Analaliza I R

tydzień jedenasty, 10.12.2012 – 16.12.2012

Szanowni Państwo, na zajęciach w ubiegłym tygodniu pracowaliśmy nad obliczaniem całek z funkcji zawierających pierwiastki z trójmianów kwadratowych. Omówiliśmy podstawienia Eulera oraz rozwiązaliśmy przykład w którym należało zastosować podstawienie trygonometryczne. Zajęliśmy się także całką oznaczoną obliczając przy jej pomocy pole powierzchni oraz sumy pewnych szeregów liczbowych. Na zajęciach we wtorek zaczniemy od niezrobionych zadań grupy drugiej:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}, \quad x+1=\operatorname{tg} t \text{ lub } x+1=\sinh t; \qquad \int_0^1 \frac{dx}{5+3\sqrt{1-x^2}}, \quad x=\sin t.$$

Będziemy także kontynuować obliczanie całek oznaczonych. Ponownie poproszę Państwa o samodzielne rachunki w pierwszej połowie zajęć. Będzie można wybierać spośród następujących całek (grupa 4 z poprzednich zajęć):

(a) $\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}}dx$ – podstawiamy $t=\sqrt{x}$, dalej jest łatwo;

(b) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\operatorname{tg}^p x}$ dla $p \in \mathbb{R}$ – nie mam dobrego pomysłu (po podstawieniu $t=\operatorname{tg} x$ wychodzi całka, którą nadal nie wiem jak policzyć), może Państwo coś wymyślą?;

(c) $\int_0^1 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\,dx$ – jest to jedna z typowych całek, jednak na taką jeszcze nie trafiliśmy; należy podstawić $t=\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}$ i bardzo cierpliwie liczyć do końca;

(d) $\int_1^2 \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$ – można zastosować podstawienie hiperboliczne $x=\sinh t$ a następnie jedno ze standardowych podstawień $u=\operatorname{tgh}\frac{t}{2}$; działa ono tak samo jak podobne podstawienie $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$;

(e) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}$ – podstawiamy $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, całka jest po przedziale niezwartym, tzn $\int_0^\infty$, co traktujemy jako $\lim_{R\to\infty}\int_0^R$;

(f) $\int_0^{\log 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$ – podstawiamy $t=\sqrt{e^x-1}$;

(g) $\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x^2}}$ – w miarę sprawnie liczy się pierwszym podstawieniem Eulera;

(h) $\int_a^b (x-a)^m(b-x)^n dx$, $m,n \in \mathbb{N}$, $a<b$ – wiele razy przez części zmniejszając jeden wykładnik a zwiększając drugi;

(i) $\int_0^1 (1-x^2)^n dx$, $n \in \mathbb{N}$ – wiele razy przez części zaczynając od $f(x) = (1-x^2)^n$, $g'(x) = 1$;

(j) $\int_0^1 \sqrt{1+4x^2} dx$ – pierwsze podstawienie Eulera lub stosowne podstawienie trygonometryczne (np $x = \frac{1}{4} \operatorname{tg} t$);

(k) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x}$ – podstawiamy $t = \operatorname{tg} x$, całkę po odcinku $[-\pi, \pi]$ trzeba jednak w takim wypadku podzielić na całki po mniejszych odcinkach na których podstawienie jest dobre;

(l) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+2\sin x(\sin x + \cos x)}$ – podstawiamy tangens dzieląc na dwie całki;

(m) $\int_0^{\pi} \cos^n x \cos nx \, dx$ – skorzystać z $\cos nx = \frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}$;

(n) $\int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx$, $n \in \mathbb{N}$ – skorzystać z $\sin nx = \frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}$.

