \partial_s$ (znowu zmiana oznaczeń Y_t zamiast X_t, także przydatna w przyszłości). Rodzinę form na $\mathbb{R} \times Q$ można zapisać w następującej postaci:

$$\sigma_t = \mathsf{d}s \wedge a(t, s) + b(t, s)$$

gdzie a i b są dwuparametrowymi, gładkimi rodzinami form na M rzędów odpowiednio $k-1$ i k. W tej sytuacji

$$\psi_t^* \sigma_t = \mathsf{d}s \wedge a(t, s + t) + b(t, s + t)$$

oraz

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(\psi_t^* \sigma_t) = \mathsf{d}s \wedge \frac{\partial}{\partial t} a(t, s + t) + \mathsf{d}s \wedge \frac{\partial}{\partial s} a(t, s + t) + \frac{\partial}{\partial t} b(t, s + t) + \frac{\partial}{\partial s} a(t, s + t) \tag{1}$$

Przyjrzyjmy się teraz składnikom po prawej stronie wzoru:

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t} \sigma_t = \mathsf{d}s \wedge \frac{\partial}{\partial t} a(t, s) + \frac{\partial}{\partial t} b(t, s),$$

i po cofnięciu przy pomocy ψ_t mamy

$$\psi_t^* \left(\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t} \sigma_t \right) = \mathsf{d}s \wedge \frac{\partial}{\partial t} a(t, s + t) + \frac{\partial}{\partial t} b(t, s + t), \tag{2}$$

co pasuje o czerwonych składników sumy (1). Przechodzimy do następnego składnika:

$$\imath(Y_t)\sigma_t = a(t, s), \qquad \psi_t^*(\imath(Y_t)\sigma_t) = a(t, s + t),$$

$$\mathsf{d}(\psi_t^*(\imath(Y_t)\sigma_t)) = \mathsf{d}s \wedge \frac{\partial}{\partial s} a(t, s + t) + \mathsf{d}_Q a(t, t + s). \tag{3}$$

Mamy kawałek pasujący do niebieskiego składnika i jeszcze coś, co jest niepotrzebne. Pora na ostatni składnik

$$\mathsf{d}\sigma_t = -\mathsf{d}s \wedge \mathsf{d}_Q a(t, s) + \mathsf{d}s \wedge \frac{\partial}{\partial s} b(t, s) + \mathsf{d}_Q b(t, s).$$

Po zwężeniu z Y_t i cofnięciu mamy

$$\psi_t^*(\imath(Y_t)\mathsf{d}\sigma_t) = -\mathsf{d}_Q a(t, s + t) + \mathsf{d}s \wedge \frac{\partial}{\partial s} b(t, s). \tag{4}$$

Ostatni składnik pasuje do wyrazu zielonego, zaś czarny upraszcza się z tym niepotrzebnym w (3). W przypadku specjalnym wzór został więc udowodniony. Rozważmy trzy odwzorowania:

$$\begin{aligned} \jmath : M \to \mathbb{R} \times M, &\quad \jmath(m) = (0, m) \\ \psi_t : \mathbb{R} \times M \to \mathbb{R} \times M, &\quad \psi_(s, m) = (s + t, m) \\ F : \mathbb{R} \times M \to M, &\quad F(t, m) = F_t(m) \end{aligned}$$

Odwzorowanie F_t możemy zapisać trochę dziwnie, ale przydatnie, jako

$$F_t = F \circ \psi_t \circ \jmath \quad \text{wtedy} \quad F_t^* = \jmath^* \circ \psi_t^* \circ F^*$$

Liczymy więc $\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(F_t^* \sigma_t)$:

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(F_t^* \sigma_t) = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(\jmath^* \psi_t^* F^* \sigma_t) = \jmath^* \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(\psi_t^*(F^* \sigma_t)) =$$

Odwzorowanie ψ_t jest jak w przykładzie specjalnym, wolno więc zastosować wzór:

$$= \jmath^* \psi_t^* \left(\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(F^* \sigma_t) + \mathsf{d}(\imath(Y_t) F^* \sigma_t) + \imath(Y_t) \mathsf{d} F^* \sigma_t \right) =$$