We środę przejdziemy do szeregów liczbowych. Zajmiemy się badaniem zbieżności szeregów wybranych spośród następujących (zadania nie rozwiązane na ćwiczeniach można potraktować jako domowe)

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nE(\sqrt{n})}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-n(-1)^n}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{3n}{n} 7^{-n}$; (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sqrt[n]{1-\frac{1}{n}}\right)$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+n}{1+n^2}\right)^p$; (6) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n+1}{n(n+1)^n}$; (8) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3-2n}{3+2n}\right)^n$;

(9) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$; (10) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{3}-2)^n$;

(11) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(10 - p\sqrt[n]{5}\right)^n$; (12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdot \dots \cdot (n+n)}}$;

(13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n-1}{2}}}$; (14) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt[4]{n^2+n+1})^p$;

(15) $\sum_{n=1}^{\infty} n! \sin \frac{\pi}{2^n}$; (16) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{\sqrt[3]{n^2+1}}}{2^n}$;

(17) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-\frac{1}{2n})^n}{n^{n-\frac{1}{2n}}}$; (18) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 3^{-\sqrt{n}}$;

(19) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(2n+1)}{n^p}$; (20) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{p+q\log n}$; (21) $\sum_{n=3}^{\infty} (\log\log n)^{-\log n}$;

(22) $\sum_{n=2}^{\infty} (\log n)^{-\log(\log n)}$; (23) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \log(1+\frac{1}{n})$;

(24) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log(1+\frac{1}{n})$; (25) $\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{n(n+1)}{n^2+1}$;

(26) $\sum_{n=1}^{\infty} \log\cos\frac{1}{n}$; (27) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \pi \sqrt[n]{n^3+n}$;

(28) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \pi\sqrt{n^2+1}$; (29) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n^2\pi}{n+1}$;

(30) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2n-\cos n}$; (31) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n\alpha|}{n+1}$;

(32) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+5\sin n}\right)\sin n\alpha$; (33) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n+5\sin n}$;

(34) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}}{2} - \sqrt{n}\right)$; (35) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$;

(36) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{1+\sqrt[n]{p}}\right)^n$; (37) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{E(\sqrt{n})} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$;

(38) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{E(n/\sqrt{5})}$; (39) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{E(n\sqrt{2})}$;

(40) $\sum_{n=1}^{\infty} (2-\sqrt[n]{n})^n$; (41) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{\sqrt[n]{n!}}$;

(42) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n}\right)$.

Wskazówki (9) $a_n \leqslant 2^{-\sqrt{n}} \leqslant n^{-2}$ dla p.w.n; (10),(17),(36) $\lim |a_n| =?$; (11),(13),(16) $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = ?$; (12),(40) $\lim na_n =?$; (18) $a_n < n^{-2}$ dla p.w.n; (20) porównać z $\sum \frac{1}{n}$ lub $\sum \frac{1}{n^2}$; (21) $\log\log n > e^{-2}$ dla p.w.n; (22) $a_n > \frac{1}{n}$ dla p.w.n; (26) $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, $|\sin x| \leqslant |x|$; (27) $\frac{1}{n} \leqslant \sqrt[n]{n^3+n} - 1 \leqslant \frac{1}{2}$ dla p.w.n; (31) $|\sin x| \geqslant \sin^2 x$; (33) skorzystać z (32); (37) oszacować $\sum_{n=k^2}^{k^2+2k} a_n$; (39) sprawdzić, że $a_n \searrow 0$ lub oszacować $|a_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n}}|$; (41) $\lim n^{1-p} a_n =?$; (42) oszacować a_{2k-1} i a_{2k}.

Rozwiązania: Bezwzgl. zbieżne: (1), (3), (4), (9), (13), (16), (18), (21), (23), (26),(32),(34),(35); warunkowo: (2), (24), (28), (29), (30), (33), (38), (39); rozbieżne: (6), (7), (8), (10), (12), (15), (17), (22), (25), (27), (36), (37), (40); (5) zb. $\iff p > 1$; (11) zb.(bezwzgl.) $\iff 9 < p < 11$; (14) zb.(bezwzgl.) $\iff p > 2$; (19) zb. $\iff p > 1$; (20) zb. $\iff (q < 0)$ lub $(q = 0, p < -1)$; (31) zb. $\iff \alpha \in \pi\mathbb{Z}$; (40) $na_n = (1 + x_n)^n$, gdzie $x_n = -(\sqrt[n]{n} - 1)^2$, więc $nx_n \to 0$; (41) zb. $\iff p < 0$