W pierwszym składniku odwzorowanie F nie zależy od t, zatem można zamienić różniczkowanie po t z cofnięciem. Drugi ze składników można przekształcić korzystając z faktu, iż $Y_t = \partial_s$ a $\mathsf{T}F(Y_t) = X_t$, zatem

$$\mathsf{d}(\imath(Y_t) F^* \sigma_t = \mathsf{d}(F^* \imath(X_t) \sigma_t) = F^* \mathsf{d}(\imath(X_t) \sigma_t)$$

Trzeci składnik to

$$\imath(Y_t) \mathsf{d}(F^* \sigma_t) = \imath(Y_t) F^* \mathsf{d} \sigma_t = F^* \imath(X_t) \mathsf{d} \sigma_t.$$

Po podstawieniu powyższych przekształceń mamy

$$= \jmath^* \psi_t^* F^* \left(\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(\sigma_t) + \mathsf{d}(\imath(X_t) \sigma_t) + \imath(X_t) \mathsf{d} \sigma_t \right) = F_t^* \left(\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(\sigma_t) + \mathsf{d}(\imath(X_t) \sigma_t) + \imath(X_t) \mathsf{d} \sigma_t \right).$$

Wzór został więc wyprowadzony. Ostatnie dwa składniki w nawiasie przypominają pochodną Liego formy względem pola wektorowego, zapisuje się więc je czasami jako $\mathcal{L}_{X_t} \sigma_t$. $\square$

Drugi problem przygotowawcze dotyczy *potoków pól zależnych od czasu*. Nie będziemy formułować go jako zadania do rozwiązania, przyjrzymy się jednak sytuacji. Zaczynamy od gładkiej rodziny pól wektorowych na M, którą można zadać przy pomocy odwzorowania $X : \mathbb{R} \times M \to \mathsf{T}M$ zachowującego rzut na M. Możemy rozszerzyć to pole do prawdziwego i niezależnego od niczego pola $\widetilde{X}$ na $\mathbb{R} \times M$ wzorem $\widetilde{X}(t, m) = \partial_t + X_t(m)$. Potok pola $\widetilde{X}$ jest określony na $\mathbb{R} \times M$ i ma postać

$$\widetilde{\varphi}_s(t, m) = (t + s, \varphi_s(t, m)).$$

W szczególności warunek początkowy $t = 0$ dla $s = 0$ daje odwzorowanie

$$\widetilde{\varphi}_s(0, m) = (s, \varphi_s(0, m)).$$

Z polem zależnym od czasu związana jest więc jednoparametrowa rodzina dyfeomorfizmów

$$F : \mathbb{R} \times M \to M, \quad F(s, m) = \varphi_s(0, m,)$$

Wygląda ona podobnie do jednoparametrowej grupy dyfeomorfizmów związanej z polem niezależnym od czasu, jednak nie ma własności grupowych. Ponieważ odwzorowanie φ_s pochodzi od prawdziwej grupy dyfeomofrizmów na $\mathbb{R} \times M$ obowiązuje pewna zasada składania, ale jest ona bardziej skomplikowana:

$$\varphi_{r+s}(0, m) = \varphi_r(r, \varphi_s(0, m))$$

i nie da się wyrazić w terminach samego odwzorowania F. Skonstruowane powyżej odwzorowanie F nazywa się czasami potokiem pola zależnego od czasu.

Dowód twierdzenia Darboux Niech (P, ω) będzie rozmaitością symplektyczną. Ustalamy punkt $x \in P$ oraz otoczenie $\mathcal{U}$ tego punktu w którym wybieramy układ współrzędnych $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ taki, żeby w punkcie x forma ω miała postać kanoniczną. Używając odwzorowania związanego z mapą możemy także przeciągnąć na otoczenie $\mathcal{U}$ kanoniczną formę symplektyczną z $\mathbb{R}^{2n}$. Przeciągnieta forma jest oczywiście w postaci kanonicznej. Oznaczmy ją η. W punkcie x mamy $\omega_x = \eta_x$. Dowód polegał będzie na znalezieniu odwzorowania $F : \mathcal{O} \to M$, które będzie dyfeomorfizmem $\mathcal{O}$ na $F(\mathcal{O})$ zachowującym punkt x dla pewnego $\mathcal{O}$ zawartego w $\mathcal{U}$ spełniającym warunek $F^*\eta = \omega$. Nowa mapa w otoczeniu punktu x postaci $\varphi \circ F$ dostarczy współrzędnych kanonicznych dla formy ω w otoczeniu $\mathcal{O}$ punktu x.

Niech ω_t będzie rodziną form symplektycznych daną wzorem $\omega_t = t\eta + (1-t)\omega$. Możemy myśleć o tej rodzinie jako o deformacji formy ω. Istotnie bowiem $\omega_0 = \omega$ zaś $\omega_1 = \eta$. Potrzebujemy teraz rodziny dyfeomorfizmów spełniających warunek $F_t^*\omega_t = \omega$ i zachowujących x, tzn. $F_t(x) = x$. Poszukiwanym odwzorowaniem F byłoby wtedy F_1. Jak znaleźć taką rodzinę? Skoro $F_t^*\omega_t = \omega$, to

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}(F_t^*\omega_t) = 0.$$

Skorzystajmy więc ze wzoru z zadania:

$$0 = F_t^*\left(\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\omega_t + \mathsf{d}\imath(X_t)\omega_t - \imath(X_t)\mathsf{d}\omega_t\right)$$

Każda z form ω_t jest zamknięta, więc ostatni wyraz w nawiasie znika. Postać ω_t jest znana, możemy policzyć pierwszy składnik: $\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\omega_t = \eta - \omega$. Wzór przyjmuje więc postać

$$0 = F_t^*\left(\eta - \omega + \mathsf{d}\imath(X_t)\omega_t\right),$$

a skoro F_t to dyfeomorfizmy, cofnięcie można opuścić. Ostatecznie warunek na zależne od czasu pole wektorowe związane z F_t ma postać

$$\mathsf{d}\imath(X_t)\omega_t = \omega - \eta.$$

Formy symplektyczne ω i η są zamknięte, a więc lokalnie zupełne. Jeśli λ jest taką lokalną formą, że $\mathsf{d}\lambda = \omega - \eta$, to X_t można poszukiwać w postaci spełniające równanie

$$\imath(X_t)\omega_t = \lambda.$$

Każda z form ω_t jest niezdegenerowana przynajmniej dla pewnego otoczenia zera w $\mathbb{R}$, zatem wybór formy pierwotnej λ determinuje X_t w sposób jednoznaczny. Dyskutując pola zależne od czasu zauważyliśmy, że każdemu takiemu polu odpowiada lokalna rodzina dyfeomorfizmów. Zmniejszając ewentualnie otoczenie na którym jest ona określona możemy zapewnić, że rozwiązanie będzie istniało także dla $t = 1$. Wybierając λ mamy pewną swobodę. Ustalając $\lambda_x = 0$ zapewnimy, że $X_t(x) = 0$, wtedy F_t będzie zachowywało punkt x.

Pokazaliśmy zatem, że możliwe jest skonstruowanie odwzorowana F spełniającego nasze wymagania, a co za tym idzie możliwe jest skonstruowanie kanonicznego układu współrzędnych w otoczeniu każdego punktu. $\square$

W dalszym ciągu kwestia kanonicznych współrzędnych nie będzie nam spędzała snu z powiek. W mechanice istotna jest struktura symplektyczna na przestrzeni totalnej wiązki kostycznej, gdzie współrzędne kanoniczne mamy za darmo. Czasami pojawiają się inne przestrzenie fazowe, n.p. afiniczne wersje wiązki kostycznej, jednak także w tym przypadku nie ma trudności ze skonstruowaniem odpowiednich współrzędnych.